

## Observadores Distribuidos Garantistas para Sistemas en Red

Ramón A. García<sup>a,\*</sup>, Francisco R. Rubio<sup>a</sup>, Luis Orihuela<sup>b</sup>, Pablo Millán<sup>b</sup>, Manuel G. Ortega<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Sevilla, Sevilla, España

<sup>b</sup>Departamento de Ingeniería, Universidad Loyola Andalucía, Sevilla, España

### Resumen

En este artículo se propone un observador distribuido garantista para sistemas en red, considerando de forma explícita el problema de los retardos variables en las comunicaciones. Se asume que la información intercambiada entre agentes llega siempre a su destino, si bien las comunicaciones están sujetas a retardos variables, cuyo valor máximo se supone conocido. Cada observador trabaja con información parcial, y necesita comunicarse con observadores vecinos para llevar a cabo una estimación del estado completo del sistema. Para representar a los conjuntos garantistas, cuya función es acotar en tiempo real la región en la que se encuentra el estado del sistema, se ha optado por la utilización de zonotopos. Esto permite integrar de forma sencilla la información recibida por cada agente. Finalmente se presentan resultados de simulación para validar el algoritmo propuesto.

### Palabras Clave:

Estimación Distribuida, Observadores de Estado, Sistemas con Retardos, Sistemas en red, Zonotopos.

### 1. Introducción

En control automático existen muchas técnicas que se basan en la descripción interna del sistema a controlar, es decir, en el conocimiento del estado del sistema. Es bien conocido que en la práctica en la mayoría de los casos no se dispone de dicha información, por lo que es necesario recurrir a estimadores de estados de la planta o proceso. Por otro lado en plantas de gran tamaño, que cuentan con un gran número de variables de estado, la información está típicamente distribuida.

En ese sentido, el término estimación distribuida hace referencia a dos conceptos. El primero, la estimación del estado de la planta no se lleva a cabo por un único observador, sino que se realiza por un conjunto de observadores denominados agentes. El segundo es que, además, dichos agentes colaboran para poder cumplir su objetivo, transmitiendo de forma periódica información a través de una red de comunicación, (Rubio et al., 2014). También hay enfoques que consideran comunicaciones asíncronas, como en (Weimer et al., 2012), (Guinaldo et al., 2016) y (García et al., 2015), donde los agentes determinan en función a ciertos eventos si comunican su información o no.

Es posible encontrar en la literatura un gran número de publicaciones sobre este tema. Por ejemplo, existen multitud de

trabajos basados en versiones distribuidas del Filtro de Kalman (Roshany-Yamchi et al., 2013), (Feng et al., 2013), (Mahmoud and Khalid, 2013), incluso en ocasiones combinado con otras técnicas, (He et al., 2016), (Wu et al., 2016). Otros enfoques posibles son los trabajos basados en adaptaciones del observador de Luenberger donde se usan técnicas de consenso (Millán et al., 2012b), teoría  $H_\infty$  (Orihuela et al., 2013), (Zhang et al., 2016), o con horizonte deslizante (Farina et al., 2010), (Li et al., 2014), entre otros.

Por su parte el término garantista indica que se utilizará un enfoque que, basado en el conocimiento de los límites que pueden alcanzar las distintas perturbaciones, incertidumbres y ruidos que actúan sobre el sistema, resulta en una clase de estimadores que obtienen dinámicamente conjuntos que incluyen en todo instante el estado actual del sistema. Las técnicas garantistas o de pertenencia a conjunto no usan asunciones probabilísticas para las perturbaciones o ruidos, sino que se basan en que dichas señales pueden tomar cualquier valor dentro de un conjunto acotado y conocido. Esos conjuntos pueden tener diferentes representaciones: intervalos o cajas (Bars et al., 2012), elipses o elipsoides (Zhou et al., 2013), politopos (García et al., 2015), etc. Dentro del último tipo se encuentran los zonotopos, que son politopos convexos y simétricos respecto a su centro.

Los sistemas en red, ya sean sistemas multi-agentes o plantas de grandes dimensiones, incorporan una red por la que se realiza una comunicación de los datos en lugar de un procesamiento centralizado de los mismos. Aplicaciones típicas pue-

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: ramongr@us.es (Ramón A. García), rubio@us.es (Francisco R. Rubio), dorihuela@uloyola.es (Luis Orihuela), pmillan@uloyola.es (Pablo Millán), mortega@us.es (Manuel G. Ortega)

den ser redes de sensores (Iyengar and Brooks, 2016), flota de vehículos o robots (Briñón Arranz et al., 2009) o monitoreo de procesos (Millán et al., 2012a), entre otros.

En este tipo de sistemas, los retardos son inevitables y tienen un impacto importante en los algoritmos de control y estimación, pudiendo llegar a la desestabilización de los mismos, (Fridman, 2014). En (Richard, 2003) se hace una profunda revisión sobre los avances y los problemas abiertos en los sistemas con retardos.

En este trabajo se presenta un método garantista de estimación distribuida para sistemas en red. Debido a la necesidad de intercambiar información en el proceso de comunicación se consideran los retardos causados por la red de comunicaciones. Se propone un algoritmo que asegura que los estados de la planta siempre están contenidos en los zonotopos obtenidos por cada agente a pesar de la presencia de los retardos en las comunicaciones.

El algoritmo desarrollado, que se implementa en cada agente, es capaz de integrar la información local con aquella transmitida por agentes (observadores) vecinos, calculando continuamente el conjunto factible que acota la zona en la que se encuentra el estado de la planta. Dicho conjunto factible vendrá delimitado por zonotopos.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera. La Sección 2 presenta la notación, algunos conceptos y definiciones sobre zonotopos y cálculo matricial. El problema bajo consideración, así como los objetivos perseguidos son detallados en la Sección 3. El observador distribuido sin retardos se presenta en la Sección 4. El observador distribuido propuesto con retardos se presenta en la Sección 5. Simulaciones ilustrativas sobre el rendimiento del algoritmo se muestran en la Sección 6. Finalmente, las conclusiones se resumen en la Sección 7.

## 2. Notación y preliminares

Sea  $R \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Entonces,  $\|R\|_F = \sqrt{\text{tr}(R^T R)}$  es la norma Frobenius de  $R$ . La norma Frobenius de un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  es igual a la norma Euclídea definida como  $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ .

Una caja, o *box* en inglés, es un vector compuesto por intervalos que acotan una región. Por ejemplo en una representación en  $\mathbb{R}^2$  una caja representa un rectángulo. La anchura de un intervalo  $[a, b]$  se denota como  $b - a$ .

Un zonotopo, representado por la letra caligráfica  $\mathcal{X}$ , es definido por su centro  $c \in \mathbb{R}^n$  y su matriz de vectores generadores  $H \in \mathbb{R}^{n \times b}$ :

$$\mathcal{X} = \langle c, H \rangle = \left\{ c + \sum_{i=1}^b s_i h_i : |s_i| \leq 1 \right\},$$

siendo  $h_i \in \mathbb{R}^n$  la  $i$ -ésima columna de  $H$ . Nótese que si la matriz  $H$  fuese diagonal, lo que se tendría sería una caja, ya que tendría un conjunto de intervalos, cada elemento del vector denotaría el centro y el elemento de  $H$  la mitad de la anchura. Cualquier permutación de las columnas de  $H$  deja invariante al zonotopo. El orden del zonotopo viene dado por el número de vectores generadores, esto es,  $b$ .

El  $F$ -radio del zonotopo  $\mathcal{X} = \langle c, H \rangle$  es la norma de Frobenius de  $H$ , es decir,  $\|\mathcal{X}\|_F = \|H\|_F$ . La covariación de un zonotopo  $\mathcal{X} = \langle c, H \rangle$  es  $P_{\mathcal{X}} = HH^T$ .

Sean  $\mathcal{X} = \langle c_x, H_x \rangle$  e  $\mathcal{Y} = \langle c_y, H_y \rangle$  dos zonotopos y  $R$  una matriz de dimensiones apropiadas, se definen las siguientes operaciones:

$$R\mathcal{X} = \langle Rc_x, RH_x \rangle \tag{1}$$

$$\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} = \langle c_x + c_y, [H_x \ H_y] \rangle \tag{2}$$

Considérense los vectores  $x \in \mathcal{X}$ ,  $w \in \mathcal{W}$  y la matriz  $A$ . Entonces, si se define el vector  $y \triangleq Ax + w$ , según las operaciones vistas se tiene que  $y \in A\mathcal{X} \oplus \mathcal{W}$ .

El operador  $\text{red}_q(\mathcal{X})$  o  $\text{red}_q(\langle c, H \rangle)$  es una reducción de orden del zonotopo  $\mathcal{X}$ , de tal manera que  $\mathcal{X} \subseteq \text{red}_q(\mathcal{X})$ . El orden de  $\text{red}_q(\mathcal{X})$  es  $q$ , por tanto lo que se reduce es el orden de la matriz generadora, es decir, el número de vectores necesarios para describir el zonotopo y no el tamaño del zonotopo. Esta operación está definida como en (Combastel, 2015), primero consiste en ordenar las columnas de  $H$  en orden decreciente según la norma del vector,

$$H = [ h_1 \ \dots \ h_j \ \dots \ h_b ], \quad \|h_j\|^2 \geq \|h_{j+1}\|^2,$$

y encerrando el conjunto  $H_{<}$  generado por las  $b - q + n$  menores columnas en una caja:

$$\text{red}_q(\langle c, H \rangle) = \begin{cases} \langle c, H \rangle, & b \leq q, \\ \langle c, [H_{>} \ \text{box}(H_{<})] \rangle, & b > q, \end{cases}$$

donde

$$H_{>} = [ h_1 \ \dots \ h_{q-n} ],$$

$$H_{<} = [ h_{q-n+1} \ \dots \ h_b ],$$

y  $\text{box}(H) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se calcula como

$$\text{box}(H) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^b |h_{1j}| & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{j=1}^b |h_{nj}| \end{bmatrix}.$$

La operación de reducir el orden de un zonotopo se hace necesaria para poder abordar el problema desde un punto de vista computacional. Como puede observarse en (2), la suma de dos zonotopos tiene como resultado otro, cuya matriz de vectores generadores concatena aquellas de los zonotopos sumados. Con la operación de reducción se persigue hacer posible la suma sucesiva de estos conjuntos, evitando una explosión en el número de vectores generadores mediante el compromiso entre la precisión en la descripción de los zonotopos y la cantidad de información necesaria para describirlos.

El operador  $\text{Vol}(\mathcal{X})$  corresponde al volumen del zonotopo  $\mathcal{X}$ . En este trabajo se calculará con una aproximación basada en la descomposición en valores singulares (*SVD*) de la matriz generadora del zonotopo (Caro, 2004). Para un cálculo más exacto del volumen consultar (Le et al., 2013). La descomposición *SVD* de  $H \in \mathbb{R}^{n \times b}$ , viene dada por:

$$H = USV'$$

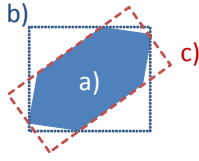


Figura 1: Ejemplo de zonotopo, a), caja, b) y caja obtenida de la descomposición SVD, c)

donde  $U \in \mathbb{R}^{n \times b}$  con columnas ortogonales,  $S \in \mathbb{R}^{b \times b}$  es una matriz diagonal y  $V \in \mathbb{R}^{b \times b}$  una matriz ortogonal.

Con todo esto, el resultado obtenido de la aproximación es:

$$Vol(X) = 2^n \det [box(SV')] ]$$

En la Figura 1 se muestra un zonotopo,  $X$ , su acotación mediante una caja,  $box(X)$  y la obtenida por otra caja pero a través de la descomposición SVD,  $Ubox(SV')$ . Como puede observarse gracias a la descomposición SVD se orienta la caja en los ejes mayores del zonotopo.

Las operaciones de intersección entre zonotopos se pueden encontrar en (Le et al., 2013) y (Alamo et al., 2005).

Los agentes se comunican a través de una red cuya topología se define por un grafo  $G = (V, E)$ . El grafo  $G$  se asume conectado y dirigido, con vértices  $V = \{1, 2, \dots, p\}$  y enlaces  $E \subset V \times V$ , debiendo existir un camino entre cualesquiera dos nodos de la red. El conjunto de vértices conectados con el vértice  $i$  se nombra *la vecindad de  $i$*  y se denota por  $N_i \equiv \{j : (i, j) \in E\}$ .

El ancho de banda disponible se supone limitado, así que la cantidad de información que un agente puede comunicar en cada instante de muestreo necesariamente está acotada y es otro de los motivos por el que se realiza la reducción de orden. Dicha información se cuantifica como el número de escalares que se envían. Sea  $a \in \mathbb{R}$  un escalar, el tamaño del paquete para enviarlo será  $PE(a) = 1$ . Entonces, para transmitir un zonotopo  $X = \langle c, H \rangle$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  y  $H \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , se necesita un paquete de tamaño  $PE(X) = n(p + 1)$ .

Tabla 1: Resumen de los símbolos más utilizados

Símbolo	Significado
$x, \hat{X}_i$	estado y conjunto/zonotopo para el estado del agente $i$
$c_i, H_i$	centro y matriz generadora del conjunto/zonotopo factible del agente $i$
$w, \mathcal{W}$	perturbaciones y conjunto factible para las perturbaciones
$y_i, S_i$	salida medida por el agente $i$ y franja de estados factible para la medida $y_i$
$v_i, \mathcal{V}_i$	ruido en la medida del agente $i$ y conjunto factible para los ruidos
$\tau_i, \bar{\tau}_i$	retardo instantáneo y retardo máximo en la comunicación del agente $i$

### 3. Descripción del problema e hipótesis de partida

Se considera un sistema lineal afectado por perturbaciones externas con la siguiente dinámica:

$$\Sigma : x(k + 1) = Ax(k) + w(k) \quad (3)$$

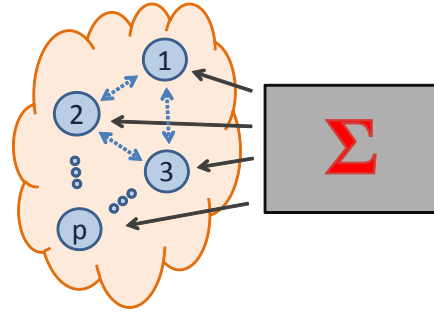


Figura 2: Conjunto de agentes observando el estado de la planta  $\Sigma$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado de la planta,  $A$  es una matriz conocida de dimensiones adecuadas, y  $w \in \mathbb{R}^n$  caracteriza la influencia de perturbaciones externas o de dinámicas no modeladas.

La Figura 2 ilustra el problema considerado. Un grupo de  $p$  agentes son desplegados en una región con el objetivo de estimar los estados de la planta. Cada agente tiene una medida local dada por:

$$y_i(k) = C_i x(k) + v_i(k), \quad (4)$$

donde  $y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  es la salida,  $C_i$  es la matriz de salida y  $v_i$  representa el ruido de salida.

Se consideran las siguientes suposiciones:

- **Observabilidad/detectabilidad:** No se asume observabilidad local, tal y como se define en (Olfati-Saber, 2007), es decir, los pares  $(A, C_i)$  no son observables. Lo anterior implicaría que podrían diseñarse observadores centralizados en cada uno de los agentes para resolver el problema de la estimación. Sin embargo, una suposición necesaria para el método planteado es la hipótesis de *observabilidad colectiva*, esto implica que si todas las salidas medidas fuesen accesibles por un observador centralizado, esta información sería suficiente para estimar el estado completo de la planta. En otras palabras,  $(A, C)$  es detectable, con  $C = [C_1^T \ C_2^T \ \dots \ C_p^T]^T$ .

- **Señales exógenas:** Las perturbaciones y los ruidos que afectan a la dinámica se asumen acotados. Desde un punto de vista matemático, este hecho implica que dichas señales pertenecerán a un conjunto acotado dado,  $w(k) \in \mathcal{W}$  y  $v_i(k) \in \mathcal{V}_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, p$ . Sin pérdida de generalidad estos conjuntos se definen como zonotopos centrados:

$$\mathcal{W} = \langle 0, Q \rangle \quad \mathcal{V}_i = \langle 0, R_i \rangle \quad (5)$$

donde  $Q$  y  $R_i$  son matrices definidas positivas de dimensiones adecuadas.

El objetivo de este artículo es proponer un observador distribuido que estime el estado de la planta a partir de la información que reciben de un conjunto de agentes. Cada uno de estos agentes representan un sistema físico embebido, que recibe información de la planta y se comunica con otros agentes para conseguir los objetivos de estimación.

El objetivo principal para los agentes es calcular en cada instante de muestreo zonotopos que contengan el estado real de

la planta. Se define un zonotopo de estimación y de predicción para cada agente:

$$\begin{aligned} \text{Estimación : } \hat{X}_i(k|k) &= \langle c_i(k), H_i(k) \rangle \\ \text{Predicción : } \hat{X}_i(k+1|k) &= \langle c_i(k+1), H_i(k+1) \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

Los objetivos que se persiguen son dos, que el estado actual permanezca dentro de las estimaciones y que el estado siguiente permanezca dentro de las predicciones, es decir:

1.  $x(k) \in \hat{X}_i(k|k), \forall k, i$
2.  $x(k+1) \in \hat{X}_i(k+1|k), \forall k, i$

#### 4. Estimador distribuido garantista sin retardos

En primer lugar se planteará el problema sin retardos. El algoritmo que describe el estimador distribuido sin retardos mostrado en la Tabla 2, es una adaptación del propuesto en (Alamo et al., 2005) para sistemas no lineales con un agente, mientras que aquí se tienen sistemas lineales y estimación distribuida. El algoritmo se divide en cuatro pasos: medición, comunicación, estimación y predicción.

Cada agente realiza una medida,  $y_i(k)$ , calcula el conjunto de estados consistentes con dicha medida, dado por una franja  $S_i(k)$  (Alamo et al., 2005), e intersecciona con la predicción del instante anterior. Con esto se consigue corregir la predicción anterior con la medida actual.

En el paso de comunicación se envía a los vecinos el conjunto obtenido en el paso anterior, pero con el orden acotado mediante la operación de reducción de orden  $red_q(\mathcal{Z}_{I_i}(k))$ .

Cuando los agentes han recibido la información de sus vecinos, calculan el conjunto de estimación de ese instante de muestreo,  $\hat{X}_i(k|k)$ . El estimador propuesto calcula el zonotopo de estimación en el instante  $k$  interseccionando los zonotopos de predicción recibidos de los agentes vecinos:

$$\begin{aligned} \hat{X}_i(k|k) &\triangleq red_q I_i(k) \\ I_i(k) &\triangleq \mathcal{Z}_i(k) \cap_{j \in N_i} \mathcal{Z}_j(k), \end{aligned} \quad (7)$$

donde el operador de reducción de orden es necesario para mantener acotado el orden del zonotopo, y por tanto también la cantidad de información necesaria para describirlos (vectores generadores). Indicar además que cuanto más conectado esté un agente, más intersecciones se harán a través de (7), y más acotado puede estar el zonotopo de estimación, ya que puede contener más vectores que describan de forma más precisa la región del espacio.

Finalmente se calcula la predicción para el siguiente instante de muestreo evolucionando el conjunto de estimación y añadiendo el de perturbaciones,  $\mathcal{W}$ , de acuerdo al modelo dinámico del sistema.

El algoritmo propuesto asegura la estimación garantista del estado de la planta para todos los agentes en cada instante de muestreo, tal como se muestra a continuación.

**Teorema 1.** Suponiendo que en el instante  $k_0$  el estado del sistema pertenece a cada zonotopo de predicción, esto es,

$$x(k_0) \in \hat{X}_i(k_0|k_0 - 1), \quad \forall i,$$

Tabla 2: Algoritmo del estimador garantista distribuido sin retardos

0) Zonotopo inicial	$\hat{X}_i(k k - 1)$
1) Medida	$y_i(k)$
1.1) Franja	$S_i(k)$
1.2) Intersección	$\mathcal{Z}_{I_i}(k) = \hat{X}_i(k k - 1) \cap S_i(k)$
1.3) Reducción de orden	$\mathcal{Z}_i(k) = red_q(\mathcal{Z}_{I_i}(k))$
2) Comunicación	
2.1) Envío	$\mathcal{Z}_i(k)$ , a todo $j : i \in N_j$
2.2) Recepción	$\mathcal{Z}_j(k)$ , $\forall j \in N_i$
3) Estimación	
3.1) Intersección	$I_i(k) = \mathcal{Z}_i(k) \cap_{j \in N_i} \mathcal{Z}_j(k)$
3.2) Reduc. orden	$\hat{X}_i(k k) = red_q(I_i(k))$
4) Predicción	$\hat{X}_i(k+1 k) = A\hat{X}_i(k k) \oplus \mathcal{W}$

entonces, aplicando el algoritmo de estimación distribuida detallado en la Tabla 2, se satisface que

$$x(k) \in \hat{X}_i(k|k), \quad x(k+1) \in \hat{X}_i(k+1|k), \quad \forall k \geq k_0, \quad \forall i.$$

**Prueba:** La prueba demostrará que, si un estado dado  $x(k)$  pertenece a los zonotopos de predicción  $\hat{X}_i(k|k - 1)$ , entonces  $x(k)$  será contenido en los zonotopos de estimación  $\hat{X}_i(k|k)$  y  $x(k+1)$  en los zonotopos de predicción  $\hat{X}_i(k+1|k)$ , para todos los agentes. Por tanto, como se supone que  $x(k_0)$  pertenece a  $\hat{X}_i(k_0|k_0 - 1)$ , el resultado se prueba por inducción.

En primer lugar, se tiene que  $x(k) \in \hat{X}_i(k|k - 1)$ ,  $\forall i$ , en un instante  $k$ . Además,  $x(k) \in S_i(k)$  ya que  $S_i(k)$  es la franja de estados consistentes con la medida  $y_i(k)$ . Por consiguiente,

$$\left. \begin{aligned} x(k) \in \hat{X}_i(k|k - 1) \\ x(k) \in S_i(k) \end{aligned} \right\} \rightarrow x(k) \in \mathcal{Z}_{I_i}(k)$$

Ahora, el operador de reducción de orden verifica que  $\mathcal{Z}_i(k) \subseteq red_q(\mathcal{Z}_{I_i}(k))$ , así que  $x(k) \in \mathcal{Z}_i(k)$ ). Finalmente,

$$\left. \begin{aligned} x(k) \in \mathcal{Z}_i(k) \\ x(k) \in \mathcal{Z}_j(k), j \in N_i \end{aligned} \right\} \rightarrow x(k) \in I_i(k).$$

Como  $\hat{X}_i(k|k)$  se obtiene de la intersección de diferentes  $\mathcal{Z}_j(k)$ , se tiene que  $x(k) \in \hat{X}_i(k|k)$ .

Nos centramos ahora en el paso de predicción. Primeramente, el estado del sistema en  $k+1$  viene dado por

$$x(k+1) = Ax(k) + w(k).$$

Usando propiedades estándar de zonotosos vistas en la Sección 2, y teniendo que  $x(k) \in \hat{\mathcal{X}}_i(k|k)$ , se infiere que  $Ax(k) \in A\hat{\mathcal{X}}_i(k|k)$ . Las perturbaciones en el instante  $k$  pertenecen a  $\mathcal{W}$ . Por tanto,  $x(k+1) \in A\hat{\mathcal{X}}_i(k|k) \oplus \mathcal{W}$ , tal como se ha definido en el algoritmo  $\hat{\mathcal{X}}_i(k+1|k)$ . Entonces,  $x(k+1) \in \hat{\mathcal{X}}_i(k+1|k)$ , y así concluye la prueba.  $\square$

El algoritmo detallado en la Tabla 2 asegura estimación garantista solo si las perturbaciones y ruidos permanecen en los límites establecidos. De lo contrario, la franja y el zonotopo de predicción pueden no interseccionar.

## 5. Estimador distribuido garantista con retardos

Esta sección mostrará la principal contribución realizada en este trabajo: el algoritmo de estimación distribuida que, a pesar de que la información que se recibe de otros agentes tiene un retardo variable pero acotado, sigue generando conjuntos garantistas no divergentes.

Ahora la información de los vecinos a través de los zonotosos  $\mathcal{Z}_j(k)$  puede llegar con retardo y eso puede complicar la estimación. Por tanto, se recibe  $\mathcal{Z}_j(k - \tau_j(k))$ , siendo  $\tau_j(k)$  el retardo en la comunicación del agente  $j$  con todos sus vecinos. Nótese que todos los paquetes que envía el agente  $j$  en el instante  $k$  sufren el mismo retardo<sup>1</sup>. Dicho retardo es variable y acotado por  $\bar{\tau}_j$ . Se asume una sincronización entre los agentes que permite que, recibiendo una marca temporal, se pueda conocer el retardo de un paquete recién recibido,  $k - \tau_j(k)$ .

El algoritmo que describe el estimador distribuido con retardos puede observarse en la Tabla 3. El algoritmo ejecuta los mismos cuatro pasos, pero ahora la fase de comunicación es diferente siendo más extensa que en el caso anterior. En esta ocasión se utiliza un nuevo conjunto  $\mathcal{D}$  basado en la evolución de la última información recibida y la medición del agente que recibe.

Cada agente realiza una medida,  $y_i(k)$ , y almacena un número de salidas igual a:  $\max(\bar{\tau}_j)$ ,  $\forall j \in N_i$ , el máximo retardo posible de sus vecinos. Por este motivo es necesario conocer la cota máxima del retardo.

Cuando los agentes han recibido la información de sus vecinos, que puede haberse transmitido hace varios instantes de tiempo, calculan el conjunto de estimación de ese instante de muestreo  $\hat{\mathcal{X}}_i(k|k)$  con los conjuntos calculados a partir de la información recibida. Dichos conjuntos,  $\tilde{\mathcal{Z}}_i(k)$ , se definirán un poco más adelante.

El estimador propuesto calcula el zonotopo de estimación en el instante  $k$  interseccionando los conjuntos calculados a partir de los zonotosos de predicción recibidos de los nodos vecinos,  $\tilde{\mathcal{Z}}_j(k)$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{X}}_i(k|k) &\triangleq \text{red}_q \mathcal{I}_i(k) \\ \mathcal{I}_i(k) &\triangleq \mathcal{Z}_i(k) \cap_{j \in N_i} \tilde{\mathcal{Z}}_j(k), \end{aligned} \quad (8)$$

<sup>1</sup>La extensión para el caso en el que el retardo sea diferente para cada vecino sería trivial, pues sería necesario conocer el retardo individual de cada enlace. Esto no es un problema pues los paquetes llevan su marca temporal y el algoritmo sigue siendo válido.

donde, al igual que en el caso sin retardos, la reducción de orden es necesaria para mantener acotado el orden del zonotopo, y por tanto la cantidad de información necesaria para describirlos (vectores generadores). Indicar además que cuanto más conectado esté un agente, más intersecciones se harían a través de (8), y más estrecho puede ser el zonotopo de estimación, ya que puede contener más vectores que describan de forma más precisa la región del espacio.

En esta nueva situación con posibles retardos, el agente  $i$ -ésimo recibe  $\mathcal{Z}_j(k - \tau_j(k))$ , pero él usa  $\tilde{\mathcal{Z}}_j(k)$  para estimar el estado.

- Si  $\tau_j(k) = 0$ : la información llega a tiempo, y por tanto se usa directamente la información recibida

$$\tilde{\mathcal{Z}}_j(k) = \mathcal{Z}_j(k). \quad (9)$$

- Si  $\tau_j(k) > 0$ : la información ha llegado con retardo, se tiene un conjunto que acota lo que ha pasado durante esa ausencia de información

$$\tilde{\mathcal{Z}}_j(k) = f(\mathcal{Z}_j(k - \tau_j(k)), S_i(k - \tau_j(k)), \dots, S_i(k - 1), \mathcal{W}). \quad (10)$$

En (10) se muestra que  $\tilde{\mathcal{Z}}_j(k)$  depende de la información recibida, las medidas almacenadas y las perturbaciones. Se define el conjunto  $\mathcal{D}$  como el conjunto resultante de las operaciones realizadas con la información recibida con retardo, la información medida en los instantes anteriores y las perturbaciones.

Dicho conjunto,  $\mathcal{D}$ , se irá calculando interseccionando el conjunto recibido de los vecinos con las distintas medidas almacenadas y añadiendo las perturbaciones. Para calcularse de forma iterativa, se añadirán los subíndices  $t, i, j$  para clarificar el proceso. Con esto,  $\mathcal{D}_{t,ij}$  representa los conjuntos transitorios en la iteración  $t$  entre los agentes  $i$  y  $j$ , hasta que llegue el instante  $k$ , es decir que  $t$  será el índice que marca como la información va evolucionando desde  $k - \tau_j(k)$  hasta  $k$ .  $\tilde{\mathcal{Z}}_j(k)$  se calcula como sigue.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0,ij} &= \mathcal{Z}_j(k - \tau_j(k)) \cap S_i(k - \tau_j(k)) \oplus \mathcal{W} \\ \text{para } t &= 1 \dots \tau_j(k) \\ \mathcal{D}_{t,ij} &= A\mathcal{D}_{t-1,ij} \cap S_i(k - \tau_j(k) + t) \oplus \mathcal{W} \\ \tilde{\mathcal{Z}}_j(k) &= \mathcal{D}_{\tau_j(k),ij} \end{aligned} \quad (11)$$

El algoritmo propuesto también asegura la estimación garantista del estado de la planta para todos los agentes en cada instante de muestreo.

**Teorema 2.** Suponiendo que en el instante  $k_0$  el estado del sistema pertenece a cada uno de los zonotosos de predicción y ha pertenecido a ellos también en los instantes anteriores, esto es,

$$x(k_0 - l) \in \hat{\mathcal{X}}_i(k_0 - l|k_0 - l - 1), \quad \forall i, \forall l = 0 \dots \tau_i(k)$$

entonces, con el bucle de estimación detallado en la Tabla 3, se satisface que

$$x(k) \in \hat{\mathcal{X}}_i(k|k), \quad x(k+1) \in \hat{\mathcal{X}}_i(k+1|k), \quad \forall k \geq k_0, \quad \forall i.$$



Tabla 3: Algoritmo de estimador garantista distribuido con retardos

0) Zonotopo inicial	$\hat{X}_i(k k-1)$
1) Medida	$y_i(k)$
1.1) Franja	$S_i(k)$
1.2) Intersección	$\mathcal{Z}_{I_i}(k) = \hat{X}_i(k k-1) \cap S_i(k)$
1.3) Reducción orden	$\mathcal{Z}_i(k) = \text{red}_q(\mathcal{Z}_{I_i}(k))$
2) Comunicación	
2.1) Envío	$\mathcal{Z}_i(k)$ , a todo $j : i \in N_j$
2.2) Recepción	$\mathcal{Z}_j(k - \tau_j(k))$ , $\forall j \in N_i$
2.3) Cálculo	$\tilde{\mathcal{Z}}_j(k)$
2.3.1) si $\tau_j(k) = 0$	$\tilde{\mathcal{Z}}_j(k) = \mathcal{Z}_j(k)$
2.3.2) si $\tau_j(k) > 0$	$\tilde{\mathcal{Z}}_j(k) = f(\mathcal{Z}_j(k - \tau_j(k)), S_i(k - \tau_j(k)), \dots, S_i(k - 1), \mathcal{W})$ $\mathcal{D}_{0,ij} = \mathcal{Z}_j(k - \tau_j(k)) \cap S_i(k - \tau_j(k)) \oplus \mathcal{W}$ $t = 1 \dots \tau_j(k) \rightarrow \mathcal{D}_{t,ij} = A\mathcal{D}_{t-1,ij} \cap S_i(k - \tau_j(k) + t) \oplus \mathcal{W}$ $\tilde{\mathcal{Z}}_j(k) = \mathcal{D}_{\tau_j(k),ij}$
3) Estimación	
3.1) Intersección	$\mathcal{I}_i(k) = \mathcal{Z}_i(k) \cap_{j \in N_i} \tilde{\mathcal{Z}}_j(k)$
3.2) Reduc. orden	$\hat{X}_i(k k) = \text{red}_q(\mathcal{I}_i(k))$
4) Predicción	$\hat{X}_i(k+1 k) = A\hat{X}_i(k k) \oplus \mathcal{W}$

**Prueba:** La prueba demostrará que, si el estado  $x(k)$  pertenece a los zonotopos de predicción  $\hat{X}_i(k|k-1)$  y  $\hat{X}_i(k - \tau_i(k)|k - \tau_i(k) - 1)$ , entonces  $x(k)$  estará dentro de los zonotopos de estimación  $\hat{X}_i(k|k)$  y  $x(k+1)$  en los zonotopos de predicción  $\hat{X}_i(k+1|k)$ , para cada agente. Por consiguiente, como  $x(k_0)$  se asume que pertenece a  $\hat{X}_i(k_0|k_0 - 1)$  y  $\hat{X}_i(k_0 - \tau_i(k)|k_0 - \tau_i(k) - 1)$ , el resultado se prueba por inducción.

Primero, se asume que  $x(k) \in \hat{X}_i(k|k-1)$ ,  $\forall i$ , en un  $k$  dado. Además,  $x(k) \in S_i(k)$  ya que  $S_i(k)$  es la franja de todos los estados consistentes con la medida  $y_i(k)$ . Por lo que,

$$\left. \begin{array}{l} x(k) \in \hat{X}_i(k|k-1) \\ x(k) \in S_i(k) \end{array} \right\} \rightarrow x(k) \in \mathcal{Z}_{I_i}(k)$$

Ahora, la reducción de orden verifica que  $\mathcal{Z}_i \subseteq \text{red}_q(\mathcal{Z}_{I_i})$ , por lo que  $x(k) \in \text{red}_q(\mathcal{Z}_{I_i}(k))$ , y si  $x(k - \tau_i) \in \hat{X}_i(k - \tau_i(k)|k - \tau_i(k) - 1) \forall i$ , implica que  $x(k) \in \tilde{\mathcal{Z}}_j(k)$ .

$$\left. \begin{array}{l} x(k - \tau_j(k)) \in \hat{X}_j(k - \tau_j(k)|k - \tau_j(k) - 1) \\ x(k - \tau_j(k)) \in S_j(k - \tau_j(k)) \end{array} \right\} \rightarrow x(k - \tau_j(k)) \in \mathcal{Z}_j(k - \tau_j(k))$$

Se tiene que  $x$  perteneció a  $\mathcal{Z}_j(k - \tau_j(k))$  para todos los agentes y ha pertenecido a los conjuntos consistentes con las medidas, por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} x(k - \tau_j(k)) \in \mathcal{Z}_j(k - \tau_j(k)) \\ x(k - \tau_j(k)) \in S_j(k - \tau_j(k)) \end{array} \right\} \rightarrow x(k - \tau_j(k)) \in \mathcal{D}_{0,ij}$$

Luego el sistema ha ido evolucionando con la matriz  $A$  y con las perturbaciones  $w$  que pertenecen al conjunto  $\mathcal{W}$  por lo

que se tiene que el sistema pertenece a  $\mathcal{D}_{t,ij}$ , obteniéndose que:

$$\left. \begin{array}{l} x(k - \tau_j(k) + t) \in \mathcal{D}_{t,ij} \\ x(k - \tau_j(k) + t) \in S_j(k + \tau_j(k) + t) \end{array} \right\} \rightarrow x(k) \in \tilde{\mathcal{Z}}_j(k)$$

Finalmente, como la operación de reducción mantiene la pertenencia, se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} x(k) \in \text{red}_q(\mathcal{Z}_{I_i}(k)) \\ x(k) \in \tilde{\mathcal{Z}}_j(k), j \in N_i \end{array} \right\} \rightarrow x(k) \in \mathcal{I}_i(k)$$

Como  $\hat{X}_i(k|k)$  se obtiene de la intersección de diferentes  $\tilde{\mathcal{Z}}_j(k)$ , se tiene que  $x(k) \in \hat{X}_i(k|k)$ .

Nos centramos ahora en el paso de predicción. Primeramente, el estado del sistema en  $k+1$  viene dado por

$$x(k+1) = Ax(k) + w(k)$$

Usando propiedades estándar de zonotopos vistas en la Sección 2 y teniendo que  $x(k) \in \hat{X}_i(k|k)$ , se infiere que  $Ax(k) \in A\hat{X}_i(k|k)$ . Las perturbaciones en el instante  $k$  pertenecen a  $\mathcal{W}$ . Por tanto,  $x(k+1) \in A\hat{X}_i(k|k) \oplus \mathcal{W}$ , tal como se ha definido en el algoritmo  $\hat{X}_i(k+1|k)$ . Entonces,  $x(k+1) \in \hat{X}_i(k+1|k)$ , y la prueba está demostrada.  $\square$

El algoritmo detallado en la Tabla 3 asegura estimación garantista solo si las perturbaciones y ruidos permanecen en los límites establecidos. De lo contrario, la franja y el zonotopo de predicción pueden no interseccionar.

## 6. Resultados de Simulación

Para mostrar la bondad del algoritmo propuesto se emplearán un par de ejemplos ilustrativos. En el primero de ellos se mostrarán los resultados ante distintos valores del posible retardo producido. En el segundo se ha probado el método en un modelo de un sistema real y se hará un análisis gráfico basándose en el orden utilizado.

En los ejemplos se comparan los resultados obtenidos usando el algoritmo propuesto (que hemos llamado *BC* en lo sucesivo) con otro que no utiliza la información de las medidas anteriores del agente que recibe el zonotopo con retardo (que hemos llamado *BA* por analogía). El término *BC* refleja el uso del algoritmo propuesto en este trabajo, interseccionando la información recibida con retardo con las medidas anteriores del propio agente tal como muestra el paso 2.3.2) de la Tabla 3, al hacer uso de la medida pasada se le ha dado el término *Bucle Cerrado* por su analogía con la teoría de control tradicional. Mientras que el término *BA*, representa la evolución de la información recibida añadiendo las perturbaciones sin interseccionar con las medidas antiguas, cambiando el paso de la tabla anteriormente mencionado por la evolución mostrada en (12), siguiendo la misma analogía en la nomenclatura se ha denominado como *Bucle Abierto*.

$$\tilde{\mathcal{Z}}_j(k) = A^\tau \mathcal{Z}_j(k - \tau_j(k)) \oplus \sum_{l=0}^{\tau_j-1} A^l \mathcal{W} \quad (12)$$

Las figuras representan el estado real del sistema,  $x$ , mediante una línea azul, y los límites superior e inferior estimados

de cada uno de los agentes para ambos casos mencionados, con el algoritmo propuesto y sin él.

Para complementar el análisis del algoritmo se tiene también las tablas que muestran el valor del índice  $I_c$ , que cuantificará el rendimiento del algoritmo propuesto. Dicho índice estará basado en el cálculo aproximado de los volúmenes de los zonótopos de estimación de los agentes, que son una medida directa de la incertidumbre de estimación.

$$I_c = \frac{1}{k_{end}} \sum_{j=1}^{k_{end}} \sum_{i=1}^p Vol(\hat{X}_i(k|k)) \quad (13)$$

Con ambos factores, índice y gráficas, se permite tener una visión general de la mejoría producida, ya que puede que en un estado los límites no se vean mejorados, pero que en otro estado si lo hagan produciendo una reducción significativa del volumen y por tanto del índice.

**Ejemplo 1 (Millán et al., 2012b).** Planta cuya dinámica es:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9945 & -0,08757 \\ 0 & 0 & 0,1248 & 0,9945 \end{bmatrix} x(k) + w(k).$$

Es un ejemplo académico, en el que se ha buscado un sistema con un modo estable, otro inestable, y un par de polos oscilatorios. La topología del grafo es  $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4$ , como se puede apreciar en la Figura 3.

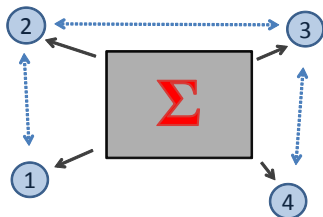


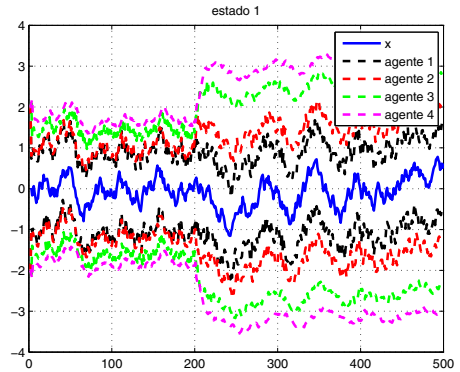
Figura 3: Esquema del sistema y los agentes.

Las salidas medidas por cada agente son:

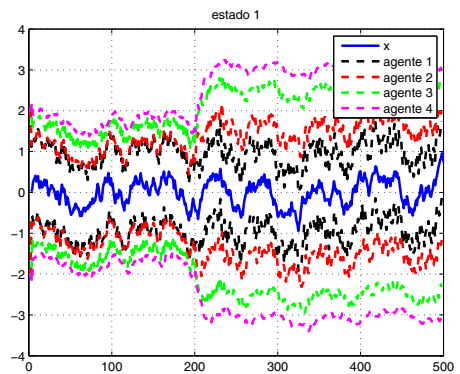
$$\begin{aligned} y_1(k) &= [1 \ 0 \ 0 \ 0]x(k) + v_1(k), \\ y_2(k) &= [0 \ 1 \ 0 \ 0]x(k) + v_2(k), \\ y_3(k) &= [0 \ 0 \ 1 \ 0]x(k) + v_3(k), \\ y_4(k) &= [0 \ 0 \ 0 \ 1]x(k) + v_4(k). \end{aligned}$$

Se realiza el primer experimento, con los parámetros mostrados en (14)<sup>2</sup>, donde los retardos se producen a partir del instante 200 y antes de dicho valor tienen todos valores nulos. Los resultados del índice dado por (13) se aprecian en la Tabla 4, la cual muestra que el algoritmo propuesto reduce ostensiblemente el volumen de los zonótopos, es decir, la incertidumbre en la

<sup>2</sup>Los ruidos y perturbaciones,  $v, w$  son generados a partir de distribuciones aleatorias uniformes



(a) Estimaciones cuando los zonótopos recibidos se evolucionan en bucle abierto



(b) Estimaciones cuando los zonótopos recibidos se evolucionan con el algoritmo propuesto

Figura 4: Estimación para el estado 1 por todos los agentes.

estimación, con respecto al caso de evolución en bucle abierto.

$$\begin{aligned} \tau_1(k) &= 2, \quad \tau_2(k) = 1, \quad \tau_3(k) = 4, \quad \tau_4(k) = 3, \quad \forall k > 200, \\ Q &= \text{diag}\{0,2 \ 0,1 \ 0,4 \ 0,3\}, \quad \|v_i\|_{\infty} = 0,5 \\ x_0 &= [ \ 0,02 \ 0,3 \ -0,01 \ -0,5 ]^T, \quad q = 20 \end{aligned} \quad (14)$$

Tabla 4: Índice  $I_c$  por agente y agregado para los algoritmos en bucle abierto (BA) y en bucle cerrado (BC). Los valores del retardo son:  $\tau_1(k) = 2, \tau_2(k) = 1, \tau_3(k) = 4, \tau_4(k) = 3, \forall k > 200$ .

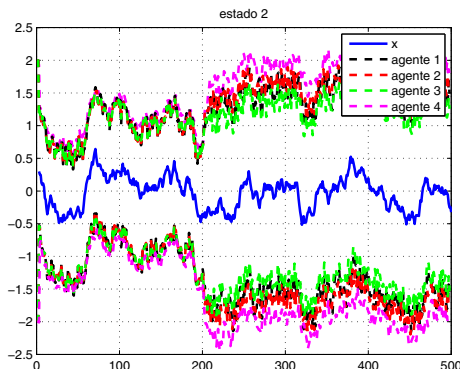
$I_c$	Ag 1	Ag 2	Ag 3	Ag 4	Agregado
BA	145,01	188,19	92,14	167,08	592,42
BC	151,22	161,90	74,96	122,61	510,70

Aunque como también se aprecia en la Tabla 4, no todos los agentes mejoran su estimación, pero la mejoría en el conjunto si es significativa, reduciendo el total en un 13,79 %.

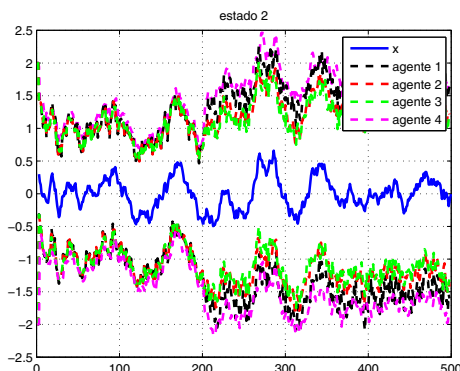
Los cuatro estados se representan en las Figuras 4 a 7 mostrando el caso tanto con el algoritmo propuesto como sin él o

en bucle abierto. Empezando por el primer estado, se muestra en la Figura 4 su evolución. Se usará la misma distribución de subfiguras, la 4(a) representa el caso en bucle abierto como se ha explicado anteriormente, se evoluciona la información recibida hasta el instante actual en el que debería haberse recibido. Y la 4(b) muestra el caso con el algoritmo propuesto, es difícil apreciar solamente con las gráficas que método es mejor, pero si se aprecia la mejoría con el índice  $I_c$  mostrado en las Tabla 4.

El estado 2 se puede observar en la Figura 5. En este ejemplo en particular es el caso dónde con más claridad se observa el efecto del nuevo algoritmo propuesto.



(a) Estimaciones cuando los zonotos recibidos se evolucionan en bucle abierto



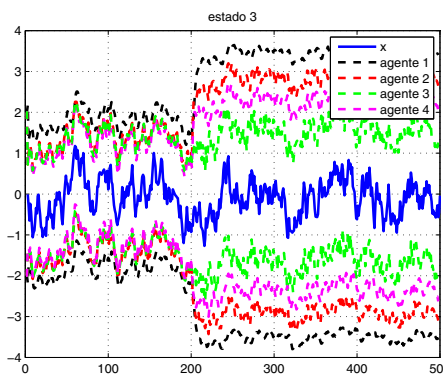
(b) Estimaciones cuando los zonotos recibidos se evolucionan con el algoritmo propuesto

Figura 5: Estimación para el estado 2 por todos los agentes.

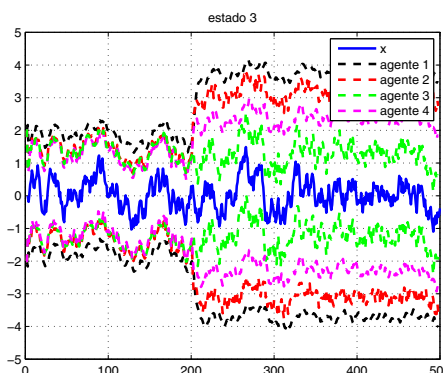
La Figura 6 ilustra el comportamiento del estado 3. Este estado es el que corresponde al mayor retardo en las comunicaciones.

La Figura 7 representa al estado 4. Al igual que pasaba en otros estados, no se observa a simple vista una gran mejoría. Pero gracias al índice  $I_c$  se sabe que dicha mejoría se produce.

Una vez visto el primer caso con los parámetros indicados en (14), se mantienen dichos valores pero se aumenta a un valor los retardos, multiplicando los valores por 10, produciéndose a partir del mismo instante de simulación, para instantes  $k > 200$ . En esta ocasión sólo se mostrará el valor del índice  $I_c$ . La



(a) Estimaciones cuando los zonotos recibidos se evolucionan en bucle abierto



(b) Estimaciones cuando los zonotos recibidos se evolucionan con el algoritmo propuesto

Figura 6: Estimación para el estado 3 por todos los agentes.

Tabla 5 muestra que el rendimiento en la estimación mejora un 34,25 % con el algoritmo propuesto. Aunque al igual que en el caso previo uno de los agentes obtiene una estimación peor que es compensada por el resto de los agentes.

Tabla 5: Índice  $I_c$  por agente y agregado para los algoritmos en bucle abierto (BA) y en bucle cerrado (BC). Los valores del retardo son:  $\tau_1(k) = 20$ ,  $\tau_2(k) = 10$ ,  $\tau_3(k) = 40$ ,  $\tau_4(k) = 30$ ,  $\forall k > 200$ .

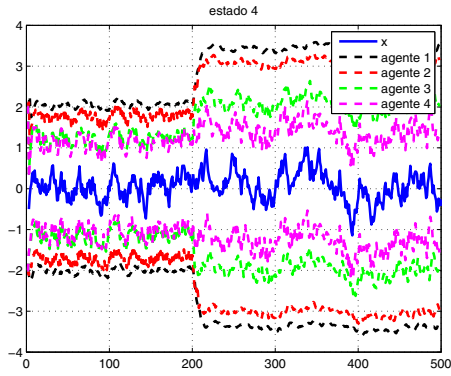
$I_c/10^3$	Ag 1	Ag 2	Ag 3	Ag 4	Agregado
BA	0,77	1,24	0,85	0,79	3,65
BC	1,07	0,58	0,31	0,44	2,40

Se realiza ahora una nueva simulación suponiendo que el retardo de uno de los agentes varía, tal como se indica en (15), manteniendo el resto de valores indicados en (14). Para instantes de tiempos anteriores el retardo producido en la red es nulo.

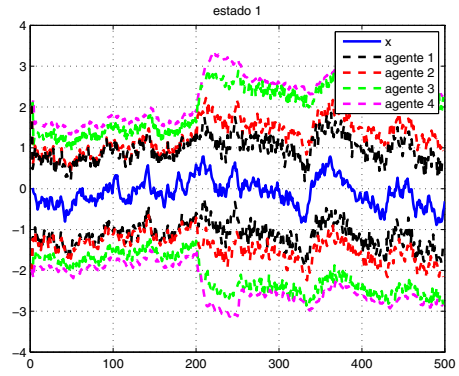
$$\tau_1(k) = 2, \tau_2(k) = 1, \tau_3(k) = 4, \tau_4(k) = 3, \forall k \in [200 \ 250],$$

$$\tau_1(k) = 2, \tau_2(k) = 1, \tau_3(k) = 0, \tau_4(k) = 3, \forall k > 250. \tag{15}$$

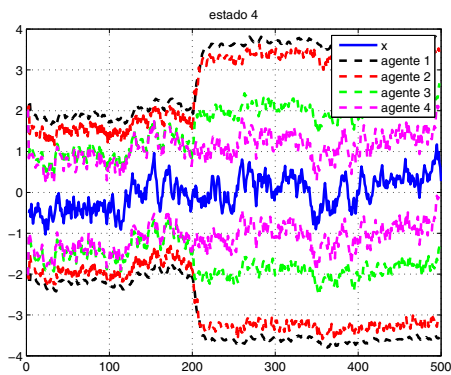




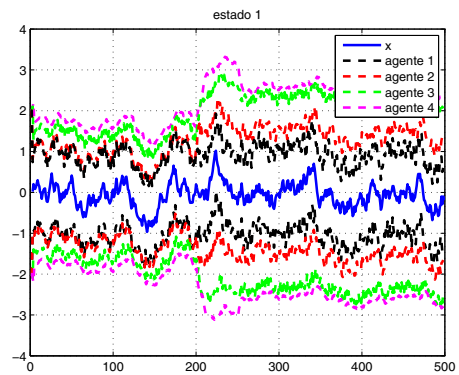
(a) Estimaciones cuando los zonotopos recibidos se evolucionan en bucle abierto



(a) Estimaciones cuando los zonotopos recibidos se evolucionan en bucle abierto



(b) Estimaciones cuando los zonotopos recibidos se evolucionan con el algoritmo propuesto



(b) Estimaciones cuando los zonotopos recibidos se evolucionan con el algoritmo propuesto

Figura 7: Estimación para el estado 4 por todos los agentes.

Figura 8: Estimación para el estado 1 por todos los agentes.

Nuevamente se hace uso del índice  $I_c$  para ver la mejoría del algoritmo propuesto. La Tabla 6 muestra como usar el nuevo algoritmo propuesto obtiene mejor  $I_c$  que en el caso de no usarlo, en este caso la mejora es menor que en los casos previos, 12,32 %.

Tabla 6: Índice  $I_c$  por agente y agregado para los algoritmos en bucle abierto (BA) y en bucle cerrado (BC). Los valores del retardo son:  $\tau_1(k) = 2$ ,  $\tau_2(k) = 1$ ,  $\tau_3(k) = 4$ ,  $\tau_4(k) = 3$ ,  $\forall k \in [200 \ 250]$  y  $\tau_1(k) = 2$ ,  $\tau_2(k) = 1$ ,  $\tau_3(k) = 0$ ,  $\tau_4(k) = 3$ ,  $\forall k > 250$ .

$I_c$	Ag 1	Ag 2	Ag 3	Ag 4	Agregado
BA	109,50	84,27	97,93	66,86	358,56
BC	96,24	90,62	73,10	54,43	314,39

Para esta nueva simulación solo se representarán dos estados a modo ilustrativo. En la Figura 8 se muestra el comportamiento del estado 1, al igual que antes, tanto con el algoritmo propuesto, como sin él.

El otro estado representado es el tercero. Dicho estado se muestra en la Figura 9. Al igual que pasaba en el primer caso

estudiado, para este estado parece obtenerse unos límites similares con ambos métodos.

Finalmente, la tabla 7 muestra en resumen los resultados obtenidos haciendo una distinción en los instantes en los que se produce el retardo.

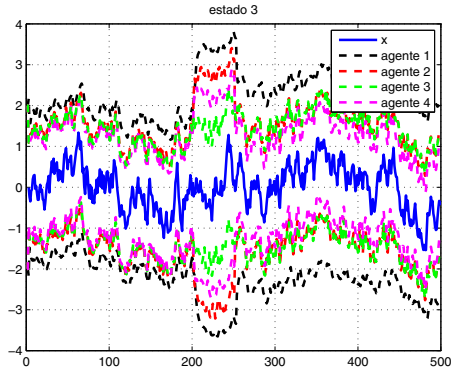
Se ha podido observar cómo aplicar el algoritmo desarrollado ha producido una reducción en el valor del índice  $I_c$  y por consiguiente una reducción en los volúmenes de los zonotopos. Algunos estados son más sensibles a dicha reducción, al igual que algunos agentes, pero en conjunto se ha obtenido mejores resultados. Por tanto el uso del algoritmo propuesto reduce la banda de incertidumbre generada por el retardo.

**Ejemplo 2 (Weimer et al., 2012).** Sistema de 6 tanques.

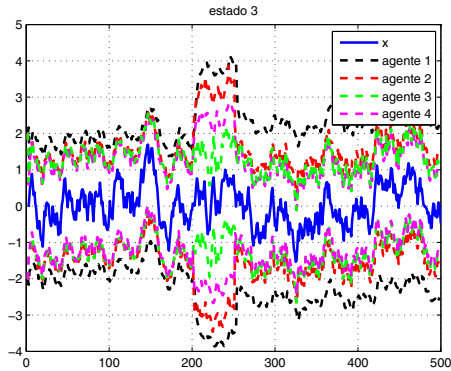
Se tiene un segundo ejemplo basado en un sistema compuesto de 6 tanques obtenido de (Weimer et al., 2012) que a su vez está basado en (Johansson, 2000). Consta de dos tanques inferiores (3 y 4), dos superiores (1 y 2), dos reservorios (5 y 6), dos válvulas y dos bombas, como se puede apreciar en la Figura 10. Los flujos de agua van del tanque 1 al 3, del 2 al 4, y del 3 y 4 al 5 y 6 respectivamente. Las bombas están conectadas de tal manera que la bomba 1 entrega agua a los tanques 2 y 3, mientras que la bomba 2 entrega agua a los tanques 1 y 4. La

Tabla 7: Resumen de la comparativas de  $I_c$  para antes y después de la aparición de los retardos para los valores de los tres casos vistos.

$I_c$	Caso 1			Caso 2			Caso 3			
	agregado	$i < 200$	$i > 200$	agregado	$i < 200$	$i > 200$	agregado	$i < 200$	$i \in [200, 250]$	$i > 250$
BA	592,42	45,67	546,76	$3,65 \cdot 10^3$	45,67	$3,60 \cdot 10^3$	358,56	45,67	87,72	225,18
BC	510,70	45,67	465,03	$2,40 \cdot 10^3$	45,67	$2,35 \cdot 10^3$	314,39	45,67	73,16	195,56



(a) Estimaciones cuando los zonotos recibidos se evolucionan en bucle abierto



(b) Estimaciones cuando los zonotos recibidos se evolucionan con el algoritmo propuesto

Figura 9: Estimación para el estado 3 por todos los agentes.

fracción de agua que llega a cada uno del par de tanques viene regulada por las válvulas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . El estado del sistema viene dado por la altura de los 6 tanques  $x_i$ ,  $i = 1 \dots 6$  y las entradas vienen dadas por los ruidos  $w_{v1}$  y  $w_{v2}$ .

Se tienen 4 agentes que tomarán medidas de la altura de los tanques 3, 4, 5 y 6. Cada uno medirá la altura de uno de ellos, necesitando comunicarse para poder estimar la altura de todos ellos, ya que con una sola medida no se tiene observabilidad completa. La comunicación entre los agentes se realiza de manera inalámbrica, pudiendo producirse retardo en las mismas.

El sistema linealizado viene dado por (16).

$$\dot{x} = A_c x(t) + B_c w_v(t) + w(t), \quad (16)$$

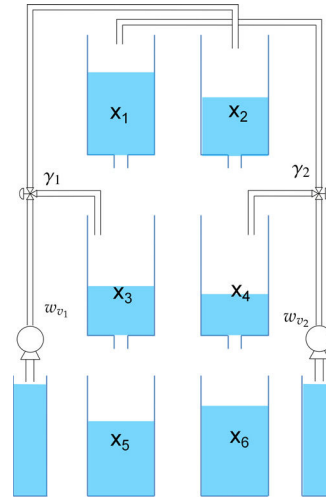


Figura 10: Sistema de 6 tanques.

siendo  $x(t)$  el estado,  $w_v(t)$  ruido en las válvulas, y  $w(t)$  perturbaciones aplicadas a todos los estados,  $\|w_i\|_\infty = 0,3$ .

Y las matrices se definen como en (17):

$$A_c = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & -\alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & -\alpha_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma_2}{k_2 \bar{A}_1} \\ \frac{\gamma_1}{k_1 \bar{A}_2} & 0 \\ \frac{1-\gamma_1}{k_1 \bar{A}_3} & 0 \\ 0 & \frac{1-\gamma_2}{k_2 \bar{A}_4} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \frac{a_i}{\bar{A}_i} \sqrt{\frac{g}{2x_i^0}} \quad (17)$$

donde  $a_i$  es el diámetro del conducto de salida de agua de los tanques,  $\bar{A}_i$  es el diámetro de los tanques,  $g$  es la aceleración de la gravedad en  $cm/s^2$ ,  $\frac{1}{k_i}$  es la constante de las bombas. Se discretiza el sistema con un tiempo de muestreo igual a 0,1 segundos para obtener un sistema discreto. Cada agente usará una de las filas de  $C_c$  para su medición. La topología del grafo es  $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4$ .

Para evaluar el algoritmo se utilizará el mismo índice  $I_c$  que en el ejemplo anterior descrito por (13). Y al igual que en el ejemplo anterior, las figuras vienen divididas en dos gráficas, donde se compara visualmente el efecto de aplicar el algoritmo propuesto, que intersecciona la información recibida con retardo con las medidas propias antiguas, con el resultado en bucle

abierto, que evoluciona la información recibida hasta el instante actual añadiendo las perturbaciones. En dichas Figuras se representa el estado, denotado por  $x$  y con una línea azul, y los límites de los zonotos de estimación de los distintos agentes. En la leyenda de las figuras se puede apreciar qué color corresponde a cada agente.

En la Figura 11 se aprecia el resultado obtenido para el agente 3. Aunque parece una mejoría con el algoritmo propuesto, la Tabla 8 indica lo contrario. Los valores del retardo coinciden con los del ejemplo anterior dados en (14).

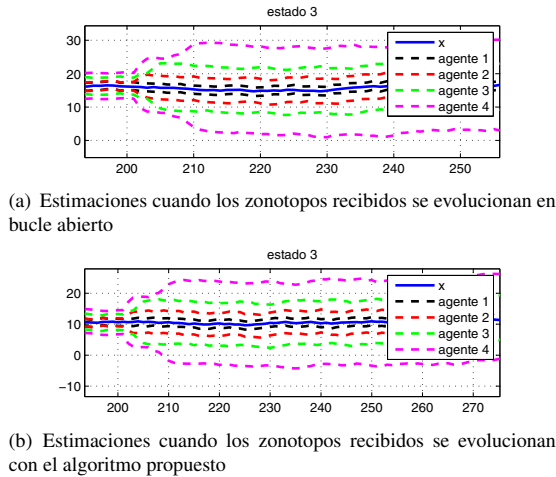


Figura 11: Estimación para el estado 3 por todos los agentes en detalle.

En la Tabla 8 se muestran los resultados obtenidos. Las simulaciones están realizadas con una reducción de orden igual a 20. Este resultado da pie al análisis del orden en función del retardo producido.

Tabla 8: Índice  $I_c$  por agente y agregado para los algoritmos en bucle abierto (BA) y en bucle cerrado (BC). Los valores del retardo son:  $\tau_1(k) = 2$ ,  $\tau_2(k) = 1$ ,  $\tau_3(k) = 4$ ,  $\tau_4(k) = 3$ ,  $\forall k > 200$ , para los 6 tanques con zonotos de orden 20.

$I_c/10^7$	Ag 1	Ag 2	Ag 3	Ag 4	Agregado
BA	1,17	1,11	0,83	7,86	10,98
BC	1,11	0,95	0,96	8,51	11,53

Si aumentamos el orden hasta 50, tanto el enviado como el que usa cada agente, se obtienen en cambio estos resultados de la Tabla 9. Vemos como al aumentar el orden no solo ambos métodos mejoran su valor de  $I_c$  sino que el algoritmo propuesto resulta mejor solución que evolucionar la información recibida.

La Figura 12 profundiza en los resultados obtenidos en las tablas anteriores. En primer lugar se explicará la leyenda mostrada en la Figura. BC y BA se corresponden al igual que en las tablas, al algoritmo propuesto y a bucle abierto respectivamente. El retardo representado por  $\tau$  es una simplificación del valor de los cuatro agentes, es decir, donde se indica BC  $\tau = 30$

Tabla 9: Índice  $I_c$  por agente y agregado para los algoritmos en bucle abierto (BA) y en bucle cerrado (BC). Los valores del retardo son:  $\tau_1(k) = 2$ ,  $\tau_2(k) = 1$ ,  $\tau_3(k) = 4$ ,  $\tau_4(k) = 3$ ,  $\forall k > 200$ , para los 6 tanques con zonotos de orden 50.

$I_c/10^7$	Ag 1	Ag 2	Ag 3	Ag 4	Agregado
BA	1,04	1,09	0,66	4,76	7,55
BC	0,96	0,90	0,71	4,69	7,26

quiere decir que se trata del caso que usa el algoritmo propuesto cuando todos los agentes tienen un retardo igual a 30 a partir del instante 200. Analizando por ejemplo el rendimiento obtenido cuando  $\tau_i(k > 200) = 30$ , la curva en BC obtiene peor índice  $I_c$  hasta llegar no superar cierto orden de los zonotos. Sin embargo, hay un punto de inflexión en el que los resultados gracias al algoritmo propuesto son mejores que sin ellos.

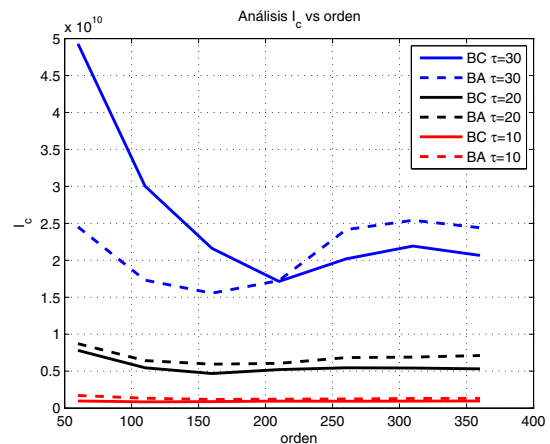


Figura 12: Análisis del valor del índice  $I_c$  en función del orden de zonotop empleado

Incluso parece apreciarse como, llegado a un cierto valor para el orden empleado, el valor de  $I_c$  permanece constante y es innecesario seguir aumentando el orden. Este comportamiento del índice, puede ser debido a que, con bajo orden se tiene un gran conservadurismo y, si la medida no es demasiado fiable, da peores resultados utilizarla que no hacerlo.

En este segundo ejemplo, debido a la dinámica del sistema, es más notorio el orden bajo de los zonotos. Interesante el resultado obtenido en la Figura 12 donde se ve como afecta el orden de los zonotos empleados en función del retardo en las comunicaciones.

### 7. Conclusiones

Se ha presentado un estimador distribuido donde las comunicaciones pueden sufrir retardos. Los agentes son capaces de realizar estimaciones garantistas de todos los estados, aunque no tengan acceso directo a todas las medidas. Para ello inter-

cambian información con sus vecinos y debe existir un camino entre cualesquiera dos nodos de la red.

Observando el índice global resultante de la suma de los volúmenes de los zonótopos de estimación de los agentes, se comprueba que el uso del algoritmo propuesto mejora los límites de la estimación, ya que el índice que indica el volumen se ve reducido.

Como líneas de investigaciones futuras se pueden citar, el añadir nuevas funcionalidades al algoritmo presentado, como por ejemplo combinarlo con un filtro de Kalman para corregir la estimación, considerar comunicaciones aperiódicas y estudiar el problema combinado de estimación y control.

## English Summary

### Guaranteed Distributed Observers for Networked Systems

#### Abstract

This paper proposes a guaranteed distributed observer for networked systems, taking into account the problem of the variable delays in communications. We assume that the information exchanged among the agents always arrives to its destination, although the communication are subject to variable delays, whose maximum value is known. Each observer works with partial information, and needs to communicate with neighbouring observers to carry out an estimation of the complete state of the system. The guaranteed sets, whose function is to delimit in real time the region in which the state of the system belong to, are represented by zonotopes. This kind of sets allows a simple integration of the information received by each agent. Finally some results obtained with the proposed algorithm are shown in simulations.

#### Keywords:

Distributed Estimation, State Observers, Delays Systems, Networked systems, Zonotopes.

## Agradecimientos

Los autores quieren agradecer al Ministerio de Economía y Competitividad (MEyC) bajo los Proyectos DPI2013-44135-R, DPI2015-70973-R y TEC2016-80242-P y a AEI/FEDER (Grant TEC2016-80242-P), la financiación de este trabajo.

## Referencias

- Alamo, T., Bravo, J. M., Camacho, E. F., 2005. Guaranteed state estimation by zonotopes. *Automatica* 41 (6), 1035–1043.
- Bars, F. L., Sliwka, J., Jaulin, L., Reynet, O., 2012. Set-membership state estimation with fleeting data. *Automatica* 48 (2), 381 – 387.
- Briñón Arranz, L., Seuret, A., Canudas de Wit, C., December 2009. Translation control of a fleet circular formation of AUVs under finite communication range. In: 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China, pp. 8345 – 8350.
- Caro, J. M. B., 2004. Control predictivo no lineal robusto basado en técnicas intervalares. Ph.D. thesis, Universidad de Sevilla.
- Combastel, C., 2015. Zonotopes and kalman observers: Gain optimality under distinct uncertainty paradigms and robust convergence. *Automatica* 2015 1 (265–273).
- Farina, M., Ferrari-Trecate, G., Scattolini, R., 2010. Distributed moving horizon estimation for linear constrained systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 55 (11), 2462–2475.
- Feng, J., Wang, Z., Zeng, M., 2013. Distributed weighted robust kalman filter fusion for uncertain systems with autocorrelated and cross-correlated noises. *Information Fusion* 14 (1), 78 – 86.
- Fridman, E., 2014. *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*. Springer.
- García, R. A., Rubio, F. R., Guinaldo, M., Orihuela, L., Millán, P., 2015. An asynchronous technique for distributed estimation based on zonotopes. In: *Event-based Control, Communication, and Signal Processing (EBCSCP)*, 2015 International Conference on. IEEE, pp. 1–7.
- Guinaldo, M., Sánchez, J., Dormido, S., 2016. Distributed adaptive control of linear multi-agent systems with event-triggered communications. *Applied Mathematics and Computation* 274, 195 – 207.
- He, X., Xue, W., Fang, H., Nov 2016. Consistent distributed Kalman filter with adaptive matrix weights. In: *2016 14th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)*. pp. 1–6.
- Iyengar, S. S., Brooks, R. R., 2016. *Distributed sensor networks: sensor networking and applications*. CRC press.
- Johansson, K. H., May 2000. The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 8 (3), 456–465.
- Le, V. T. H., Stoica, C., Alamo, T., Camacho, E. F., Didier, D., 2013. Zonotopes: From guaranteed state-estimation to control. John Wiley and Sons.
- Li, H., Shi, Y., Yan, W., July 2014. Distributed receding horizon estimation for sensor networks with improved consensus strategy. In: *Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference*. pp. 316–321.
- Mahmoud, M. S., Khalid, H. M., March 2013. Distributed kalman filtering: a bibliographic review. *IET Control Theory Applications* 7 (4), 483–501.
- Millán, P., Orihuela, L., Vivas, C., Rubio, F. R., 2012a. Control óptimo- $L_2$  basado en red mediante funcionales de Lyapunov-Krasovskii. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 9 (1), 14–23.
- Millán, P., Orihuela, L., Vivas, C., Rubio, F. R., 2012b. Distributed consensus-based estimation considering network induced delays and dropouts. *Automatica* 48 (10), 2726–2729.
- Olfati-Saber, R., December 2007. Distributed Kalman filtering for sensor networks. In: *46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA, USA, pp. 5492–5498.
- Orihuela, L., Millán, P., Vivas, C., Rubio, F. R., 2013. Reduced-order  $H_2/H_\infty$  distributed observer for sensor networks. *International Journal of Control* 86 (10), 1870–1879.
- Richard, J. P., 2003. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica* 39 (10), 1667–1694.
- Roshany-Yamchi, S., Cychowski, M., Negenborn, R. R., Schutter, B. D., Delaney, K., Connell, J., Jan 2013. Kalman filter-based distributed predictive control of large-scale multi-rate systems: Application to power networks. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 21 (1), 27–39.
- Rubio, F. R., Millán, P., Orihuela, L., Vivas, C., 2014. Estimación y control distribuidos de sistemas sobre redes de comunicación. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 11 (4), 377–388.
- Weimer, J., Araújo, J., Johansson, K. H., 2012. Distributed event-triggered estimation in networked systems. *IFAC Proceedings Volumes* 45 (9), 178 – 185.
- Wu, J., Elser, A., Zeng, S., Allgower, F., 2016. Consensus-based distributed Kalman-bucy filter for continuous-time systems. *IFAC-PapersOnLine* 49 (22), 321 – 326, 6th IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems NECSYS 2016 Tokyo, Japan, September 2016.
- Zhang, H., Hong, Q., Yan, H., Luo, Y., 2016. Observer-based decentralized event-triggered  $H_\infty$  control for networked systems. *Journal of the Franklin Institute*, –. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfranklin.2016.09.021>
- Zhou, B., Qian, K., Ma, X.-D., Dai, X.-Z., 2013. A new nonlinear set membership filter based on guaranteed bounding ellipsoid algorithm. *Acta Automatica Sinica* 39 (2), 146 – 154.