

Ejemplos de utilización de los Eurocódigos Estructurales

Ejemplo 1: Flexión simple en sección rectangular según EN 1992-1-1:2004¹

Ejemplo planteado:

Se trata de dimensionar a flexión simple una sección rectangular de 0,30 m de ancho y 0,90 m de canto construida con hormigón C60/75 y acero B500S. Se utilizarán para el hormigón los diagramas parábola-rectángulo, bilineal y rectangular. El armado se hará con Ø25 dispuestos con un recubrimiento teórico mínimo de 55 mm. Los momentos con los que se efectuará el cálculo serán de 600, 1.100, 1.900 y 2.500 kNm. Se calcularán también los resultados para un brazo mecánico aproximado de 0,9d. No se incluye la comprobación de la abertura de fisura.

Resistencias de cálculo para la solución:

El coeficiente de cansancio para el hormigón es α_{cc} (Art.3.15 de EN 1992-1-1). El valor recomendado en EN 1992-1-1 es de 1.

El Anejo Nacional dice que se puede adoptar un valor comprendido entre 0,85 y 1 si el porcentaje de la carga permanente supera el 70% de la total.

De acuerdo con esto, tanto con los parámetros nacionales recomendados en EN 1992-1-1 como con el Anejo Nacional español, la tensión de cálculo del hormigón es:

$$\gamma_c = 1,50$$

$$f_{cd} = \alpha_{cc} f_{ck} / \gamma_c = 1 \cdot 60 / 1,50 = 40 \text{ N/mm}^2$$

Para el acero, EN 1992-1-1 no tipifica las resistencias, para las que se da un rango de límite elástico entre 400 y 600 MPa.

El Anejo Nacional limita el valor superior a 500 MPa.

La tensión de cálculo del acero a tracción es:

$$\gamma_s = 1,15$$

$$f_{yd} = 500 / 1,15 = 434,8 \text{ N/mm}^2$$

Este valor es igual para el acero en compresión.

Los valores de las deformaciones correspondientes al límite elástico y a la deformación última del acero, con cualquiera de los diagramas que se utilicen, son:

$$E_s = 200.000 \text{ N/mm}^2$$

$$\epsilon_y = 434,8 / 200.000 = 0,002174$$

El valor de la deformación máxima en rotura ϵ_{ud} está limitada al 10 por mil en el Anejo Nacional. Sin embargo, EN 1992-1-1 recomienda un valor de $0,9\epsilon_{uk}$, siendo este valor dependiente de la calidad del acero (según la Tabla C.1, $\epsilon_{uk} = 25\%$ para un acero de Clase A, $\epsilon_{uk} = 50\%$ para un acero de Clase B y $\epsilon_{uk} = 75\%$ para un acero de clase C). En caso de no disponer de información, EN 1992-1-1 sugiere adoptar $\epsilon_{ud} = 20\%$.

Estas diferencias demuestran que el límite del 10‰ utilizado tradicionalmente en España es un límite convencional que no refleja una rotura real de la pieza. Para los cálculos realizados con los parámetros recomendados de EN-1992-1-1, y con objeto de explorar las diferencias que surgen, se adoptará un acero de clase C con una deformación última de cálculo de $\epsilon_{ud} = 0,9 \times 75\% = 0,067$.

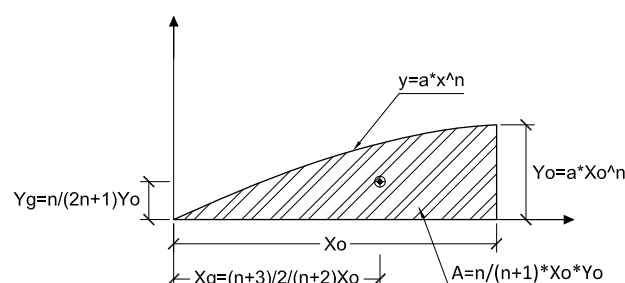
Soluciones con diagrama parábola-rectángulo:

Los valores de las deformaciones últimas del hormigón para el C60 (tabla 3.1 de EN 1992-1-1) son:

$$\epsilon_{c2} = 0,0023$$

$$\epsilon_{cu2} = 0,0029$$

Por otra parte, para este hormigón, el exponente de la parábola es 1,6 en lugar del valor 2,0 tradicional para hormigones normales. En la figura siguiente se muestra la posición del centro de gravedad y el área de un tramo de parábola de grado n, que incluye el punto de tangente horizontal. Estas expresiones serán útiles para las verificaciones que se incluyen más adelante.



1. Ejemplo elaborado por Rafael Chueca: rafa@rchueca.com

Para el caso concreto de una parábola de exponente 1,6, se obtienen los siguientes valores para la integral del área de la parábola completa y para el momento correspondiente respecto de la fibra neutra:

$$C = \frac{1,6}{2,6} f_{cd} b x = \frac{8}{13} f_{cd} b x$$

$$M_{f.n.} = C \cdot X_g = \frac{8}{13} f_{cd} b x \frac{4,6}{2 \cdot 3,6} x = \frac{46}{117} f_{cd} b x^2$$

Si se toma el momento respecto al centro de gravedad de las armaduras, la expresión correspondiente será:

$$M_u = C \cdot \left(d - (x - X_g) \right) = \frac{8}{13} f_{cd} b x \left(d - \left(1 - \frac{4,6}{2 \cdot 3,6} \right) x \right) = \frac{8}{13} f_{cd} b x \left(d - \frac{13}{36} x \right)$$

M_d = 600 kNm:

Se estima que va a ser necesaria una armadura de 4Ø25 (600/0,9/0,85/50 · 1,15 = 18 cm² → 3,7Ø25), con lo que el recubrimiento teórico y el canto útil serán:

$$\begin{aligned} r &= 55 \text{ mm} \\ d &= 900 - 55 = 845 \text{ mm} \end{aligned}$$

El subdominio en que comienza la flexión simple se tiene pivotando en el punto de ϵ_{ud} en la armadura de tracción y con deformaciones del hormigón crecientes desde 0 a ϵ_{c2} . En este último punto se desarrolla por completo el bloque parabólico de tensiones. La profundidad de la fibra neutra correspondiente y el momento último alcanzado utilizando los parámetros del Anejo Nacional, son:

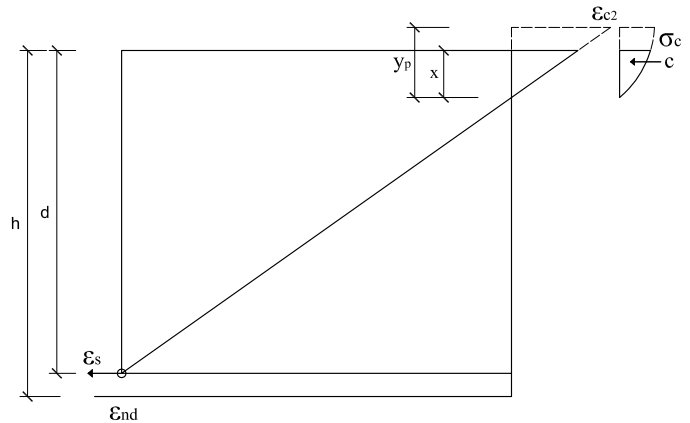
$$\begin{aligned} y_p &= d \epsilon_{c2} / (\epsilon_{c2} + \epsilon_{ud}) = 845 \cdot 0,0023 / (0,0023 + 0,01) = 158,0 \text{ mm} \\ M_u &= 1,6/2,6 f_{cd} b y_p (d - 3/8 y_p) = 2/3 \cdot 40 \cdot 300 \cdot 158,0 \cdot \\ &\quad \cdot (845 - 3/8 \cdot 158,0) / 10^6 = 993,2 \text{ kNm} > M_d \end{aligned}$$

Así pues, con el valor de M_d el bloque de compresiones en el hormigón se extiende parcialmente en la zona parabólica. Si se denomina η a la relación entre la altura comprimida e y_p , que se acaba de obtener, teniendo en cuenta que la ley de tensiones, tomando como origen la fibra neutra, viene dada por la parábola $\sigma_c(y) = \left(1 - (1 - y/y_p)^{1,6} \right) f_{cd}$, las expresiones que dan el volumen de compresiones de la zona comprimida y el momento respecto a la fibra neutra (donde y_p es la altura de la zona parabólica total) se obtienen integrando la ley de tensiones y son:

$$y_p = \frac{\epsilon_{c2}}{\epsilon_{ud}} (d - x)$$

$$C = \frac{1}{2,6} f_{cd} b \left(2,6\eta + (1 - \eta)^{2,6} - 1 \right) y_p$$

$$M_{f.n.} = \frac{1}{9,36} f_{cd} b \left(-1 + 4,68\eta^2 + 3,6\eta(1 - \eta)^{2,6} + (1 - \eta)^{3,6} \right) y_p^2$$



Se tantea una posición de la fibra neutra, dado que las expresiones analíticas a que dan lugar las fórmulas anteriores serían muy complicadas. Naturalmente, el valor de x que se tantea ha de ser inferior a y_p . Para $x = 124 \text{ mm}$ se tiene:

$$y_p = \frac{0,0023}{0,01} (845 - 124,4) = 165,7 \text{ mm}$$

$$\eta = \frac{124,4}{165,7} = 0,751$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2,6} f_{cd} b \left(2,6\eta + (1 - \eta)^{2,6} - 1 \right) y_p = \frac{1}{2,6} 40 \cdot 300 \cdot \\ &\quad \cdot \left(2,6 \cdot 0,751 + (1 - 0,751)^{2,6} - 1 \right) \cdot 165,7 / 1.000 = 748,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{f.n.} &= \frac{1}{9,36} f_{cd} b \left(-1 + 4,68\eta^2 + 3,6\eta(1 - \eta)^{2,6} + (1 - \eta)^{3,6} \right) y_p^2 = \\ &= \frac{1}{9,36} 40 \cdot 300 \cdot \\ &\quad \cdot \left(-1 + 4,68 \cdot 0,751^2 + 3,6 \cdot 0,751 \cdot (1 - 0,751)^{2,6} + (1 - 0,751)^{3,6} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{165,7^2}{10^6} = 60,5 \text{ kNm} \end{aligned}$$

El momento último respecto a la armadura de tracción es:

$$M_u = 60,5 + 748,5 \cdot (845 - 124,4) / 1.000 = 599,9 \text{ kNm}$$

La aproximación es suficiente. La armadura de tracción es:

$$\begin{aligned} U_{s1} &= C = 748,5 \text{ kN} \\ A_1 &= 748,5 / 434,8 \cdot 1.000 = \mathbf{1.721 \text{ mm}^2} \rightarrow 4\text{Ø}25 \end{aligned}$$

La cuantía geométrica resulta:

$$\rho = 1.964 / 270.000 = 0,0073$$

Las cuantías mínimas son, normalmente inferiores al 3‰, por lo que la cuantía dispuesta debería cumplir los valores mínimos. No obstante, a continuación se incluye esta verifi-

cación dado que permite exponer las formulaciones correspondientes.

La cuantía mínima según EN 1992-1-1, artículo 9.2.1.1 es:

$$A_{s,min} = 0,26 f_{ctm} / f_{yk} b_t d$$

$$f_{ctm} = 4,4 \text{ N/mm}^2 \text{ (Tabla 3.1 de EN 1992-1-1)}$$

$$A_{s,min} = 0,26 \cdot 4,4 / 500 \cdot 300 \cdot 845 = 580 \text{ mm}^2 \rightarrow \text{Cumple}$$

La cuantía mínima es diferente en el Anejo Nacional:

$$A_{s,min} = W/z f_{ctm,fl} / f_{yd}$$

$$z \text{ (brazo mecánico)} = 0,8 h = 0,8 \cdot 900 = 720 \text{ mm}$$

$$W \text{ (momento resistente)} = 300 \cdot 900^2 / 6 = 40.500.000 \text{ mm}^3$$

$$f_{ctm,fl} \text{ (Resistencia media a flexotracción - Art. 3.1.8 de EN 1992.1.1)} = \max \{ (1,6 - h/1.000) f_{ctm}; f_{ctm} \} = 4,4 \text{ N/mm}^2$$

$$A_{s,min} = 40.500.000 / 720 \cdot 4,4 / 434,8 = 569 \text{ mm}^2 \rightarrow \text{Cumple}$$

Según los parámetros recomendados de EN 1992-1-1, en los que el pivote A corresponde a una deformación mucho mayor (6,7 veces más en el caso estudiado correspondiente a un acero de clase C), se tiene, para la fibra neutra que supone el fin de la zona parabólica del diagrama parábola-rectángulo ($x = y_p$):

$$x = y_p = \frac{d \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{ud}} = \frac{845 \cdot 0,0023}{0,0023 + 0,067} = 28,0 \text{ mm}$$

$$M = \frac{8}{13} f_{cd} b x \left(d - \frac{13}{36} x \right) = \frac{8}{13} 40 \cdot 300 \cdot 28,0 \cdot$$

$$\cdot \left(845 - \frac{13}{36} \cdot 28,0 \right) \frac{1}{10^6} = 172,63 \text{ kNm} < M_d$$

Se observa, que se obtiene un valor muy inferior al momento solicitante si sólo se considera la zona parabólica del diagrama parábola rectángulo. Este resultado indica que resulta difícil obtener una rotura por el Pivote A (rotura por alargamiento excesivo del acero) al aumentar la deformación admisible del acero y considerar el valor real del material en lugar de un valor convencional como se ha hecho tradicionalmente en la práctica española. No obstante, como se verá la diferencia en términos de armadura no es significativa.

Se debe, en este caso, modificar la estrategia y plantear la rotura por el pivote B:

$$C = f_{cd} b \left(\frac{8}{13} \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} + \left(1 - \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} \right) \right) x$$

$$M_{f,n.} = f_{cd} b \left(\frac{46}{117} \left(\frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} \right)^2 + \left(1 - \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} \right) \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} \right) + \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} \right) \right) x^2$$

$$M_u = M_{f,n.} + C \cdot \left(d - \frac{M_{f,n.}}{C} \right)$$

Lógicamente, al plastificar el hormigón debe reducirse la fibra neutra respecto del cálculo anterior, aumentando algo el brazo mecánico y obteniendo una cuantía ligeramente menor. Probando, igual que antes, con $y_p = 88,9 \text{ mm}$:

$$C = 40 \cdot 300 \cdot \left(\frac{8}{13} \frac{2,3}{2,9} + \left(1 - \frac{2,3}{2,9} \right) \right) \cdot 88,9 \frac{1}{1.000} = 741,4 \text{ kN}$$

$$M_{f,n.} = 40 \cdot 300 \cdot \left(\frac{46}{117} \left(\frac{2,3}{2,9} \right)^2 + \left(1 - \frac{2,3}{2,9} \right) \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2,3}{2,9} \right) + \frac{2,3}{2,9} \right) \right) \cdot 88,9^2 \frac{1}{10^6} = 41,0 \text{ kNm}$$

$$M_u = 41,0 + 741,4 \cdot (0,845 - 0,0889) = 601,6 \text{ kNm}$$

$$A_s = C / f_{yd} = 741,4 / 434,8 \cdot 1.000 = 1.705 \text{ mm}^2$$

Se observa que se obtiene una cuantía ligeramente inferior al cálculo según el Anejo Nacional, lo cual resulta consistente con el ligero aumento del brazo mecánico.

Observada esta diferencia, en el resto de los ejemplos se mantendrá el cálculo únicamente con el criterio del Anejo Nacional.

$M_d = 1.100 \text{ kNm}$:

Se estima que va a ser necesaria una armadura de $8\phi 25$ ($1.100 / 0,9 / 0,80 / 50 \cdot 1,15 = 35 \text{ cm}^2 \rightarrow 7,2 \phi 25$), con lo que, suponiendo dos capas de armadura iguales, el recubrimiento teórico y el canto útil son:

$$r = (4 \cdot 55 + 4 \cdot 105) / 8 = 80 \text{ mm}$$

$$d = 900 - 80 = 820 \text{ mm}$$

El subdominio a que corresponde este caso es continuación del anterior y se tiene pivotando en el punto de ε_{ud} en la armadura de tracción y con deformaciones del hormigón crecientes desde ε_{c2} a ε_{cu2} . En este último punto se desarrolla por completo el bloque rectangular de tensiones. Por tanto, la zona parabólica se desarrolla por completo, pero la rectangular es parcial. La deformación superior del hormigón ε_{cs} y la altura y_p de la zona parabólica para una profundidad x de la fibra neutra son:

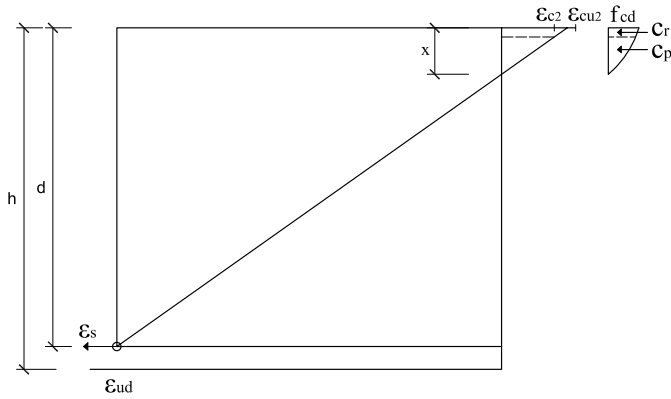
$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{su} x / (d - x)$$

$$y_p = x \varepsilon_{c2} / \varepsilon_{cs}$$

La altura de la zona rectangular es $x - y_p$. Los volúmenes de compresiones y sus momentos respecto a la fibra neutra son:

$$\text{Zona parabólica: } C_p = 8/13 f_{cd} b y_p \\ M_p = 23/36 C_p y_p$$

$$\text{Zona rectangular: } C_r = f_{cd} b (x - y_p) \\ M_r = C_r (x + y_p) / 2$$



El volumen de compresiones total, igual a la capacidad mecánica de la armadura de tracción, y el momento respecto a ésta son:

$$U_{s1} = f_{cd} b (x - 5/13 y_p)$$

$$M_u = M_p + M_r + U_{s1} (d - x)$$

Al final del subdominio, en el punto en que se alcanza ϵ_{cu2} , se tiene:

$$x = d \epsilon_{cu2} (\epsilon_{cu2} + \epsilon_{su}) = 820 \cdot 0,0029 / (0,0029 + 0,01) = 184,3 \text{ mm}$$

$$y_p = x \epsilon_{c2} / \epsilon_{cu2} = 184,3 \cdot 0,0023 / 0,0029 = 146,2 \text{ mm}$$

$$C_p = 8/13 \cdot 40 \cdot 300 \cdot 146,2 / 1.000 = 1.079,6 \text{ kN}$$

$$M_p = 23/36 \cdot 1.079,6 \cdot 146,2 / 1.000 = 100,8 \text{ kNm}$$

$$x - y_p = 184,3 - 146,2 = 38,1 \text{ mm}$$

$$C_r = 40 \cdot 300 \cdot 38,1 / 1.000 = 457,7 \text{ kN}$$

$$M_r = 457,7 \cdot (184,3 + 146,2) / 2 / 1.000 = 75,6 \text{ kNm}$$

$$U_{s1} = 1.079,6 + 457,7 = 1.537,3 \text{ kN}$$

$$M_u = 100,8 + 75,6 + 1.537,3 \cdot (820 - 184,3) / 1.000 = 1.153,7 \text{ mkN} > M_d$$

Para el valor de M_d que se está considerando, se tantea una posición de la fibra neutra. Para $x = 178,7 \text{ mm}$ se tiene:

$$\epsilon_{cs} = 0,01 \cdot 178,7 / (820 - 178,7) = 0,00279$$

$$y_p = 178,7 \cdot 0,0023 / 0,00279 = 147,3 \text{ mm}$$

$$C_p = 8/13 \cdot 40 \cdot 300 \cdot 147,3 / 1.000 = 1.087,8 \text{ kN}$$

$$M_p = 23/36 \cdot 1.087,8 \cdot 147,3 / 1.000 = 102,4 \text{ kNm}$$

$$C_r = 40 \cdot 300 (178,7 - 147,3) / 1.000 = 376,8 \text{ kN}$$

$$M_r = 376,8 (178,7 + 147,3) / 2 / 1.000 = 61,4 \text{ kNm}$$

$$U_{s1} = 1.087,8 + 376,8 = 1.464,6 \text{ kN}$$

$$M_u = 102,4 + 61,4 + 1.464,6 (820 - 178,7) / 1.000 = 1.103,0 \text{ mkN}$$

La aproximación es suficiente (Error 0,03%). La armadura de tracción es:

$$A_1 = 1.464,6 / 434,8 \cdot 1.000 = 3.369 \text{ mm}^2 \rightarrow 8\phi 25$$

$M_d = 1.900 \text{ kNm}$:

Se estima que va a ser necesaria una armadura de $14\phi 25$ ($1.900 / 0,9 / 0,80 / 50 \cdot 1,15 = 61 \text{ cm}^2 \rightarrow 12,3 \phi 25$), con lo que el recubrimiento teórico y el canto útil son:

$$r = (4 \cdot 55 + 4 \cdot 105 + 4 \cdot 155 + 2 \cdot 205) / 14 = 119 \text{ mm}$$

$$d = 900 - 119 = 781 \text{ mm}$$

El dominio a que corresponde este caso es continuación del anterior y se tiene pivotando en el punto de ϵ_{cu2} en el hormigón y con deformaciones decrecientes de la armadura traccionada desde ϵ_{ud} a ϵ_y . En este dominio ya no influye el valor que se tome para la deformación máxima del acero y por tanto, los resultados serán los mismos tanto con los parámetros recomendados en EN 1992-1-1 como con los del Anejo Nacional. En todo el dominio se desarrollan por completo tanto el bloque rectangular de tensiones como la zona parabólica. Al final del dominio se tiene la profundidad límite x_1 de la fibra neutra, con una armadura de tracción y un momento como sigue:

$$x_1 = d \epsilon_{cu2} / (\epsilon_{cu2} + \epsilon_y)$$

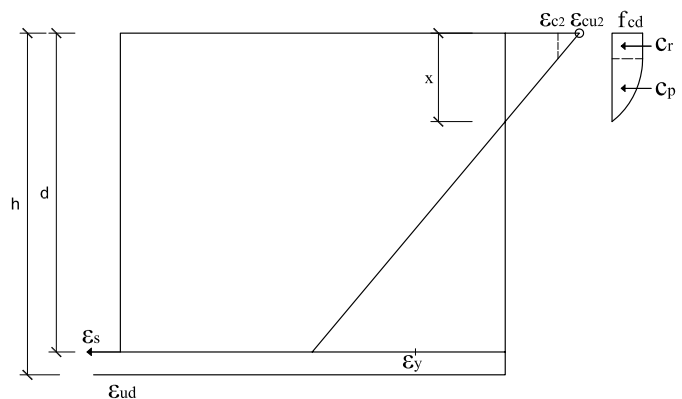
La altura y_p de la zona parabólica para la profundidad x_1 de la fibra neutra es:

$$y_p = x_1 \epsilon_{c2} / \epsilon_{cu2}$$

La altura de la zona rectangular es $x - y_p$. Los volúmenes de compresiones y sus momentos respecto a la fibra neutra son:

Zona parabólica: $C_p = 8/13 f_{cd} b y_p$
 $M_p = 23/36 C_p y_p^2$

Zona rectangular: $C_r = f_{cd} b (x_1 - y_p)$
 $M_r = C_r (x + y_p) / 2$



Al final del subdominio, en el punto en que se alcanza ε_y , se tiene en este caso:

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= 434,8 / 200.000 = 0,00217 \\ x_1 &= 781 \cdot 0,0029 / (0,0029 + 0,00217) = 446,4 \text{ mm} \\ y_p &= 446,4 \cdot 0,0023 / 0,0029 = 354,0 \text{ mm} \\ C_p &= 8/13 \cdot 40 \cdot 300 \cdot 354,0 / 1.000 = 2.614,2 \text{ kN} \\ M_p &= 23/36 \cdot 2.614,2 \cdot 354,0 / 1.000 = 591,2 \text{ kNm} \\ x - y_p &= 446,4 - 354,0 = 92,4 \text{ mm} \\ C_r &= 40 \cdot 300 \cdot 92,4 / 1.000 = 1.108,3 \text{ kN} \\ M_r &= 1.108,3 \cdot (446,4 + 354,0) / 2 / 1.000 = 443,5 \text{ kNm} \\ U_{s1} &= 2.614,2 + 1.108,3 = 3.722,5 \text{ kN} \\ M_u &= 591,2 + 443,5 + 3.722,5(781 - 446,4) / 1.000 = \\ &= 2.280,2 \text{ mkN} > M_d\end{aligned}$$

Para $M_d = 1.900 \text{ kNm}$, se puede resolver directamente una ecuación de segundo grado en x :

$$\begin{aligned}\alpha &= \varepsilon_{cu2} / \varepsilon_{cu2} = 0,0023 / 0,0029 = 0,793 \\ C_p &= 8/13 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \alpha \cdot x \\ M_p &= 23/36 \cdot C_p \cdot \alpha \cdot x = 46/117 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \alpha^2 \cdot x^2 \\ C_r &= f_{cd} \cdot b \cdot x \cdot (1 - \alpha) \\ M_r &= C_r \cdot x \cdot (1 + \alpha) / 2 = 1/2 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^2 \cdot (1 - \alpha^2) \\ M_u &= M_p + M_r + (C_p + C_r) \cdot (d - x) = \\ &= 46/117 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \alpha^2 \cdot x^2 + 1/2 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^2 \cdot (1 - \alpha^2) + f_{cd} \cdot b \cdot x \cdot \\ &\quad \cdot (1 - 5/13\alpha) \cdot (d - x) \\ M_u / (b \cdot f_{cd}) &= (46/117 \cdot \alpha^2 + 1/2 \cdot (1 - \alpha^2) - 1 + 5/13\alpha) \cdot x^2 + d \cdot (1 - 5/13\alpha) \cdot x\end{aligned}$$

Reordenando los términos, se obtiene una ecuación de segundo grado en x :

$$a x^2 + b x + c = 0$$

donde:

$$\begin{aligned}a &= 1/2 - 5/13\alpha + 25/234 \alpha^2 = 0,262 \\ b &= (5/13\alpha - 1) d = -542,795 \\ c &= M_d / (f_{cd} b) = 1.900 \cdot 10^6 / (40 \cdot 300) = 158.333 \\ x &= 351,3 \text{ mm} \\ U_{s1} &= f_{cd} b (1 - 5/13\alpha) x = \\ &= 40 \cdot 300 (1 - 5/13 \cdot 0,793) 351,3 / 1.000 = 2.929,8 \text{ kN}\end{aligned}$$

La armadura de tracción es:

$$A_1 = 2.929,8 / 434,8 \cdot 1.000 = \mathbf{6.739 \text{ mm}^2} \rightarrow 14\varnothing 25$$

$M_d = 2.500 \text{ kNm}$:

Se estima que va a ser necesaria una armadura de tracción de $20\varnothing 25$ $(2.500/0.75/0.80/50 \cdot 1.15 = 95.8 \text{ cm}^2 \rightarrow 19.5 \varnothing 25)^2$, con lo que el recubrimiento teórico y el canto útil son:

$$\begin{aligned}r &= 55 + 2 \cdot 50 = 155 \text{ mm} \\ d &= 900 - 155 = 745 \text{ mm}\end{aligned}$$

En este caso no se recorre un dominio de deformaciones, sino que se mantienen constantes las deformaciones ε_{cu2} del hormigón y ε_y de la armadura traccionada. Para mantener este plano de rotura, se complementa la armadura de tracción con armadura de compresión con objeto de poder plastificar la armadura traccionada en rotura. En todo el dominio se desarrollan por completo tanto el bloque rectangular de tensiones como la zona parabólica. La profundidad límite x_1 de la fibra corresponde a la expresión expuesta en el caso anterior como punto final del subdominio. Dado el cambio de canto útil, resulta necesario calcularla de nuevo, así como la armadura de tracción y el momento correspondientes:

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= 434,8 / 200.000 = 0,002174 \\ x_1 &= 745 \cdot 0,0029 / (0,0029 + 0,002174) = 425,8 \text{ mm} \\ y_p &= 425,8 \cdot 0,0023 / 0,0029 = 337,7 \text{ mm} \\ C_p &= 8/13 \cdot 40 \cdot 300 \cdot 337,7 / 1.000 = 2.493,8 \text{ kN} \\ M_p &= 23/36 \cdot 2.493,8 \cdot 337,7 / 1.000 = 538,0 \text{ kNm} \\ x - y_p &= 425,8 - 337,7 = 88,1 \text{ mm} \\ C_r &= 40 \cdot 300 \cdot 88,1 / 1.000 = 1.057,2 \text{ kN} \\ M_r &= 1.057,2 \cdot (425,8 + 337,7) / 2 / 1.000 = 417,9 \text{ kNm} \\ U_{s1} &= 2.493,8 + 1.057,2 = 3.551,0 \text{ kN} \\ M_1 &= 538,0 + 417,9 + 3.551,0 (745 - 425,8) / 1.000 = \\ &= 2.089,4 \text{ mkN} < M_d\end{aligned}$$

Al ser inferior este momento al de cálculo, aunque se podría aumentar la armadura de tracción y hacerla trabajar a deformaciones inferiores a ε_y , esto no sería económico, por lo que es preferible absorber la diferencia $M_d - M_1$ con una armadura de compresión, cuya capacidad mecánica se debe sumar también al U_{s1} anterior. Se tiene así, para una armadura de compresión con el recubrimiento teórico $d' = 55 \text{ mm}$:

$$\begin{aligned}d - d' &= 745 - 55 = 690 \text{ mm} \\ M_d - M_1 &= 2.500 - 2.089,4 = 410,6 \text{ kNm} \\ U_{s2} &= 410,6 \cdot 1.000 / 690 = 595,1 \text{ kN} \\ A' &= 595,1 / 434,8 \cdot 1.000 = \mathbf{1.369 \text{ mm}^2} \rightarrow 3\varnothing 25 \\ U_{s1} &= 3.551,0 + 595,1 = 4.146,1 \text{ kN} \\ A &= 4.146,1 / 434,8 \cdot 1.000 = \mathbf{9.536 \text{ mm}^2} \rightarrow 20\varnothing 25\end{aligned}$$

Soluciones con diagrama bilineal

Los valores de las deformaciones últimas del hormigón para el C60 (tabla 3.1 de EN 1992-1-1) son:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{c3} &= 0,0019 \\ \varepsilon_{cu3} &= 0,0029\end{aligned}$$

$M_d = 600 \text{ kNm}$

Se estima que va a ser necesaria una armadura de $4\varnothing 25$, igual que anteriormente, con lo que el recubrimiento teórico y el canto útil son:

$$\begin{aligned}r &= 55 \text{ mm} \\ d &= 900 - 55 = 845 \text{ mm}\end{aligned}$$

2. Se utiliza $z=0.75d$ debido a que este momento es superior al momento límite (calculado en el paso anterior e igual a $2.388,6 \text{ kNm}$) para el cual resulta necesario disponer armadura de compresión para conseguir plastificar la armadura traccionada, como se verá más adelante.

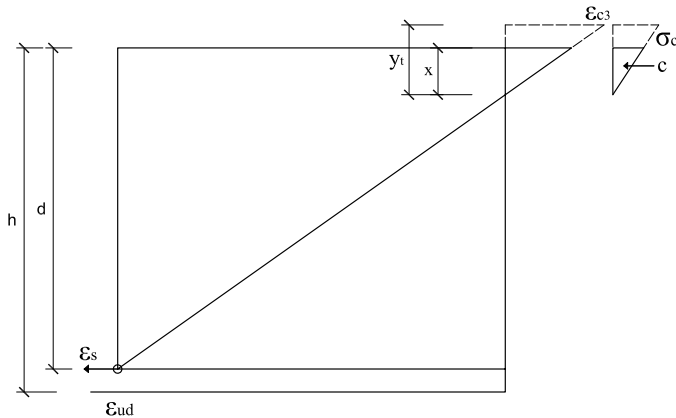
El subdominio en que comienza la flexión simple se obtiene pivotando en el punto de ϵ_{ud}^3 en la armadura de tracción y con deformaciones del hormigón crecientes desde 0 a ϵ_{c3} . En este último punto se desarrolla por completo el bloque triangular de tensiones. La profundidad de la fibra neutra correspondiente y el momento último alcanzado son:

$$y_t = d \epsilon_{c3} / (\epsilon_{c3} + \epsilon_{ud}) = 845 \cdot 0,0019 / (0,0019 + 0,01) = 134,9 \text{ mm}$$

$$M_u = 1/2 f_{cd} b y_t (d - 1/3 y_t) =$$

$$= 1/2 \cdot 40 \cdot 300 \cdot 134,9 \cdot (845 - 1/3 \cdot 134,9) / 10^6 =$$

$$= 647,6 \text{ kNm} < M_d$$



Así pues, con este momento el bloque de compresiones en el hormigón se extiende parcialmente en la zona triangular. Para una profundidad x de la fibra neutra, las expresiones que dan la tensión superior en el hormigón, el volumen de compresiones de la zona y el momento último respecto a la armadura traccionada son:

$$\sigma_c = f_{cd} x / y_t$$

$$C = 1/2 \sigma_c b x$$

$$M_u = C(d - 1/3 x)$$

Sustituyendo y haciendo $a = 1/6 f_{cd} b / y_t$ se tiene:

$$x^3 - 3 d x^2 + M_d / a = 0$$

Esta ecuación se puede resolver directamente o por tanteos para hallar la posición de la fibra neutra. Naturalmente, el x que se tantee ha de ser inferior a y_t . En este caso se tiene:

$$a = 1/6 \cdot 40 \cdot 300 / 134,9 = 14,826$$

$$M_d / a = 600 \cdot 10^6 / 14,826 = 40,469,446$$

$$x^3 - 2535 x^2 + 40,469,446 = 0$$

La solución es $x = 129,71 \text{ mm}$, con la que:

$$\sigma_c = 40 \cdot 129,7 / 134,9 = 38,46 \text{ N/mm}^2$$

$$U_{s1} = C = 1/2 \cdot 38,46 \cdot 300 \cdot 129,7 / 1000 = 748,2 \text{ kN}$$

$$A_1 = 748,2 / 434,8 \cdot 1.000 = \mathbf{1.721 \text{ mm}^2} \rightarrow 4\varnothing 25$$

3. Se adopta en este caso $\epsilon_{ud} = 0,01$ según el Anejo Nacional. No obstante, igual que en caso del diagrama parábola-rectángulo, se podría adoptar, aplicando los valores recomendados de EN 1992-1-1 un valor mucho mayor para este valor (hasta 0,067) con un resultado similar. No se efectúa el cálculo paralelo con objeto de limitar la extensión del ejemplo.

$M_d = 1100 \text{ kNm}$:

Se estima, igual que antes, que va a ser necesaria una armadura de $8\varnothing 25$, con lo que el recubrimiento teórico y el canto útil son:

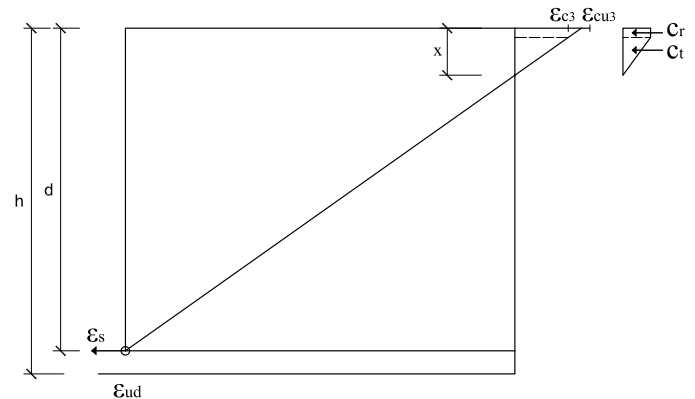
$$r = (4 \cdot 55 + 4 \cdot 105) / 8 = 80 \text{ mm}$$

$$d = 900 - 80 = 820 \text{ mm}$$

El subdominio a que corresponde este caso es continuación del anterior y se tiene pivotando en el punto de ϵ_{ud} en la armadura de tracción y con deformaciones del hormigón crecientes desde ϵ_{c3} a ϵ_{cu3} . En este último punto se desarrolla por completo el bloque rectangular de tensiones. Por tanto, la zona triangular se desarrolla por completo, pero la rectangular es parcial. La deformación superior del hormigón ϵ_{cs} y la altura y_t de la zona triangular para una profundidad x de la fibra neutra son:

$$\epsilon_{cs} = \epsilon_{su} x / (d - x)$$

$$y_t = x \epsilon_{c3} / \epsilon_{cs}$$



La altura de la zona rectangular es $x - y_t$. Los volúmenes de compresiones y sus momentos respecto a la fibra neutra son:

Zona triangular: $C_t = 1/2 f_{cd} b y_t$
 $M_t = 2/3 C_t y_t$

Zona rectangular: $C_r = f_{cd} b (x - y_t)$
 $M_r = C_r (x + y_t) / 2$

El volumen de compresiones total, igual a la capacidad mecánica de la armadura de tracción, y el momento respecto a ésta son:

$$U_{s1} = f_{cd} b (x - 1/2 y_t)$$

$$M_u = M_p + M_t + U_{s1} (d - x)$$

Al final del subdominio, en el punto en que se alcanza ϵ_{cu2} , se tiene en este caso:

$$\begin{aligned}
 x &= d \cdot \epsilon_{cu3} / (\epsilon_{cu3} + \epsilon_{su}) = 820 \cdot 0,0029 / (0,0029 + 0,01) = 184,3 \text{ mm} \\
 y_t &= x \cdot \epsilon_{cs} / \epsilon_{cu3} = 184,3 \cdot 0,0019 / 0,0029 = 120,8 \text{ mm} \\
 C_t &= 1/2 \cdot 40 \cdot 300 \cdot 120,8 / 1.000 = 724,7 \text{ kN} \\
 M_t &= 2/3 \cdot 724,7 \cdot 120,8 / 1.000 = 58,4 \text{ kNm} \\
 C_r &= 40 \cdot 300 \cdot (184,3 - 120,8) / 1.000 = 762,0 \text{ kN} \\
 M_r &= 762,0 \cdot (184,3 + 120,8) / 2 / 1.000 = 116,2 \text{ kNm} \\
 U_{s1} &= 724,7 + 762,0 = 1.486,7 \text{ kN} \\
 M_u &= 58,4 + 116,2 + 1.486,7 \cdot (820 - 184,3) / 1.000 = \\
 &= 1.119,7 \text{ mkN} > M_d
 \end{aligned}$$

Para el valor de M_d considerado, se tantea una posición de la fibra neutra. Para $x = 182,1$ mm se tiene:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{cs} &= 0,01 \cdot 182,1 / (820 - 182,1) = 0,00285 \\
 y_t &= 182,1 \cdot 0,0019 / 0,00285 = 121,4 \text{ mm} \\
 C_t &= 1/2 \cdot 40 \cdot 300 \cdot 121,4 / 1.000 = 728,4 \text{ kN} \\
 M_t &= 2/3 \cdot 728,4 \cdot 121,4 / 1.000 = 58,9 \text{ kNm} \\
 C_r &= 40 \cdot 300 (182,1 - 121,4) / 1.000 = 728,4 \text{ kN} \\
 M_r &= 728,4 (182,1 + 121,4) / 2 / 1.000 = 110,5 \text{ kNm} \\
 U_{s1} &= 728,4 + 728,4 = 1.456,8 \text{ kN} \\
 M_u &= 58,9 + 110,5 + 1.456,8 (820 - 182,1) / 1.000 = \\
 &= 1.098,7 \text{ mkN}
 \end{aligned}$$

La aproximación es suficiente (Error 0,12%). La armadura de tracción es:

$$A_1 = 1.456,8 / 434,8 \cdot 1.000 = \mathbf{3.351 \text{ mm}^2} \rightarrow 8\varnothing 25$$

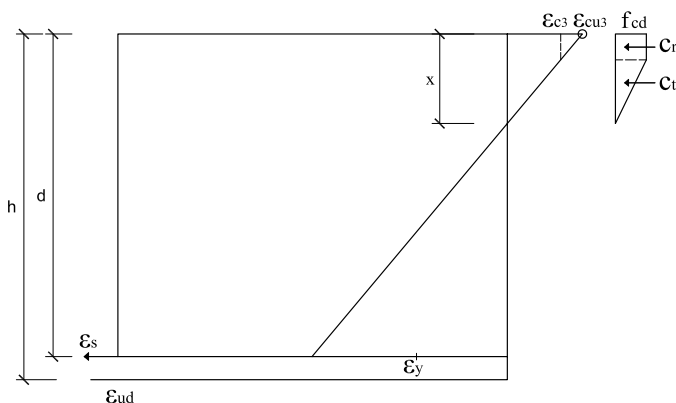
$M_d = 1.900 \text{ kNm}$:

Se estima, igual que antes, que va a ser necesaria una armadura de $14\varnothing 25$, con lo que el recubrimiento teórico y el canto útil son:

$$\begin{aligned}
 r &= (4 \cdot 55 + 4 \cdot 105 + 4 \cdot 155 + 2 \cdot 205) / 14 = 119 \text{ mm} \\
 d &= 900 - 119 = 781 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

El dominio a que corresponde este caso es continuación del anterior y se tiene pivotando en el punto de ϵ_{cu3} en el hormigón y con deformaciones decrecientes de la armadura traccionada desde ϵ_{ud} a ϵ_y . En todo el dominio se desarrollan por completo tanto el bloque rectangular de tensiones como la zona parabólica. Al final del dominio se tiene la profundidad límite x_1 de la fibra neutra, con una armadura de tracción y un momento (momento límite) como sigue:

$$x_1 = d \cdot \epsilon_{cu3} / (\epsilon_{cu3} + \epsilon_y)$$



La altura y_t de la zona parabólica para la profundidad x_1 de la fibra neutra es:

$$y_t = x_1 \cdot \epsilon_{cu2} / \epsilon_{c2}$$

La altura de la zona rectangular es $x - y_p$. Los volúmenes de compresiones y sus momentos respecto a la fibra neutra son:

$$\begin{aligned}
 \text{Zona triangular: } C_t &= 1/2 f_{cd} b y_t \\
 M_t &= 2/3 C_p y_t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Zona rectangular: } C_r &= f_{cd} b (x_1 - y_t) \\
 M_r &= C_r (x + y_t) / 2
 \end{aligned}$$

Al final del subdominio, en el punto en que se alcanza ϵ_y , se tiene, en este caso:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_y &= 434,8 / 200.000 = 0,00217 \\
 x_1 &= 781 \cdot 0,0029 / (0,0029 + 0,00217) = 446,7 \text{ mm} \\
 y_t &= 446,7 \cdot 0,0019 / 0,0029 = 292,7 \text{ mm} \\
 C_t &= 1/2 \cdot 40 \cdot 300 \cdot 292,7 / 1.000 = 1.756,2 \text{ kN} \\
 M_t &= 2/3 \cdot 1.756,2 \cdot 292,7 / 1.000 = 342,7 \text{ kNm} \\
 x - y_t &= 446,7 - 292,7 = 154,0 \text{ mm} \\
 C_r &= 40 \cdot 300 \cdot 154,0 / 1.000 = 1.848,0 \text{ kN} \\
 M_r &= 1.848,0 \cdot (446,7 + 292,7) / 2 / 1.000 = 683,2 \text{ kNm} \\
 U_{s1} &= 1.756,2 + 1.848,0 = 3.604,2 \text{ kN} \\
 M_u &= 342,7 + 683,2 + 3.604,2 (781 - 446,7) / 1.000 = \\
 &= 2.230,8 \text{ mkN} > M_d
 \end{aligned}$$

Para $M_d = 1.900 \text{ kNm}$, se puede resolver directamente una ecuación de segundo grado en x :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \epsilon_{c2} / \epsilon_{cu2} = 0,0019 / 0,0029 = 0,655 \\
 C_t &= 1/2 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \alpha \cdot x \\
 M_t &= 2/3 \cdot C_t \cdot \alpha \cdot x = 1/3 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \alpha^2 \cdot x^2 \\
 C_r &= f_{cd} \cdot b \cdot x \cdot (1 - \alpha) \\
 M_r &= C_r \cdot x \cdot (1 + \alpha) / 2 = 1/2 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^2 \cdot (1 - \alpha^2) \\
 M_u &= M_p + M_r + (C_p + C_r) \cdot (d - x) = \\
 &= 1/3 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \alpha^2 \cdot x^2 + 1/2 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x^2 \cdot (1 - \alpha^2) + f_{cd} \cdot b \cdot x \cdot \\
 &\quad \cdot (1 - 1/2 \alpha) \cdot (d - x) \\
 M_u / (b \cdot f_{cd}) &= (1/3 \cdot \alpha^2 + 1/2 \cdot (1 - \alpha^2) - 1 + 1/2 \alpha) \cdot x^2 + d \cdot (1 - 1/2 \alpha) \cdot x
 \end{aligned}$$

Reordenando los términos, se obtiene una ecuación de segundo grado en x :

$$\begin{aligned}
 a x^2 + b x + c &= 0 \text{ donde:} \\
 a &= 1/2 - \alpha/2 + \alpha^2/6 = 0,244 \\
 b &= (\alpha/2 - 1) d = -525,2 \\
 c &= M_d / (f_{cd} b) = 1900 \cdot 10^6 / (40 \cdot 300) = 158.333 \\
 x &= 362,5 \text{ mm} \\
 U_{s1} &= f_{cd} b (1 - \alpha/2) x = 40 \cdot 300 (1 - 0,655/2) 362,5 / 1.000 = \\
 &= 2.925,4 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

La armadura de tracción necesaria es:

$$A_1 = 2.925,4 / 434,8 \cdot 1.000 = \mathbf{6.728 \text{ mm}^2} \rightarrow 14\varnothing 25$$

$M_d = 2500 \text{ kNm}$:

Se estima, igual que antes, que va a ser necesaria una armadura de tracción de 20Ø25, con lo que el recubrimiento teórico y el canto útil son:

$$r = 55 + 2 \cdot 50 = 155 \text{ mm}$$

$$d = 900 - 155 = 745 \text{ mm}$$

En este caso no se recorre un dominio de deformaciones, sino que se mantienen constantes las deformaciones ϵ_{cu3} del hormigón y ϵ_y de la armadura traccionada. En todo el dominio se desarrollan por completo tanto el bloque rectangular de tensiones como la zona triangular. La profundidad límite x_l de la fibra neutra es la que ya se ha calculado en el caso anterior como límite del subdominio. Dado el cambio de canto útil, resulta necesario calcularla de nuevo, así como la armadura de tracción y el momento correspondientes:

$$\epsilon_y = 434,8 / 200.000 = 0,00217$$

$$x_l = 745 \cdot 0,0029 / (0,0029 + 0,00217) = 426,1 \text{ mm}$$

$$y_l = 426,1 \cdot 0,0019 / 0,0029 = 279,2 \text{ mm}$$

$$C_t = 1/2 \cdot 40 \cdot 300 \cdot 279,2 / 1.000 = 1.675,2 \text{ kN}$$

$$M_t = 2/3 \cdot 1.675,2 \cdot 279,2 / 1.000 = 311,6 \text{ kNm}$$

$$x - y_l = 426,1 - 279,2 = 146,9 \text{ mm}$$

$$C_r = 40 \cdot 300 \cdot 146,9 / 1.000 = 1.762,8 \text{ kN}$$

$$M_r = 1.762,8 \cdot (426,1 + 279,2) / 2 / 1.000 = 621,7 \text{ kNm}$$

$$U_{sl} = 1.675,2 + 1.762,8 = 3.438,0 \text{ kN}$$

$$M_l = 311,6 + 621,7 + 3.438,0 (745 - 426,1) / 1.000 = 2.029,7 \text{ mkN} < M_d$$

Al ser inferior este momento al de cálculo, aunque se podría aumentar la armadura de tracción y hacerla trabajar a deformaciones inferiores a ϵ_y , esto no sería económico, por lo que es preferible absorber la diferencia $M_d - M_l$ con una armadura de compresión, cuya capacidad mecánica se debe sumar también al U_{sl} anterior. Se tiene así, para una armadura de compresión con el recubrimiento teórico $d' = 55 \text{ mm}$:

$$d - d' = 745 - 55 = 690 \text{ mm}$$

$$M_d - M_l = 2.500 - 2.029,7 = 470,3 \text{ kNm}$$

$$U_{s2} = 470,3 \cdot 1.000 / 690 = 681,6 \text{ kN}$$

$$A' = 681,6 / 434,8 \cdot 1.000 = \mathbf{1.567 \text{ mm}^2} \rightarrow 4\text{Ø}25$$

$$U_{sl} = 3.438,0 + 681,6 = 4.119,6 \text{ kN}$$

$$A = 4.119,6 / 434,8 \cdot 1.000 = \mathbf{9.475 \text{ mm}^2} \rightarrow 20\text{Ø}25$$

Soluciones con diagrama rectangular

Los valores de las deformaciones últimas del hormigón para el C60 (tabla 3.1 de EN 1992-1-1) son:

$$\epsilon_{c3} = 0,0019 \text{ (esta deformación no se utiliza)}$$

$$\epsilon_{cu3} = 0,0029$$

Los parámetros aplicados al diagrama rectangular, al ser la resistencia del hormigón superior a 50 N/mm^2 , son:

$$\lambda = 1 - (60 - 50) / 200 = 0,95$$

$$\lambda = 0,8 - (60 - 50) / 400 = 0,775$$

Con objeto de limitar la extensión del ejemplo y debido a que no existen para este diagrama diferencias conceptuales entre el dimensionamiento para 600 kNm, 1.100 kNm y 1.900 kNm, solo se expone este último caso, indicando para los primeros solamente los resultados.

$M_d = 1.900 \text{ kNm}$

Se estima, igual que antes, que va a ser necesaria una armadura de 14Ø25, con lo que el recubrimiento teórico y el canto útil son:

$$r = (4 \cdot 55 + 4 \cdot 105 + 4 \cdot 155 + 2 \cdot 205) / 14 = 119 \text{ mm}$$

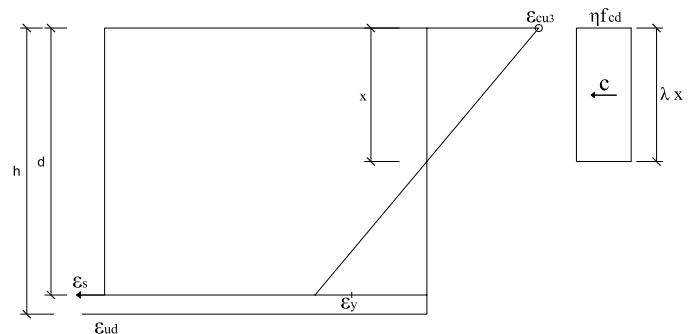
$$d = 900 - 119 = 781 \text{ mm}$$

Se tiene:

$$C = \eta f_{cd} b \lambda x$$

$$z = d - \lambda x / 2$$

$$M_d = C z$$



Con:

$$a = \eta f_{cd} b \lambda$$

se tiene la ecuación de segundo grado:

$$a \lambda / 2 x^2 - a d x + M_d = 0$$

cuya solución es:

$$x = d / \lambda - [(d / \lambda)^2 - 2 M_d / (a \lambda)]^{1/2}$$

En nuestro caso, transformando M_d a Nmm:

$$a = 0,95 \cdot 40 \cdot 300 \cdot 0,775 = 8.835 \text{ N/mm}$$

$$d / \lambda = 781 / 0,775 = 1.007,7 \text{ mm}$$

$$x = 1.007,7 - [1.007,7^2 - 2 \cdot 1.900 \cdot 10^6 / (8.835 \cdot 0,775)]^{1/2} = 329,1 \text{ mm}$$

$$U_{sl} = C = a x = 8.835 \cdot 329,1 = 2.907.524 \text{ N}$$

$$A = 2.907.524 / 434,8 = \mathbf{6.687 \text{ mm}^2} \rightarrow 14\text{Ø}25$$

El cálculo con los valores inferiores es idéntico:

Para $M_d = 600$ kNm: $d = 845$ mm
 $A = 1.698 \text{ mm}^2 \rightarrow 4\varnothing 25$

Para $M_d = 1.100$ kNm: $d = 820$ mm
 $A = 3.346 \text{ mm}^2 \rightarrow 8\varnothing 25$

$M_d = 2.500$ kNm:

Se estima, igual que antes, que va a ser necesaria una armadura de tracción de $20\varnothing 25$, con lo que el recubrimiento teórico y el canto útil son:

$$r = 55 + 2 \cdot 50 = 155 \text{ mm}$$

$$d = 900 - 155 = 745 \text{ mm}$$

En este caso no se recorre un dominio de deformaciones, sino que se mantienen constantes las deformaciones ε_{cu3} del hormigón y ε_y de la armadura traccionada. La profundidad límite x_l de la fibra neutra y el momento correspondiente (momento límite) son:

$$\varepsilon_y = 434,8 / 200.000 = 0,00217$$

$$x_l = 745 \cdot 0,0029 / (0,0029 + 0,00217) = 425,8 \text{ mm}$$

$$y = 0,775 \cdot 425,8 = 345,9 \text{ mm}$$

$$C = U_{s1} = 1/2 \cdot 0,95 \cdot 40 \cdot 300 \cdot 345,9 / 1.000 = 3.762,0 \text{ kN}$$

$$M_l = 3.762,0 (745 - 345,9/2) / 1.000 = 2.182,0 \text{ kNm}$$

Al ser inferior este momento al de cálculo, aunque se podría aumentar la armadura de tracción y hacerla trabajar a deformaciones inferiores a ε_y , esto no sería económico, por lo que es preferible absorber la diferencia $M_d - M_l$ con una armadura de compresión, cuya capacidad mecánica se debe sumar también al U_{s1} anterior. Se tiene así, para una armadura de compresión con el recubrimiento teórico $d' = 55$ mm:

$$d - d' = 745 - 55 = 690 \text{ mm}$$

$$M_d - M_l = 2.500 - 2.182,0 = 318,0 \text{ kNm}$$

$$U_{s2} = 318,0 \cdot 1.000 / 690 = 460,9 \text{ kN}$$

$$A' = 460,9 / 434,8 \cdot 1.000 = 1.060 \text{ mm}^2 \rightarrow 3\varnothing 25$$

$$U_{s1} = 3.762,0 + 460,0 = 4.222,0 \text{ kN}$$

$$A = 4.222,0 / 434,8 \cdot 1.000 = 9.710 \text{ mm}^2 \rightarrow 20\varnothing 25$$

Soluciones con brazo mecánico 0,9d

Md	d	z	As
600	845	761	1.815
1.100	820	738	3.428
1.900	781	703	6.217
2.500	745	671	8.575

Resumen de resultados de armadura (mm²):

Md	d	Diagrama		
		Para.-Rect.	Bilineal	Rectangular
600	845	1.721	1.721	1.698
1.100	820	3.369	3.353	3.346
1.900	781	6.739	6.729	6.687
2.500	745	9.536	9.473	9.567
2.500	A compres.	1.369	1.570	1.060

Se ve que la coincidencia entre las tres leyes de tensiones es muy buena, por lo que en un cálculo manual lo más recomendable es utilizar la ley rectangular.

Se observa, además, que en los dos últimos casos se subestima la armadura necesaria considerando $z = 0,9d$, para 1.900 kNm, porque se trata de un momento próximo al momento límite y para 2.500 kNm porque se trata de un momento superior al momento límite. En estos casos, se obtiene una mejor aproximación utilizando un brazo mecánico de $0,75d$ para el predimensionamiento.