

Identificación Robusta de Modelos Wiener y Hammerstein

Silvina I. Biagiola José L. Figueroa

Instituto de Investigaciones en Ingeniería Eléctrica - IIE (UNS-CONICET)
Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras
Universidad Nacional del Sur
Avda. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina
{biagiola,figueroa}@uns.edu.ar

Resumen: Los modelos orientados a bloques han mostrado ser útiles y eficaces como representaciones no lineales en muchas aplicaciones. Son modelos simples y a la vez válidos en una región más amplia que un modelo lineal invariante en el tiempo. En cuanto a su estructura, consisten en una cascada integrada por una dinámica lineal y un bloque estático no lineal.

Si bien existen en la literatura numerosos trabajos que abordan la identificación nominal de estos modelos, el problema de identificación robusta en presencia de incertidumbre no ha sido cabalmente tratado.

En este trabajo, se consideran dos clases de modelos orientados a bloques: modelos Wiener y Hammerstein. Empleando una representación paramétrica, se propone describir la incertidumbre como un conjunto de parámetros, cuyos valores se obtienen resolviendo un problema de optimización. El algoritmo de identificación desarrollado se ilustra mediante ejemplos de simulación.

Copyright © 2009 CEA.

Palabras Clave: Wiener; Hammerstein; Identificación; Incertidumbre; Optimización.

1. INTRODUCCIÓN

El proceso de identificación consiste en obtener una representación del sistema a partir de los datos disponibles del mismo. Dado un registro de entradas ($\mathbf{u} = \{u_0, u_1, \dots, u_K\}$) y de salidas ($\mathbf{y} = \{y_0, y_1, \dots, y_K\}$), el objetivo es hallar un modelo matemático que aproxime dichos datos. Generalmente esta tarea se lleva a cabo en dos etapas. La primera, basada en conocimiento previo del proceso, está dedicada a seleccionar el "tipo de modelo":

$$\hat{y}_{k+1} = f(\hat{y}_k, \dots, \hat{y}_{k-N_y}, u_k, \dots, u_{k-N_u}, \theta) \quad (1)$$

donde la salida predicha en el instante $k + 1$ depende de las entradas previas y del conjunto de parámetros (θ) a determinar. En un segundo paso, se calculan los θ que minimizan la diferencia entre las salidas del proceso y las del modelo ($y_k - \hat{y}_k$). Es posible hacer esta determinación mediante un algoritmo de optimización. Al conjunto de parámetros que se obtienen se lo denomina *parámetros nominales* θ_N .

Una situación más realista es que exista cierta incertidumbre asociada a ese modelo nominal, para lo cual se propone definir un conjunto de posibles modelos que representen el comportamiento incierto del modelo.

Para ello, se busca obtener un conjunto Θ , tal que cuando se empleen los parámetros $\theta \in \Theta$, la totalidad del conjunto de entradas \mathbf{u} del proceso sean mapeadas en un conjunto de salidas que a su vez estén contenidas en el conjunto de datos \mathbf{y} . De esta manera, la incertidumbre se modela mediante una familia de modelos, todos de igual estructura, pero que difieren en los valores de sus parámetros. Esto se ilustra en la Figura 1.

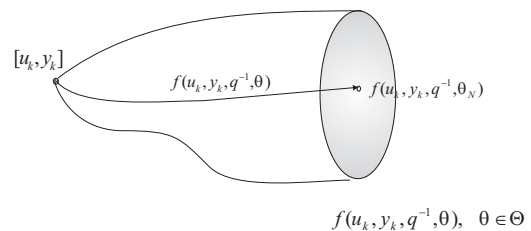


Figura 1. Modelo sujeto a incertidumbre

Los modelos orientados a bloques conforman un tipo especial de modelos no lineales (Pearson and Pottmann, 2000). Consisten en dos bloques en serie: una dinámica lineal (\mathcal{L}) y un bloque estático no lineal (\mathcal{N}). Las ventajas que ofrecen estos modelos es que demandan un bajo esfuerzo computacional en la identificación y son convenientes para diseño de controladores.

Dos modelos orientados a bloques típicos son el Hammerstein (donde \mathcal{N} está seguido por \mathcal{L}) y el Wiener (donde \mathcal{L} precede a \mathcal{N}). Estas estructuras están presentes en una amplia variedad de aplicaciones, tales como el campo de las comunicaciones (Huang *et al.*, 1998; Hadjiloucas *et al.*, 2004; Stapleton and Bass, 1985), ingeniería química (Kalafatis *et al.*, 1995; Pajunen, 1987, 1992; Fruzzetti *et al.*, 1997; Norquay *et al.*, 1998; Wigen, 1993; Zhu, 1999; Visala *et al.*, 1999), biología (Hunter and Korenberg, 1986) y medicina (Celka and Colditz, 2002).

Existen numerosos trabajos reportados sobre modelos orientados a bloques, el enfoque más difundido en lo que respecta a construcción del modelo, es la descripción paramétrica (Hagenblad and Ljung, 2000; Gómez and Baeyens, 2004). Sin embargo, aunque en una menor proporción, la formulación no paramétrica también ha sido abordada (Greblicki, 1994, 1997).

Aunque existen numerosos trabajos en la literatura dedicados a la identificación de modelos Wiener y Hammerstein, la identificación de los mismos en presencia de incertidumbre no ha sido muy tratada.

En lo que respecta a la estructura Hammerstein, Belforte y Gay (2001) abordaron el problema de identificación caracterizando el error de medición en un contexto de conjunto de membresía. El bloque estático se supone descrito por polinomios generalizados, y el lineal representado por estructuras tipo ARX. El trabajo de Falugi *et al.* (2005) estima el conjunto de parámetros factibles en una situación de peor caso. Utiliza una técnica de proyección sobre subespacios, seguida por una fase de optimización. Se determinan así intervalos de incertidumbre para los parámetros. Se basa en la hipótesis de ruido aditivo de medición de la salida, y requiere el conocimiento de alguna cota del mismo (norma l_2 o l_∞).

Una estrategia para identificación robusta de modelos Wiener con aplicación en control predictivo fue presentada por Lussón Cervantes *et al.* (2003a). Se propone una representación lineal a tramos (PWL) para la no linealidad estática; la incertidumbre es absorbida exclusivamente por la parte no lineal, para lo cual se determinan dos modelos PWL extremos (cotas inferior y superior). Avances sobre este enfoque, con aplicaciones concretas en procesos, se reportan en Lussón Cervantes *et al.* (2003b). En Skrjanc *et al.* (2005) se trata el problema de identificación robusta de un modelo difuso por intervalos y se aplica para un modelo Wiener. La técnica introducida combina identificación difusa con teoría de programación lineal a fin de estimar los parámetros del modelo difuso en cada dominio considerado. Se obtienen modelos extremos (cotas inferior y superior) que definen el intervalo de confianza de los datos muestreados. Este enfoque se emplea para aproximar la incertidumbre que se supone concentrada en la no linealidad estática de la estructura Wiener.

En un artículo reciente (Kozek and Sinanovic, 2007), se identifican los parámetros de un modelo de Wiener representado por una función de transferencia discreta seguida de una no linealidad tipo PWL. El enfoque utiliza modelos lineales locales basados en un criterio de optimización fundado en propiedades estadísticas para los residuos. Se obtiene un modelo global que contiene un número mínimo de modelos locales y el resultado contempla el nivel de ruido incluido en la medición.

Un trabajo muy reciente (Sznaier, 2009), confirma que la identificación robusta de modelos Wiener y Hammerstein es motivo de investigación en curso. En él se analiza la complejidad computacional asociada a la identificación de estos modelos cuando se emplean algoritmos que adoptan el enfoque de conjunto de membresía. En este artículo, Sznaier concluye que la dificultad que presenta la identificación, es inherente al método utilizado (conjunto de membresía). Esto conlleva a un costo computacional elevado, tanto en el caso Wiener como Hammerstein, cuando el modelo involucra una no linealidad estática no invertible.

El presente trabajo aborda el problema de identificación de un modelo Wiener o Hammerstein de tipo paramétrico. En estos casos, la no linealidad estática define completamente la característica de estado estacionario del modelo. También se supone que hay una fuente de incertidumbre de naturaleza desconocida. La metodología es robusta dado que el conjunto de datos utilizados para realizar la identificación puede ser reproducido por al menos uno de los modelos del conjunto. Los parámetros

se obtienen resolviendo un problema de optimización, y se asegura la existencia de un conjunto convexo de modelos que representan la totalidad de los datos medidos del proceso.

Este trabajo está organizado del siguiente modo. En la Sección 2, se aborda la identificación de un modelo nominal, refiriendo resultados reportados previamente en la literatura. El problema de identificación robusta del modelo incierto se trata en la Sección 3. Ésta es la principal contribución del trabajo: un método para caracterización e identificación del modelo incierto. En la Sección 4, se evalúan resultados sobre la base de ejemplos de simulación. Las conclusiones finales se presentan en la Sección 5.

2. IDENTIFICACIÓN DE MODELOS ORIENTADOS A BLOQUES

Los modelos orientados a bloques que se desean identificar, se suponen descritos por las siguientes parametrizaciones (Falugi *et al.*, 2005; Gómez and Baeyens, 2004):

■ Bloque lineal

$$\mathcal{L}(q) = \sum_{i=1}^M h_i B_i(q^{-1}), \quad h = [h_1, \dots, h_M]^T, \quad (2)$$

donde $B_i(q^{-1})$ es una base racional (Laguerre, Kautz, ortonormal, etc.)¹

■ Bloque no lineal

$$\mathcal{N}(x) = \sum_{i=1}^N p_i g_i(x), \quad p = [p_1, \dots, p_N]^T, \quad (3)$$

donde $g_i(\cdot) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ son un conjunto de funciones base especificadas (tales como polinomial, trigonométrica, funciones lineales por tramos, etc.).

En la identificación de estos modelos existe un factor de escala que puede ser arbitrariamente distribuido entre el bloque lineal y el no lineal sin afectar las características de entrada-salida del modelo (Pottmann and Pearson, 1998). Se supondrá $p_1 = 1$, dado que cualquier otro valor de esta ganancia puede incluirse en el bloque lineal. Luego, la tarea de identificación incluirá la determinación de $M + N - 1$ parámetros desconocidos.

2.1 Identificación nominal: modelo Wiener

La Figura 2 ilustra la estructura general de un Modelo Wiener, que consiste en un sistema \mathcal{L} , lineal invariante en el tiempo, seguido de una no linealidad estática \mathcal{N}_w . En este caso, el modelo \mathcal{L} mapea la secuencia de entrada $\{u(k)\}$ en una secuencia intermedia $\{v(k)\}$, y la salida del modelo global coincide con la salida del bloque no lineal, esto es $y(k) = \mathcal{N}_w(v(k))$. El algoritmo de identificación propuesto requiere que la no linealidad estática sea invertible. Esta restricción está relacionada con el hecho que la señal que conecta ambos sub-sistemas no es medible. Entonces, asumiendo la invertibilidad de \mathcal{N}_w , la señal $v(k)$ se puede escribir como:

$$v(k) = \mathcal{N}_w^{-1}(y(k)) = \sum_{i=1}^N p_i g_i(y(k)), \quad (4)$$

Note que el bloque no lineal ha sido representado en (3), donde $\mathcal{N} = \mathcal{N}_w^{-1}$ y $x = y(k)$.

¹ Notar que q^{-1} es el operador atraso.

Figura 2. Modelo Wiener

Según la Figura 2, esta señal también se puede escribir como la salida del bloque lineal:

$$v(k) = \sum_{i=1}^M h_i B_i(q^{-1})u(k), \quad (5)$$

Luego, la variable v es generada a partir de u , según una expansión finita de funciones base ortonormales. Este modelo se suele denominar “filtro de Laguerre”, el cual permite la incorporación del conocimiento de un polo real. La expresión que corresponde al i -ésimo filtro es (Nelles, 2001):

$$B_i(q) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{q-a} \left(\frac{\sqrt{1-aq}}{q-a} \right)^{i-1}, \quad (6)$$

Si bien en (6) q simboliza el operador adelanto, es trivial reescribir el filtro B_i en función de q^{-1} y reemplazarlo en la ecuación 5.²

Si se igualan ambos miembros de las ecuaciones 4 y 5, considerando $p_1 = 1$ e incluyendo una función $\epsilon(k)$ para contemplar errores de modelado, se obtiene:

$$\epsilon(k) = \sum_{i=2}^N p_i g_i(y(k)) + g_1(y(k)) - \sum_{i=1}^M h_i B_i(q^{-1})u(k) \quad (7)$$

que es una regresión lineal en los parámetros. Al definir θ y $\phi(k)$ como:

$$\theta = [p_2, \dots, p_N, h_1, \dots, h_M]^T \quad (8)$$

$$\phi(k) = [g_2(y(k)), \dots, g_N(y(k)), -B_1(q^{-1})u(k), \dots, -B_M(q^{-1})u(k)]^T, \quad (9)$$

la ecuación (7) se puede escribir como

$$\epsilon(k) = \theta^T \phi(k) + g_1(y(k)) \quad (10)$$

Una estimación $\hat{\theta}$ de θ se puede calcular minimizando con criterio cuadrático, los errores de predicción $\epsilon(k)$ (Gómez and Baeyens, 2004). Luego:

$$\hat{\theta} = (\Phi_K \Phi_K^T)^{-1} \Phi_K \Gamma, \quad (11)$$

donde

$$\Gamma = -[g_1(y(1)), \dots, g_1(y(K))]^T \quad (12)$$

y

$$\Phi_K = [\phi(1), \dots, \phi(K)] \quad (13)$$

utilizan el conjunto de K datos disponibles. La condición experimental de identificabilidad implica que Φ debe ser de rango completo.

² Por ejemplo, si $a = 0$ los filtros Laguerre resultan $B_i(q^{-1}) = q^{-i}$ (equivalente a un modelo FIR), y entonces la expresión para $v(k)$ es $v(k) = h_1 u(k-1) + \dots + h_M u(k-M)$.

Figura 3. Modelo Hammerstein

En esta instancia, es posible calcular estimaciones para los parámetros \hat{p}_i ($i = 2, \dots, N$) y \hat{h}_i ($i = 1, \dots, M$), mediante partición de $\hat{\theta}$, siguiendo la definición de θ en (8).

2.2 Identificación nominal: modelo Hammerstein

La estructura de un modelo Hammerstein se ilustra en la Figura 3. Consiste en una no linealidad estática \mathcal{N}_h seguida de un sistema $\mathcal{L}(q)$ lineal e invariante en el tiempo. En este caso, la salida final del modelo se puede escribir como: $y(k) = \mathcal{L}(q) v(k) = \mathcal{L}(q) \mathcal{N}_h(u(k))$. Luego, mediante la representación paramétrica de las ecuaciones 2 y 3, $y(k)$ es:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k) &= \left(\sum_{i=1}^M h_i B_i(q^{-1}) \right) \left(\sum_{j=1}^N p_j g_j(u(k)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N h_i p_j B_i(q^{-1}) g_j(u(k)) \end{aligned} \quad (14)$$

Como en el caso Wiener, sin pérdida de generalidad, se considerará que $p_1 = 1$. Según Gómez y Baeyens (2004) es posible formular la siguiente regresión lineal:

$$\hat{y}(k) = \theta^T \phi_k \quad (15)$$

donde

$$\theta = [p_1 h_1, p_2 h_1, \dots, p_N h_1, p_1 h_2, \dots, p_N h_M]^T \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \phi_k &= [B_1(q^{-1})g_1(u(k)), B_1(q^{-1})g_2(u(k)), \dots, B_1(q^{-1}) \\ &g_N(u(k)), B_2(q^{-1})g_1(u(k)), B_2(q^{-1})g_2(u(k)), \dots, \\ &B_M(q^{-1})g_{N-1}(u(k)), B_M(q^{-1})g_N(u(k))]^T. \end{aligned} \quad (17)$$

Un estimado $\hat{\theta}$ de θ puede calcularse minimizando con criterio cuadrático $\epsilon(k) = y(k) - \theta^T \phi_k$ (Gómez and Baeyens, 2004). Esta solución es similar a la ecuación (11), pero en este caso:

$$\Gamma = [y(1), y(2), \dots, y(K)]^T \quad (18)$$

$$\Phi_K = [\phi_1, \dots, \phi_K] \quad (19)$$

Notar que la dimensión del vector θ es $N.M$, mientras que en el caso Wiener la dimensión es $N + M - 1$.

Por último, los parámetros \hat{p}_i ($i = 2, \dots, N$), y \hat{h}_i ($i = 1, \dots, M$) se deben estimar a partir de $\hat{\theta}$. En Gómez y Baeyens (2004) se provee una solución basada en Descomposición en Valores Singulares (SVD).

3. IDENTIFICACIÓN ROBUSTA DE MODELOS ORIENTADOS A BLOQUES

En esta Sección se desarrollará una metodología para caracterizar las incertidumbres del modelo nominal obtenido en la

Sección 2. Para realizar esto, se introducen un conjunto de parámetros \mathcal{H} para el bloque lineal dinámico y un conjunto \mathcal{P} para los parámetros del bloque no lineal (es decir, \mathcal{N}_w^{-1} para el modelo Wiener y \mathcal{N} para el modelo Hammerstein):

$$\mathcal{H} = \{h : h_i^l \leq h_i \leq h_i^u, \quad 1 \leq i \leq M\} \quad (20)$$

$$\mathcal{P} = \{p : p_i^l \leq p_i \leq p_i^u, \quad 1 \leq i \leq N\} \quad (21)$$

donde los subíndices i indican el i -ésimo elemento de un vector.

3.1 Modelo Wiener incierto

Sea la siguiente hipótesis:

Hipótesis 1: El bloque no lineal $\mathcal{N}_w^{-1} = \sum_{i=1}^N p_i g_i$ es una función invertible $\forall p \in \mathcal{P}$.

Esta suposición implica que es posible obtener el bloque no lineal \mathcal{N}_w como la inversa de la función no lineal surgida de la identificación, no sólo para el modelo nominal, sino también para cualquier modelo descrito por los parámetros de \mathcal{P} .

El objetivo es ahora hallar cotas para los parámetros del modelo Wiener. Sea la entrada u_k , el sistema lineal incierto dado por los parámetros en \mathcal{H} mapea esa entrada del siguiente modo:

$$\mathcal{V}_u = \left\{ v : v(k) = \sum_{i=1}^M h_i B_i(q^{-1}) u(k), h \in \mathcal{H} \right\} \quad (22)$$

Dada la entrada $u(k)$, el i -ésimo término de la sumatoria

$$B_i(q^{-1}) u(k)$$

es un número real, y

$$\mathcal{V}_u = \{v : v_l \leq v(k) \leq v_u\}.$$

Por otro lado, considerando la descripción incierta de los parámetros en \mathcal{P} , una cierta salida $y(k)$ correspondiente al instante de tiempo k , se mapea según (ver Figura 4):

$$\mathcal{V}_y = \left\{ v : v(k) = \sum_{i=1}^N p_i g_i(y(k)), p = [p_1 \dots p_N]^T \in \mathcal{P} \right\} \quad (23)$$

A fin de obtener un modelo incierto, se pretende que cada muestra $u(k)$, sea transformada por el modelo en la correspondiente salida $y(k)$. De la Figura 4, se tiene que el conjunto de parámetros que se ajusta a la descripción de incertidumbre de la Sección 1 es aquél que permite que $\mathcal{V}_y \cap \mathcal{V}_u \neq \emptyset$ para todo k . De este modo, la entrada $u(k)$ se mapea sobre \mathcal{V}_u a través de los modelos generados por \mathcal{H} . Dado que $\mathcal{V}_y \cap \mathcal{V}_u \neq \emptyset$, la variable intermedia $v(k)$ generará $y(k)$ a través de la inversa de \mathcal{N}_w^{-1} definida por la Hipótesis 1.

El siguiente paso es calcular las cotas sobre los parámetros que satisfacen esta condición. Para ello, se emplea la totalidad de los datos de entrada/salida disponibles.

Es importante notar que las bases lineales $B_i(q^{-1})$ son un conjunto de números reales para cada entrada $u(k)$. Sea $B(q^{-1}) u(k)$ el vector cuyo i -ésimo elemento es la base lineal $B_i(q^{-1}) u(k)$. Como los elementos de $B(q^{-1}) u(k)$ pueden

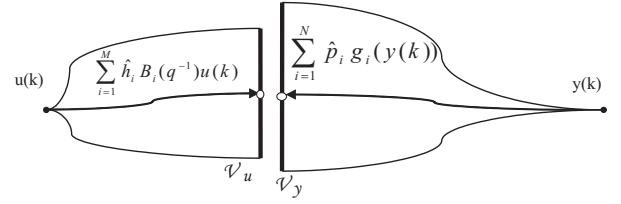


Figura 4. Conjuntos \mathcal{V}_u y \mathcal{V}_y en el modelo Wiener

ser positivos o negativos, es posible plantear una partición del vector. Para ello, se define $B^+(u(k)) \triangleq \max(B(q^{-1})u(k), 0)$ y $B^-(u(k)) \triangleq \min(B(q^{-1})u(k), 0)$ y se forma el nuevo vector

$$\gamma_B(k) \triangleq [(B^-(u(k)))^T, (B^+(u(k)))^T]^T. \quad (24)$$

Luego, la construcción del vector $B^-(u(k))$ implica mantener todos los elementos negativos en el vector y hacer cero los restantes, mientras que $B^+(u(k))$ mantiene todos los elementos positivos en el vector y hace cero los restantes.

Análogamente, como las bases no lineales $g_i(y(k))$ son números reales para cada $y(k)$, es posible definir

$$\gamma_g(k) \triangleq [(g^-(y(k)))^T, (g^+(y(k)))^T]^T \quad (25)$$

donde

$$g^+(y(k)) \triangleq \max(g(y(k)), 0) \quad (26)$$

y

$$g^-(y(k)) \triangleq \min(g(y(k)), 0). \quad (27)$$

Teorema 1: Las cotas sobre los parámetros inciertos h^l, h^u, p^l, p^u se pueden obtener mediante resolución del siguiente problema de optimización

$$\min_{h^l, h^u, p^l, p^u} \left(\alpha \sum_{i=1}^M (h_i^u - h_i^l) + (1 - \alpha) \sum_{i=2}^N (p_i^u - p_i^l) \right) \quad (28)$$

sueto a

$$[(h^l)^T, (h^u)^T, -(p^u)^T, -(p^l)^T] \begin{bmatrix} \gamma_B(k) \\ \gamma_g(k) \end{bmatrix} \geq 0; \quad (29)$$

$$[(h^u)^T, (h^l)^T, -(p^l)^T, -(p^u)^T] \begin{bmatrix} \gamma_B(k) \\ \gamma_g(k) \end{bmatrix} \leq 0; \quad (30)$$

con $k = 1, \dots, K$. El parámetro $\alpha \in (0, 1)$ es un factor de peso, de manera de distribuir la incertidumbre entre los bloques lineal y no lineal. Note que la condición de identificación robusta $\mathcal{V}_y \cap \mathcal{V}_u \neq \emptyset$ se debe cumplir $\forall k$.

Prueba: Para demostrar este teorema es necesario comprobar que las restricciones (29) y (30) se verifican. Luego, la condición $\mathcal{V}_y \cap \mathcal{V}_u \neq \emptyset$ se satisface. Dado que $\mathcal{V}_y, \mathcal{V}_u \subset \mathfrak{R}$, el problema de identificación se puede interpretar gráficamente como un problema de intersección (Figura 5). Sea

$$\mathcal{V}_u = \{v : B \leq v \leq A\} \quad (31)$$

$$\mathcal{V}_y = \{v : D \leq v \leq C\}. \quad (32)$$

donde A, B, C, D son valores reales.

De la Figura 5, surge que la cota superior de \mathcal{V}_u como función de \mathcal{H} está dada por $A = [(h^l)^T, (h^u)^T] \gamma_B$. Y se

$$\phi_k^+ \triangleq \text{máx}(\phi_k, 0) \quad (35)$$

$$\phi_k^- \triangleq \text{mín}(\phi_k, 0) \quad (36)$$

y así formar el vector:

$$\Phi_k = [(\phi_k^-)^T, (\phi_k^+)^T]^T. \quad (37)$$

Teorema 2: Las cotas θ^l, θ^u para los parámetros inciertos Θ se obtienen resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\text{mín}_{\theta^l, \theta^u} \sum_{i=1}^{NM} (\theta_i^u - \theta_i^l) \quad (38)$$

sujeto a

$$[(\theta^l)^T, (\theta^u)^T] \Phi_k \geq y_k; \quad k = 1, \dots, K \quad (39)$$

$$[(\theta^u)^T, (\theta^l)^T] \Phi_k \leq y_k; \quad k = 1, \dots, K \quad (40)$$

que es solución del Problema 1.

Figura 5. Interpretación gráfica de la intersección

tiene que: $B = [(h^u)^T, (h^l)^T] \gamma_B$, $C = [(p^l)^T, (p^u)^T] \gamma_g$ y $D = [(p^u)^T, (p^l)^T] \gamma_g$.

Basados en esta definición, la condición $\mathcal{V}_y \cap \mathcal{V}_u \neq \emptyset$ será satisfecha si y sólo si la cota superior de \mathcal{V}_u es mayor que la cota inferior de \mathcal{V}_y (o sea $A \geq D$), y si la cota inferior de \mathcal{V}_u es menor que la cota superior de \mathcal{V}_y (o sea $B \leq C$). La restricción $A - D \geq 0$ es la expresada en (29). De manera similar, la formulación matemática para $C - B \geq 0$ está dada en (30).

Es así que la solución del problema de optimización en (28)-(30) dará origen a un modelo incierto que minimiza la magnitud de la incertidumbre y a la vez asegura la inclusión de todos los datos relevados del proceso. \odot

Es importante destacar que este enfoque para resolver el problema de identificación, permite transformarlo en un problema de Programación Lineal con región factible convexa. El número de variables de optimización duplica la cantidad de parámetros del modelo y el número de restricciones duplica el de datos del proceso. Por lo tanto, esta formulación permite hallar la solución de manera eficiente.

3.2 Modelo Hammerstein incierto

Para identificar la incertidumbre presente en un modelo Hammerstein, se propone un procedimiento en dos pasos. Primero, según la regresión de (15), se calcula un conjunto de parámetros inciertos sobre la base de θ :

$$\Theta = \{\theta : \theta^l \leq \theta \leq \theta^u\}. \quad (33)$$

Luego, en un segundo paso, basado en la definición en (16), el conjunto Θ se traslada a la descripción paramétrica dada por (20)-(21).

A fin de resolver este primer paso, se formula el siguiente problema:

Problema 1: Dados dos conjuntos de datos $u(k)$ e $y(k)$ para $k = 1, 2, \dots, K$, se pretende calcular un conjunto de parámetros Θ tal que $y(k) \in \mathcal{Y}$:

$$\mathcal{Y} = \{y : y_k = \theta^T \phi_k, \theta \in \Theta\}. \quad (34)$$

El regresor $\phi_k \in \mathbb{R}^{NM}$ y depende de la entrada $u(k)$. Como los elementos de ϕ_k pueden ser positivos o negativos, resulta conveniente armar los nuevos vectores ϕ_k^+ y ϕ_k^- , de acuerdo con las siguientes definiciones:

Prueba: Es semejante a la prueba del Teorema 1. En este caso, es fácil ver que la verificación de las restricciones en (39) implica la satisfacción de una cota superior para los datos $y(k)$ y la verificación de (40) implica la satisfacción de una cota inferior para los datos. \odot

Un segundo problema para la identificación del modelo Hammerstein incierto consiste en obtener el conjunto de parámetros \mathcal{H} y \mathcal{P} acorde con las ecuaciones (20)-(21), a partir de las cotas en los parámetros θ (ecuación 33). Esto se formula como Problema 2.

Problema 2: Dado el conjunto Θ de parámetros θ definido como ecuación (33), determinar los conjuntos de parámetros \mathcal{H} y \mathcal{P} tales que

$$\mathcal{P} \otimes \mathcal{H} \supset \Theta, \quad (41)$$

donde el conjunto $\mathcal{P} \otimes \mathcal{H}$ se define como

$$\mathcal{P} \otimes \mathcal{H} = \left\{ \theta : \theta = [p^T h_1, p^T h_2 \dots, p^T h_M]^T \right\} \quad (42)$$

con $p \in \mathcal{P}$; $h \in \mathcal{H}$.

La relación bilineal entre los parámetros desconocidos es típica de modelos Hammerstein (Falugi *et al.*, 2005; Gómez and Baeyens, 2004). El objetivo es hallar conjuntos \mathcal{H} y \mathcal{P} que ajusten a Θ . Esta situación se pone de manifiesto en la Figura 6. El sistema físico (de estructura conocida pero parámetros desconocidos) se excita con la secuencia de entrada $u(k)$, para dar $y(k)$. En un primer paso, se hace la identificación de Θ . Como se trata de identificación robusta, las salidas que se generan con los datos de entrada del proceso y el Θ identificado, contienen a los datos reales de salida colectados. En un segundo paso, se emplea Θ para hallar el conjunto $\mathcal{P} \otimes \mathcal{H}$. El método de identificación robusta propuesto es conservativo y, en consecuencia, el conjunto de salidas generadas $\mathcal{P} \otimes \mathcal{H}$ contendrá aquéllas generadas mediante Θ .

Ahora, con la definición de θ (16) y las cotas θ^l y θ^u , se pueden hallar las cotas para los parámetros h^l, h^u, p^u y p^l .

Para continuar, se considera la siguiente partición del vector θ :

$$\theta = [\theta_1^T, \theta_2^T \dots, \theta_M^T]^T \quad (43)$$

donde

Figura 6. Conjuntos de salida generados por $\mathcal{P} \otimes \mathcal{H}$ y Θ

$$\theta_i \triangleq p h_i, \text{ con } i = 1, \dots, M. \quad (44)$$

Luego, para hallar solución al Problema 2 se introduce el siguiente Teorema.

Teorema 3:

Las cotas h^l , h^u , p^l , p^u para los parámetros inciertos h y p se pueden calcular resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\min_{h^l, h^u, p^u, p^l} \left(\alpha \sum_{i=1}^M (h_i^u - h_i^l) + (1 - \alpha) \sum_{i=2}^N (p_i^u - p_i^l) \right) \quad (45)$$

sujeto a

$$p^l \leq p \leq p^u, \quad (46)$$

$$h^l \leq h \leq h^u, \quad (47)$$

$$\max_{h_i^l, h_i^u, p^u, p^l} (p h_i) \geq \theta_i^u \quad i = 1, \dots, M \quad (48)$$

$$\min_{h_i^l, h_i^u, p^u, p^l} (p h_i) \leq \theta_i^l \quad i = 1, \dots, M \quad (49)$$

con $\alpha \in (0, 1)$ un factor de diseño que permite particionar la incertidumbre entre los dos bloques del modelo. La solución del problema formulado en (45)-(49) resuelve el Problema 2.

Prueba: Mediante el planteo y solución del Problema 1 se resolvió la identificación robusta de los parámetros θ . Esto proporciona las cotas inferior y superior θ_i^l y θ_i^u . Por la definición de la ecuación (16) se tiene $\theta_i = p h_i$. Basado en estos resultados parciales, se desea hallar las mejores cotas para los parámetros originales del modelo Hammerstein (h y p). Esto implica la optimización formulada en (45). El criterio conservativo expresado en (41), proporciona las siguientes restricciones:

$$\theta_i^u \leq (p h_i)^u, \quad i = 1, \dots, M \quad (50)$$

$$\theta_i^l \geq (p h_i)^l, \quad i = 1, \dots, M \quad (51)$$

Debido a la bilinealidad en $p h_i$, y la posible presencia de elementos negativos, los términos de la derecha en (50)-(51) se pueden encontrar en el conjunto generado por combinatoria de las cotas individuales para p y h_i . Entonces:

$$(p h_i)^u = \max_{h_i^l, h_i^u, p^u, p^l} (p h_i), \quad i = 1, \dots, M \quad (52)$$

$$(p h_i)^l = \min_{h_i^l, h_i^u, p^u, p^l} (p h_i), \quad i = 1, \dots, M \quad (53)$$

lo cual genera las ecuaciones (48)-(49). \odot

En consecuencia, la formulación general del problema de identificación robusta se transforma en uno de optimización no

lineal. De esta manera, hallar la solución al Problema 2 puede resultar complicado y demandante en cuanto a tiempo de cómputo.

Así surge un enfoque simplificado para la identificación de cotas sobre p y h , que puede ser útil y aplicable bajo ciertas suposiciones³. La principal ventaja es que transforma el problema original en uno de Programación Lineal.

Teorema 4: Se define $\pi_i \triangleq 1/h_i$ (Falugi *et al.*, 2005), luego, las cotas sobre los parámetros inciertos π^l , π^u , p^u y p^l se calculan resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\pi^l, \pi^u, p^u, p^l} \left(\beta \sum_{i=1}^M (\pi_i^u - \pi_i^l) + (1 - \beta) \sum_{i=1}^N (p_i^u - p_i^l) \right) \quad (54)$$

sujeto a

$$(p^j) - \theta^u \pi_i^j \geq 0 \quad \text{para algún } p^j \in \mathcal{P}, \quad \frac{1}{\pi_i^j} = h_i^j, h_i^j \in \mathcal{H} \quad (55)$$

$$(p^k) - \theta^l \pi_i^k \leq 0 \quad \text{para algún } p^k \in \mathcal{P}, \frac{1}{\pi_i^k} = h_i^k, \quad h_i^k \in \mathcal{H}, \text{ con } j \neq k \quad (56)$$

$$p_i^l \leq p_i \leq p_i^u, \quad i = 1, \dots, N \quad (57)$$

$$\pi_i^l \leq \pi_i \leq \pi_i^u, \quad i = 1, \dots, M \quad (58)$$

donde el parámetro $\beta \in (0, 1)$ es análogo a α en el Problema 2.

Prueba:

Si se realiza la misma partición para las cotas que aquella realizada para el parámetro θ , y se considera el objetivo de representar toda la posible incertidumbre en Θ , luego se escribe las condiciones del Problema 2 como:

$$p h_i \geq \theta_i^u, \quad (59)$$

$$p h_i \leq \theta_i^l, \quad (60)$$

para $i = 1, \dots, M$. Con la definición $\pi_i = 1/h_i$, y dado $h_i \geq 0$, se tiene:

$$p \geq \theta_i^u \pi_i, \quad (61)$$

$$p \leq \theta_i^l \pi_i, \quad (62)$$

o, en forma equivalente:

$$p - \theta_i^u \pi_i \geq 0, \quad (63)$$

$$p - \theta_i^l \pi_i \leq 0. \quad (64)$$

Sin embargo, si $h_i < 0$, luego las desigualdades cambian a:

$$p - \theta_i^u \pi_i \leq 0, \quad (65)$$

$$p - \theta_i^l \pi_i \geq 0. \quad (66)$$

Notar que, en tal caso, también se modifican las ecuaciones (55)-(56).

Luego, las desigualdades se mantienen $\forall p_i, h_i$ tal que $p_i^l \leq p_i \leq p_i^u$ ($i = 1, \dots, N$) y $\pi_i^l \leq \pi_i \leq \pi_i^u$ ($i = 1, \dots, M$). \odot

³ Una limitación de este enfoque ocurre cuando alguno de los parámetros h_i cambia el signo, o sea cuando $\text{sign}(h_i^l) \neq \text{sign}(h_i^u)$.

3.3 Comentarios sobre el método de identificación

Se debe remarcar que el método para identificación del modelo Hammerstein incierto involucra dos pasos. En el primero, se determinan valores extremos para un conjunto de parámetros “ficticios”(los θ_i) definidos a partir de los parámetros verdaderos (h_i y p_i). Con este resultado, en un segundo paso, se calculan las cotas para los parámetros originales del modelo. La ventaja es que el primer paso del proceso permite reducir sustancialmente el problema de optimización, pues se calcula un conjunto reducido de parámetros usando toda la información suministrada por los datos, es decir, las K muestras $[u_k, y_k]$. Luego, el problema de optimización no lineal correspondiente al segundo paso, queda también reducido, ya que usa los resultados del paso anterior para determinar las cotas de los parámetros verdaderos del modelo.

Otro aspecto a destacar es que, si bien en la formulación del problema de identificación de modelos Wiener y Hammerstein se supuso $p_1 = 1$, resulta igualmente válido reemplazar la condición de identificabilidad estructural por $h_1 = 1$.

4. EJEMPLOS

4.1 Ejemplo 1

Para ilustrar el enfoque de identificación propuesto, se considera un modelo Wiener reportado para una válvula de control (Wigren, 1993). El mismo tiene la siguiente descripción matemática:

$$v(k) = \frac{0,1044 q^{-1} + 0,0883 q^{-2}}{1 - 1,4138 q^{-1} + 0,6065 q^{-2}} u(k) \quad (67)$$

$$y(k) = \mathcal{N}(v(k)) = \frac{v(k)}{\sqrt{0,10 + 0,90 v^2(k)}} \quad (68)$$

donde $u(k)$ es la salida del controlador y la posición del vástago es $v(k)$. El flujo a través de la válvula está dado por $y(k)$. Para construir la entrada acorde con el ejemplo de Wigren, generamos una señal aleatoria de media nula con valores entre -0.5 y 0.5. La entrada $u(k)$ la construimos manteniendo cada valor de la secuencia anterior durante seis intervalos de muestreo.

Se supone un modelo dado por un sistema de Laguerre seguido de una no linealidad de tipo polinomial. Para el bloque lineal, se consideran tres términos de Laguerre con polo dominante en -0.6. Para llevar a cabo la identificación, se considera $M = 3$ y $N = 3$. Se especifica la condición para identificabilidad estructural $h_1 = 1$. La solución del problema de optimización en (28)-(30) arroja el resultado que se muestra en la Tabla 1.

Tabla1. Cotas en los parámetros del modelo

PARÁMETRO	COTAS
h_1	[1,0000, 1,0000]
h_2	[-0,0875, 0,0683]
h_3	[0,8095, 0,8095]
p_1	[1,2075, 1,7172]
p_2	[1,2289, 1,5159]
p_3	[-1,2018, -0,6426]

La Figura 7 ilustra las cotas sobre los conjuntos \mathcal{V}_u y \mathcal{V}_y . Se puede observar que para este ejemplo se verifica la restricción $\mathcal{V}_u \cap \mathcal{V}_y \neq \emptyset$.

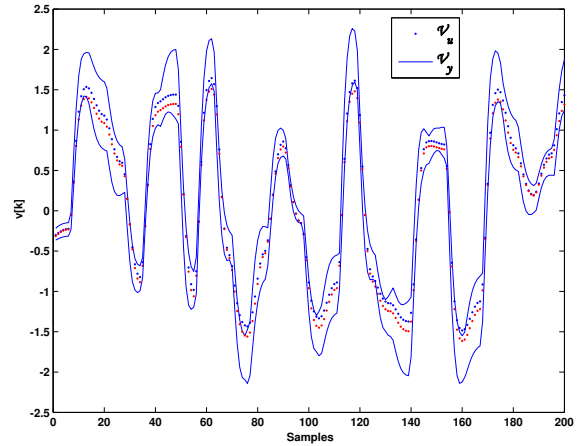


Figura 7. Cotas sobre \mathcal{V}_u (punteado) y cotas sobre \mathcal{V}_y (continuo)

4.2 Ejemplo 2

El sistema Hammerstein aquí considerado es semejante al reportado por Falugi *et al.* (2005). En este caso, se supone una no linealidad polinomial seguida de un sistema con respuesta al impulso finita (FIR). Los parámetros del modelo “real” son: $p = [1 \ 3 \ 2]^T, h = [1 \ 2 \ 0,3 \ 4 \ 1 \ 1 \ 0,5]^T$. Luego, $N = 3$ y $M = 7$.

Para coleccionar los datos experimentales, se excitó el sistema Hammerstein con una señal aleatoria con valores entre -0.5 y 0.5, de media nula y con distribución uniforme.

Tras resolver el Problema 1, se obtuvieron las siguientes cotas para θ :

$$\theta_l = [1,3222 \ 2,9843 \ 1,6597 \ 2,0068 \ 5,7604 \ 3,9391 \ 0,1322 \ 0,8124 \ 0,7763 \ 3,9319 \ 11,9125 \ 8,0932 \ 0,8725 \ 3,2395 \ 2,2254 \ 1,0569 \ 3,0748 \ 1,7546 \ 0,2850 \ 1,6632 \ 0,9446]^T$$

$$\theta_u = [1,3222 \ 2,9843 \ 1,6597 \ 2,3526 \ 5,7604 \ 3,9391 \ 0,2869 \ 0,8124 \ 0,7763 \ 3,9692 \ 11,9125 \ 8,0932 \ 0,9134 \ 3,2395 \ 2,2254 \ 1,3216 \ 3,0748 \ 1,7546 \ 0,6263 \ 1,6632 \ 0,9446]^T$$

Resta resolver el Problema 2. Sin pérdida de generalidad, se elimina un grado de libertad haciendo $p_1 = 1$. Luego, se obtienen las cotas de la Tabla 2 para los parámetros h_i y p_i .

Tabla 2. Cotas en los parámetros del modelo

PARÁMETRO	COTAS
h_1	[0,9600, 1,3222]
h_2	[1,9013, 2,3526]
h_3	[0,1322, 0,2869]
h_4	[3,9319, 3,9692]
h_5	[0,8725, 1,0692]
h_6	[1,0149, 1,3216]
h_7	[0,2850, 0,6263]
p_1	[1,0000, 1,0000]
p_2	[3,0297, 3,0297]
p_3	[1,7289, 2,7059]

La Figura 8 ilustra que los datos registrados están entre las cotas inferior y superior obtenidas mediante identificación robusta.

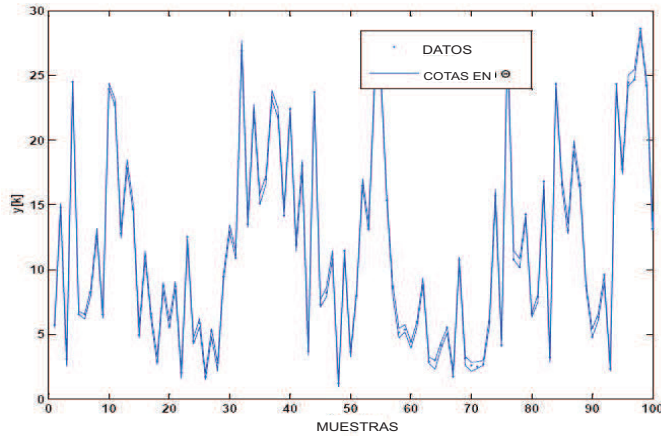


Figura 8. Datos de salida y cotas robustas

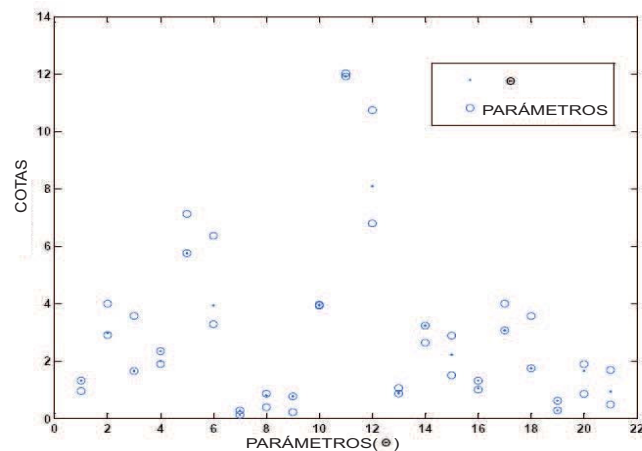


Figura 9. Cotas sobre θ y extremos para h_i y p_i

La Figura 9 muestra las cotas sobre θ y los valores extremos que se obtienen con los parámetros identificados h_i y p_i . Se observa que se verifican las restricciones impuestas por las ecuaciones (48)-(49).

4.3 Ejemplo 3

Ahora consideraremos un ejemplo de modelo Hammerstein reportado en la literatura (Gómez and Baeyens, 2000). Se asume que el bloque no lineal verdadero es:

$$\mathcal{N}(u(k)) = 0,8585 u(k) + 0,0149 u^2(k) - 0,5113 u^3(k) - 0,0263 u^4(k) \quad (69)$$

y el sistema lineal es dado por

$$\mathcal{L}(z) = \frac{z^2 + 0,7z - 1,5}{z^3 + 0,9z^2 + 0,15z - 0,002} \quad (70)$$

Como en Gómez y Baeyens (2000), se considera la siguiente excitación del sistema

$$u(k) = \sin(0,00057\pi k) + 0,5\sin(0,0015\pi k) + 0,3\sin(0,0025\pi k) + 0,1\sin(0,0035\pi k). \quad (71)$$

Para realizar la identificación proponemos el siguiente modelo Hammerstein,

$$\mathcal{N}(u(k)) = \sum_{i=1}^N p_i u^i(k) \quad (72)$$

$$\mathcal{L}(q) = \sum_{i=1}^M h_i B_i(q^{-1}) \quad (73)$$

con $N = 3$ y $M = 3$. Para el bloque lineal seleccionamos un modelo Laguerre con un polo dominante ubicado en $-0,01$.

Luego de resolver el Problema 1, se obtienen las siguientes cotas sobre θ :

$$\theta_l = [4,8191 \ 0,1374 \ 4,1631 \ -8,2553 \ -0,3125 \ -9,2320 \ 3,5180 \ 0,1738 \ 5,0191]^T$$

$$\theta_u = [4,8231 \ 0,1374 \ 4,1631 \ -8,2553 \ -0,3125 \ -9,2320 \ 3,5180 \ 0,1738 \ 5,0191]^T$$

Entonces, se obtiene la solución del Problema 2, considerando la restricción de identificabilidad $p_1 = 1$. La solución del problema de optimización no lineal definido por el Teorema 3 se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3. Cotas en los parámetros del modelo mediante programación no lineal

PARÁMETRO	COTAS
h_1	[3,6999, 4,8231]
h_2	[-8,4129, -7,9207]
h_3	[3,5180, 4,4062]
p_1	[0,9999, 1,0000]
p_2	[0,0371, 0,0394]
p_3	[1,1251, 1,1391]

Además el problema se soluciona mediante el problema de programación lineal (Teorema 4), cuyos resultados se reportan en la Tabla 4.

Tabla 4. Cotas en los parámetros del modelo mediante programación lineal

PARÁMETRO	COTAS
h_1	[3,8091, 4,8231]
h_2	[-8,6612, -8,2553]
h_3	[3,5180, 4,5923]
p_1	[0,9999, 1,0000]
p_2	[0,0360, 0,0378]
p_3	[1,0929, 1,0929]

La Figura 10 describe las simulaciones temporales de los datos y las obtenidas con las cotas sobre los parámetros θ . De este gráfico resulta claro que los datos están dentro de la banda de incertidumbre.

Las Figuras 11 y 12 muestran las cotas de los parámetros θ obtenidos por el problema 1 y los obtenidos mediante los valores de h_i y p_i cuando se calculan por el procedimiento no lineal y lineal, respectivamente.

5. CONCLUSIONES

Los modelos orientados a bloques constituyen una interesante alternativa para la representación de sistemas no lineales en diversos campos de aplicación. Un caso particular son los modelos Wiener y Hammerstein, los cuales han sido ampliamente

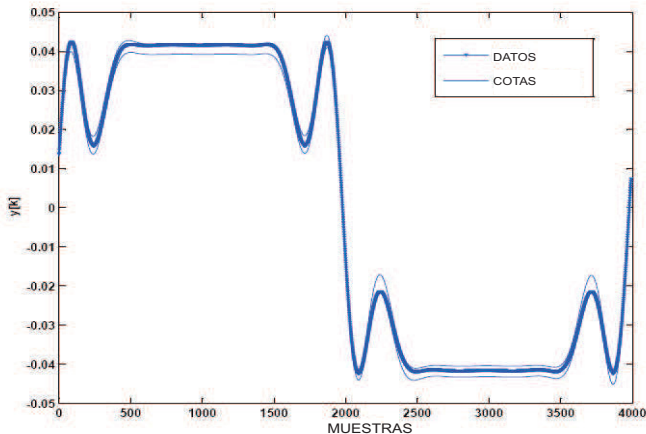


Figura 10. Cotas sobre θ y extremos para h_i y p_i obtenidos con programación no lineal

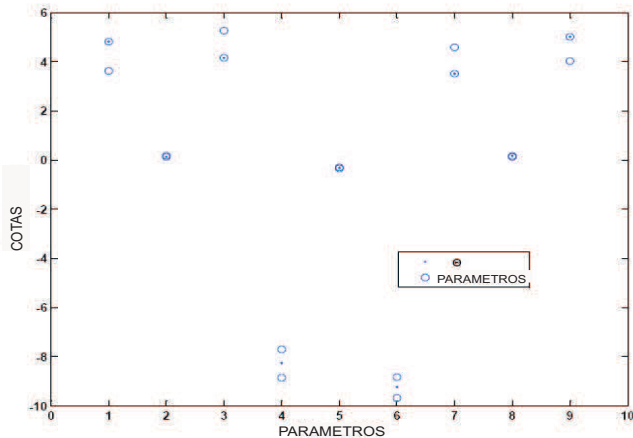


Figura 11. Cotas sobre θ y extremos para h_i y p_i obtenidos con programación no lineal

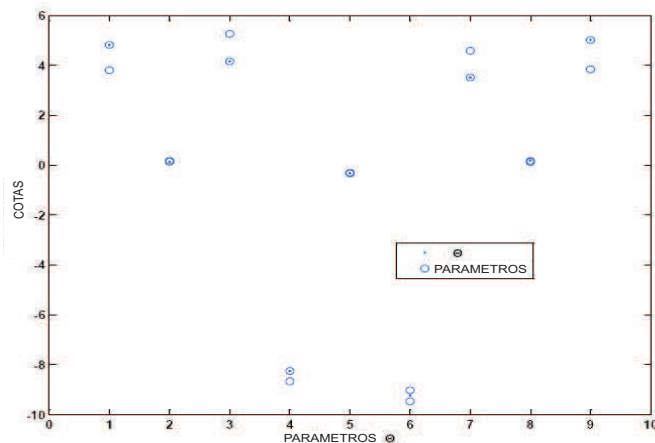


Figura 12. Cotas sobre θ y extremos para h_i y p_i obtenidos con programación lineal

utilizados. En este trabajo se presentó un algoritmo no iterativo para la identificación de modelos Wiener y Hammerstein con incertidumbre. El método se basa en la identificación de cotas en los parámetros de dichos modelos. El enfoque adoptado permite hacer una identificación robusta, en el sentido que la totalidad de los datos puede ser reproducida por la familia de

modelos obtenida. Cabe señalar que si bien se abordó el problema para sistemas SISO, la metodología puede ser extendida a sistemas MIMO. Esta extensión será abordada en un trabajo futuro.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por CONICET y Universidad Nacional del Sur.

REFERENCIAS

- Belforte, G. and P. Gay (2001). Discrete time Hammerstein model identification with unknown but bounded errors. *IEE Proc. Control Theory Applications* **148**, 6, 523–529.
- Celka, P. and P. Colditz (2002). Nonlinear nonstationary Wiener model of infant EEG seizures. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **49**, 556–564.
- Falugi, P., L. Giarré and G. Zappa (2005). Approximation of the feasible parameter set in worst-case identification of Hammerstein models. *Automatica* **41**, 1017–1024.
- Fruzzetti, K.P., A. Palazoglu and K.A. McDonald (1997). Nonlinear model predictive control using Hammerstein models. *Journal of Process Control* **7**, 31–41.
- Gómez, J.C. and E. Baeyens (2000). Identification of multivariable Hammerstein systems using rational orthonormal bases. *IEEE Conference on Decision and Control* **3**, 2849–2854.
- Gómez, J.C. and E. Baeyens (2004). Identification of block-oriented nonlinear systems using orthonormal bases. *Journal of Process Control* **14**, 685–697.
- Greblicki, W. (1994). Nonparametric identification of Wiener systems by orthogonal series. *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**, 2077–2086.
- Greblicki, W. (1997). Nonparametric approach to Wiener systems identification. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **44**, 538–545.
- Hadjiloucas, S., A. Izhac, R.K.H. Galvao, J.W. Bowen and V.M. Becerra (2004). State-space model identification of a wireless THz network. *International Conference on Infrared and Millimeter Waves* pp. 375–376.
- Hagenblad, A. and L. Ljung (2000). Maximum likelihood estimation of Wiener models. *IEEE Conf. on Decision and Control* **3**, 2417–2418.
- Huang, A., J.M.A. Tanskanen and I.O. Hartimo (1998). Design of optimum power estimator based on Wiener model applied to mobile transmitter power control. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems* **8**, 249–252.
- Hunter, I.W. and M.J. Korenberg (1986). The identification of nonlinear biological systems: Wiener and Hammerstein cascade models. *Biological Cybernetics* **55**, 135–144.
- Kalafatis, A., N. Arifin, L. Wang and W.R. Cluett (1995). A new approach to the identification of pH processes based on Wiener model. *Chemical Engineering Science* **50**, 3693–3701.
- Kozek, M. and S. Sinanovic (2007). Identification of Hammerstein models using optimal local linear models. *Proc. EUROSIM 2007*, 9-13 Sept. 2007, Ljubljana, Eslovenia.
- Lussón Cervantes, A., O. Agamennoni and J. Figueroa (2003). Robust Identification of PWL-Wiener Models: Use in Model Predictive Control. *Latin American Applied Research* **33**, 435–442.
- Lussón Cervantes, A., O. Agamennoni and J. Figueroa (2003). A Nonlinear Model Predictive Control System Based on

- Wiener Piecewise Linear Models. *Journal of Process Control* **13**, 655–666.
- Nelles, O. (2001). *Nonlinear system identification*. Springer. Berlin.
- Norquay, S.J., A. Palazoglu and J.A. Romagnoli (1998). Model predictive control based on wiener models. *Chemical Engineering Science* **53**, 75–84.
- Pajunen, G.A. (1987). Comparison of linear and nonlinear adaptive control of a pH process. *IEEE Control Systems Magazine* **7**, 39–44.
- Pajunen, G.A. (1992). Adaptive control of wiener type nonlinear systems. *Automatica* **28**, 781–785.
- Pearson, R.K. and M. Pottmann (2000). Gray-box identification of block-oriented nonlinear models. *Journal of Process Control* **10**, 301–315.
- Pottmann, M. and R.K. Pearson (1998). Block-oriented NARMAX models i-th output multiplicities. *AIChE Journal* **44**, 131–140.
- Skrjanc, I., S. Blazic and O. Agamennoni (2005). Interval fuzzy modeling applied to PWL-Wiener models with uncertainties. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B* **35**, 5, 1092–1095.
- Stapleton, J. and S. Bass (1985). Adaptive noise cancellation for a class of nonlinear dynamic reference channels. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **CAS-32**, 143–150.
- Sznaier, M. (2009). Computational complexity analysis of set membership identification of Hammerstein and Wiener systems. *Automatica* **45**, 701–705.
- Visala, A., H. Pitkänen and J. Paanajärvi (1999). Wiener-NN models and robust identification. *International Joint Conference on Neural Networks* **3**, 2188–2193.
- Wigren, T. (1993). Recursive prediction error identification using the nonlinear wiener model. *Automatica* **29**, 1011–1025.
- Zhu, Y. (1999). Distillation column identification for control using Wiener model. *American Control Conference* **5**, 3462–3466.