

MODELADO Y ESTABILIZACIÓN DE UN HELICÓPTERO CON CUATRO ROTORES

P. Castillo*, P. García**, R. Lozano*, P. Albertos**,

* *Heudiasyc, UTC, UMR CNRS 6599, B.P. 20529 60205
Compiègne (Francia). e-mail: castillo,lozano@hds.utc.fr*

** *Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática
Universidad Politécnica de Valencia P.O. Box. 22012,
E-46071, Valencia, España. e-mail: pedro,pggil@isa.upv.es*

Resumen: En este trabajo se presenta una estrategia de control no lineal para la estabilización de un helicóptero de cuatro rotores. El algoritmo de control se basa en el análisis de Lyapunov y en la técnica de las saturaciones anidadas. La estrategia de control es muy fácil de implementar, siendo tal que es independiente del helicóptero de cuatro rotores que se pretenda controlar. El ajuste de las ganancias del algoritmo de control es muy sencillo, en comparación con otros algoritmos propuestos en la literatura. La estrategia de control propuesta ha sido implementada sobre un sistema de tiempo real para el control de un mini-helicóptero de cuatro rotores. Los resultados obtenidos, comparados con un algoritmo lineal LQR, muestran que las prestaciones del algoritmo propuesto son muy superiores a las obtenidas a partir de un algoritmo lineal LQR. *Copyright©2007 CEA-IFAC*

Palabras clave: Estabilización de helicópteros, plataforma experimental, ecuaciones de Euler-Lagrange, Lyapunov, modelado y control no lineal.

1. INTRODUCCIÓN

Recientes avances tecnológicos, como la miniaturización de sensores (centrales inerciales, GPS, cámaras, etc), el desarrollo de micro-controladores, etc, han permitido realizar sistemas empujados que permiten la implementación de plataformas experimentales para el desarrollo de sistemas autónomos.

Una clase de sistemas autónomos, de obvio interés, es de los vehículos aéreos, también llamados drones o UAVs (*Unmanned Autonomous Vehicles*).

Un drone no es un avión, ni un misil. Un drone se define como un vehículo aéreo no tripulado controlado a distancia, automático o semi-automático,

generalmente recuperable al final del vuelo, susceptible de llevar diferentes cargas, que le servirán de ayuda para efectuar diferentes tareas durante un vuelo y que pueden variar en función de sus capacidades. El drone puede ser un instrumento de reconocimiento, de observación, de adquisición de objetivos, etc.

Un sistema drone está compuesto generalmente de dos partes, la estación en tierra y la parte aérea. La estación en tierra fija o móvil asegura la preparación de la misión, la explotación y la comunicación de los datos con la parte aérea y los organismos que controlan y coordinan el drone. Esta parte también está compuesta de medios de despegue y de recuperación, así como de medios de mantenimiento y de reacondicionamiento. La parte aérea está compuesta de una o varias platafor-

mas aéreas compuestas de una carga útil adaptada a la misión (cámara, GPS, central inercial, etc) y de un sistema de comunicación de información.

Los drones son vehículos aéreos de talla reducida, menos caros y más simples de construir que un avión. También son más discretos y su pérdida no es tan sensible o costosa como la de un vehículo convencional. El tamaño de los drones puede variar (desde algunos centímetros hasta varios metros), al igual que su forma y su tipo de propulsión, por ejemplo algunos están equipados de reactores, otros de hélices o rotores, etc.

Las aplicaciones de los drones son varias, las cuales abarcan desde las civiles hasta las militares, siendo estas últimas las más empleadas o conocidas. Los drones han sido en su mayor parte desarrollados en los conflictos militares. Dentro de sus aplicaciones civiles, las más deseables, tenemos la vigilancia de tráfico en carreteras, las operaciones de búsqueda aérea y salvamento, la recolección de información para la predicción meteorológica, la vigilancia de bosques o detección de fuegos, etc.

Las configuraciones de los drones pueden variar, desde los que utilizan rotores (uno, dos, tres o múltiples rotores), hasta los que utilizan alas como los pájaros. Dentro de las configuraciones que utilizan rotores, se encuentran los helicópteros a cuatro motores, que son vehículos complejos y difíciles de controlar, poseyendo todas las propiedades aerodinámicas de los helicópteros clásicos. El interés de estudiar este tipo de helicópteros se deriva de su versatilidad, y de su maniobrabilidad, permitiéndoles la ejecución de un gran número de tareas.

Cabe mencionar, que en algunas ocasiones los vehículos aéreos en miniatura se utilizan simplemente como plataformas tecnológicas, útiles para la validación de determinados conceptos aerodinámicos, leyes de control o ciertos equipos y/o programas informáticos. Estas plataformas son de gran utilidad, ya que permiten observar y analizar los límites del vehículo con la finalidad de verificar su confiabilidad y desempeño en vuelo.

Desde hace algunos años, algunos grupos de investigación en el área de control automático, robótica y mecatrónica se interesan cada vez más por el estudio y el desarrollo de leyes de control no lineales para controlar la dinámica de dichos vehículos (Bouabdallah *et al.*, 2004). Esto es debido principalmente a la naturaleza no lineal de las ecuaciones que modelan el comportamiento dinámico de esos vehículos, y a la necesidad de tener controladores de vuelo los más robustos posibles.

El principal interés de este artículo se centra en la estabilización de vehículos aéreos (en concreto de un helicóptero con cuatro motores) utilizando leyes de control no lineal (Castillo *et al.*, 2005a).

Este interés está ligado a la necesidad de comprender los fenómenos aerodinámicos de los helicópteros (principalmente en vuelo estacionario). El despegue y aterrizaje de los helicópteros son etapas difíciles de controlar a causa de las condiciones (efecto vortex, etc) que el helicóptero encuentra en ese momento. Los principales trabajos que se encuentran en la literatura acerca de la estabilización del quadri-motor son muy recientes. Las estrategias de control propuestas utilizan generalmente técnicas de linealización, de backstepping y de H_∞ (Mistler *et al.*, 2001), (Altug *et al.*, 2003), (Chen and Huzmezan, 2003).

Si bien destacar, que la mayor parte de los trabajos propuestos son de carácter teórico, de forma que muy pocos de ellos han sido validados en experiencias reales. Parte de los trabajos que han sido probados en experiencias reales se han desarrollado para prototipos de helicópteros con dos o tres grados de libertad. En otros casos el helicóptero estaba montado sobre una plataforma que le sirve como base y al mismo tiempo ayuda a la estabilización del mismo. En (Altug *et al.*, 2003) se presenta un interesante experimento sobre la estabilización de un quadri-motor utilizando un sistema de visión como sensor de posición y orientación. Si bien, a partir de las gráficas que muestran los resultados experimentales se puede observar que los errores en la orientación y en la posición son muy grandes, lo cual indica que es necesario hacer una mejora y/o ajuste en la ley de control o bien en la medición de la posición y la orientación. En (Hanford *et al.*, 2003) se desarrolla un prototipo de un helicóptero con cuatro motores montado sobre una base que le permite moverse en 3 dimensiones (3D). El control utilizado es un control lineal PI.

En los últimos años, se han propuesto varios modelos del quadri-motor. La mayor parte de ellos obtienen el modelo tomando el vehículo como un cuerpo rígido (Castillo *et al.*, 2005b), (Tarek *et al.*, 2002), algunos otros (McKerrow, 2004), (Tanaka *et al.*, 2004) agregan algunos términos aerodinámicos en el modelo matemático, como son el cálculo de la matriz de inercia, los momentos giroscópicos y de coriolis. Lamentablemente, el cálculo de la ley de control para estabilizar dicho vehículo considera o bien el sistema linealizado o simplemente que dichos términos son muy pequeños y son despreciados. Destacar por último que muy pocos modelos matemáticos han sido verificados en experiencias reales.

En (Tanaka *et al.*, 2004) se presenta un modelo dinámico, junto a una serie de experiencias de tiempo real de la parte rotacional de un quadri-motor, el controlador propuesto está basado en la técnica "Fuzzy". El modelo presentado de la dinámica rotacional se puede considerar bastante

completo, el único inconveniente es que al hacer las experiencias, éstas fueron realizadas sobre un helicóptero montado en una base fija. Dicha base sirve como un compensador de las dinámicas rápidas del helicóptero, y ayuda al mismo tiempo a estabilizar el vehículo, razón por la cual las experiencias mostradas no se aproximan a la realidad.

Este trabajo amplía con carácter tutorial y experimental el trabajo previamente propuesto en (Castillo *et al.*, 2005b). Está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presentan las principales características del quadri-motor. En la sección 3 se describe el modelo dinámico, y en la sección 4 se desarrolla la estrategia de control para controlar este vehículo. En la sección 5 se muestran los resultados obtenidos por simulación. La plataforma experimental desarrollada se presenta en la sección 6 y en la sección 7 se muestran los resultados experimentales. Finalmente en la sección 8 se presentan las conclusiones del trabajo expuesto.

2. CARACTERÍSTICAS DEL QUADRI-MOTOR

El helicóptero con cuatro motores, también conocido como quadri-motor o X4, es un prototipo muy completo para experimentar sobre los fenómenos aerodinámicos que ocurren en los vehículos aéreos que pueden realizar vuelo estacionario.

El quadri-motor, a diferencia del helicóptero clásico, no posee plato cíclico y se controla variando únicamente la velocidad angular de cada uno de sus cuatro motores. La fuerza f_i producida por el motor i es proporcional al cuadrado de la velocidad angular, esto es, $f_i = k\omega_i^2$. Notar que un motor sólo puede girar en una dirección fija, por lo cual la fuerza producida será siempre positiva (ver figura 1).

Algunas de sus principales características del quadri-motor son, que el motor delantero y el motor trasero rotan en sentido anti-horario, mientras que los otros dos motores rotan en el sentido de las manecillas del reloj. Con ello, los efectos giroscópicos y los momentos aerodinámicos tienden a cancelarse en vuelo estacionario. La entrada de control principal o fuerza principal es la suma de cada fuerza producida por cada motor, esto es:

$$u = \sum_{i=1}^4 f_i$$

El momento de *pitch*¹ (ver figura 2) es producido por la diferencia de $f_1 - f_3$, el momento *roll* es

¹ En este artículo se utilizará el nombre en inglés de los tres ángulos de Euler (ψ - yaw, θ - pitch, ϕ - roll)

Figura 1. Esquema de fuerzas del quadri-motor y pares de cada motor.

producido por $f_2 - f_4$, y el momento de *yaw* es la suma de $\tau_{M_1} + \tau_{M_2} + \tau_{M_3} + \tau_{M_4}$, donde τ_{M_i} es el momento de reacción del motor i (figura 1).

El esfuerzo de torsión² del motor es opuesto por una fricción aerodinámica τ_{drag} , tal que:

$$I_{rot}\dot{\omega}_i = \tau_{M_i} - \tau_{drag} \quad (1)$$

donde I_{rot} es el momento de inercia del motor alrededor de su eje.

Por definición se tiene que la fricción aerodinámica es:

$$\tau_{drag} = \frac{1}{2}\rho A v^2, \quad (2)$$

donde ρ es la densidad del aire, A es el área frontal de la hélice, y v es su velocidad relativa con respecto al aire.

En magnitud, la velocidad angular ω es igual a la velocidad lineal v dividida por el radio de rotación r , es decir: $\omega = v/r$. Reescribiendo la fricción aerodinámica (2), se obtiene:

$$\tau_{drag} = k_{drag} \omega^2 \quad (3)$$

donde $k_{drag} > 0$ es una constante, que depende entre otros factores, de la densidad del aire, del radio y de la forma de la hélice.

Para maniobras quasi-estacionarias, ω es una constante, entonces de (1) se tiene que:

$$\tau_{M_i} = \tau_{drag} \quad (4)$$

Para que el helicóptero avance se debe incrementar la velocidad del motor trasero M_3 y reducir la velocidad del motor delantero M_1 . De forma similar, el movimiento lateral del helicóptero se obtiene con los motores laterales. El desplazamiento sobre su eje, o movimiento de *yaw*, se obtiene incrementando el par en el motor delantero y trasero (τ_{M_1} , τ_{M_3}) mientras que se reduce el par en los motores laterales (τ_{M_2} , τ_{M_4}). Estos movimientos se deben realizar manteniendo la fuerza principal, u , constante (ver figura 1).

² Momento o par del motor

En vista de esta configuración, podemos destacar que el quadri-motor tiene muchas similitudes con el avión de tipo PVTOL (*Planar Vertical Take-Off and Landing*) (Castillo *et al.*, 2005a). Notar que, si los ángulos de *yaw* y *pitch* o *roll* son cero, entonces el quadri-motor se reduce a un PVTOL, con lo cual el quadri-motor puede verse como dos PVTOLs conectados por su eje ortogonal.

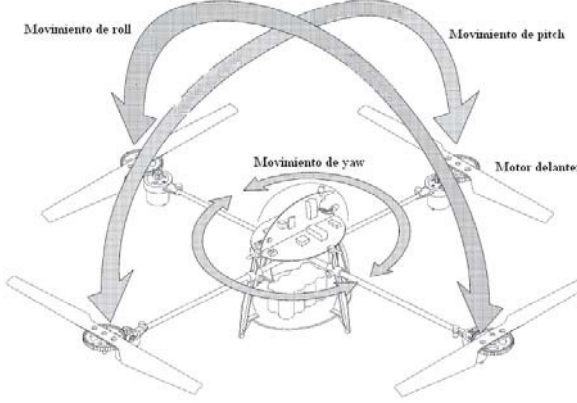


Figura 2. Momentos del *pitch*, *yaw* y *roll*.

El modelo dinámico de un PVTOL representa el modelo matemático mas simple de un avion que evoluciona en un plano vertical, ver (Castillo *et al.*, 2005a). Dicho vehículo posee tres grados de libertad que corresponden a su posición (x, y) y el ángulo de inclinación (que generalmente es conocido como ángulo de *pitch*). El PVTOL tiene dos motores independientes que producen una fuerza y un momento sobre el vehículo. Este vehículo es un sistema sub-actuado, ya que posee tres grados de libertad y solamente dos entradas.

3. MODELO DINÁMICO

En esta sección se presenta el modelo dinámico del quadri-motor. El modelo matemático se ha obtenido representando el vehículo como un cuerpo solido evolucionando en tres dimensiones, sujeto a una fuerza principal y tres momentos o pares. El modelo se obtiene a partir de dos métodos: las ecuaciones de Euler-Lagrange y las Leyes de Newton.

3.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones generalizadas de un vehículo aéreo pueden escribirse como:

$$q = (x, y, z, \psi, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^6,$$

donde $\xi = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ denota la posición del centro de masa del helicóptero relativo al eje de referencia ($\mathcal{I}$), y $\eta = (\psi, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3$ son los tres ángulos de Euler, ψ es el ángulo de *yaw*, θ es

Figura 3. Esquema del quadri-motor.

el ángulo de *pitch*, y ϕ es el ángulo de *roll* (ver (Alderete, 2006), (Etkin and Duff Reid, 1959)), los cuales representan la orientación del helicóptero (ver figura 3).

Definiendo el Lagrangiano:

$$L(q, \dot{q}) = T_{trans} + T_{rot} - U,$$

donde $T_{trans} = \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi}$ es la energía cinética traslacional, $T_{rot} = \frac{1}{2} \omega^T \mathbf{I} \omega$ es la energía cinética rotacional, $U = mgz$ es la energía potencial del vehículo, z es la altura del vehículo, m denota la masa del quadri-motor, ω es la velocidad angular, $\mathbf{I}$ es la matriz de inercia, y g es la aceleración gravitacional. El vector de la velocidad angular ω respecto a los ejes de coordenadas del cuerpo se relaciona con la velocidades generalizadas $\dot{\eta}$ (en la region donde los ángulos de Euler son válidos) utilizando una relación estándar cinemática (Goldstein, 1980),

$$\dot{\eta} = W_{\eta}^{-1} \omega,$$

donde

$$W_{\eta} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & 1 \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \cos \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \end{bmatrix}$$

Definiendo,

$$\mathbb{J} = \mathbb{J}(\eta) = W_{\eta}^T \mathbf{I} W_{\eta},$$

tal que:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta},$$

La matriz $\mathbb{J} = \mathbb{J}(\eta)$ actúa como matriz de inercia para la energía cinética total rotacional del helicóptero, expresada directamente en términos de las coordenadas generalizadas η .

El modelo dinámico completo del quadri-motor es obtenido de las ecuaciones de Euler-Lagrange con las fuerzas generalizadas externas:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \begin{bmatrix} F_\xi \\ \tau \end{bmatrix},$$

donde $F_\xi = R\hat{F} \in \mathbb{R}^3$ es la fuerza traslacional aplicada al vehículo debido principalmente a la entrada de control principal, $\tau \in \mathbb{R}^3$ representa los momentos de yaw, pitch, y roll, y R denota la matriz rotacional $R(\psi, \theta, \phi)$ representando la orientación del quadri-motor relacionada al eje de referencia fijo.

De la figura 3, se tiene:

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix},$$

donde u , es la entrada de control principal, o fuerza principal, en la dirección del eje z , expresada como:

$$u = \sum_{i=1}^4 f_i,$$

donde f_i es la fuerza producida por el motor M_i para $i = 1, \dots, 4$. De forma general, $f_i = k\omega_i^2$, donde k_i es una constante y ω_i es la velocidad angular del i -enésimo motor. Los momentos o pares generalizados son:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\psi \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \tau_{M_i} \\ (f_2 - f_4)\ell \\ (f_3 - f_1)\ell \end{bmatrix},$$

donde ℓ es la distancia entre los motores y el centro de gravedad, y τ_{M_i} es el momento producido por el motor M_i , $i = 1, \dots, 4$, alrededor del centro del gravedad del vehículo.

Puesto que el Lagrangiano no contiene términos en la energía cinética combinando ξ con $\dot{\eta}$, las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden ser divididas en la dinámica para las coordenadas de ξ y las coordenadas de η .

La ecuación de Euler-Lagrange para el movimiento de traslación es

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L_{\text{trans}}}{\partial \dot{\xi}} \right] - \frac{\partial L_{\text{trans}}}{\partial \xi} = F_\xi,$$

de lo cual se tiene,

$$m\ddot{\xi} + mgE_z = F_\xi.$$

Para las coordenadas de η se puede escribir,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L_{\text{rot}}}{\partial \dot{\eta}} \right] - \frac{\partial L_{\text{rot}}}{\partial \eta} = \tau,$$

o

$$\frac{d}{dt} \left[\dot{\eta}^T \mathbb{J} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\eta}} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}) = \tau,$$

realizando los cálculos necesarios, se tiene

$$\mathbb{J}\ddot{\eta} + \dot{\mathbb{J}}\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}) = \tau.$$

Definiendo el vector de Coriolis como

$$\bar{V}(\eta, \dot{\eta}) = \dot{\mathbb{J}}\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}),$$

reescribiendo

$$\mathbb{J}\ddot{\eta} + \bar{V}(\eta, \dot{\eta}) = \tau,$$

y dado que $\bar{V}(\eta, \dot{\eta})$, también puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \bar{V}(\eta, \dot{\eta}) &= \left(\dot{\mathbb{J}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J}) \right) \dot{\eta} \\ &= C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}, \end{aligned}$$

donde $C(\eta, \dot{\eta})$ representa los términos de Coriolis, el cual contiene los efectos giroscópicos y centrífugos asociados con η .

El calculo y las propiedades de la matriz de inercia $\mathbb{J}$ y de la matriz de Coriolis $C(\eta, \dot{\eta})$ puede verse en el Anexo.

Reescribiendo el modelo dinámico anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} + mgE_z &= F_\xi, \\ \mathbb{J}\ddot{\eta} &= \tau - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}. \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de coordenadas, se proponen unas nuevas variables de entrada para τ :

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_\psi \\ \tilde{\tau}_\theta \\ \tilde{\tau}_\phi \end{bmatrix} = \mathbb{J}^{-1}(\tau - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}). \quad (5)$$

Finalmente se obtiene:

$$m\ddot{x} = -u \sin \theta, \quad (6)$$

$$m\ddot{y} = u \cos \theta \sin \phi, \quad (7)$$

$$m\ddot{z} = u \cos \theta \cos \phi - mg, \quad (8)$$

$$\ddot{\psi} = \tilde{\tau}_\psi, \quad (9)$$

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_\theta, \quad (10)$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi, \quad (11)$$

donde x y y son las coordenadas en el plano horizontal, z es la posición vertical, y $\tilde{\tau}_\psi$, $\tilde{\tau}_\theta$, y $\tilde{\tau}_\phi$ son los momentos de *yaw*, *pitch*, y *roll*, respectivamente, los cuales están relacionados con los momentos generalizados τ_ψ , τ_θ , τ_ϕ por la ecuación (5).

3.2 Ecuaciones de Newton

En esta sección, se presenta el modelo matemático del helicóptero obtenido a partir de las leyes de

Figura 4. El quadri-motor en el eje de referencia inercial. f_i representa la fuerza del motor i y T_f es la fuerza principal.

Newton. Recuérdesse que el movimiento general de un cuerpo rígido en el espacio se puede representar por la combinación de los movimientos de rotation y traslación.

Consideremos un eje de referencia fijo en un punto situado en la tierra, llamado $\mathcal{I}$ y un eje de referencia fijo al vehículo $\mathcal{A}$ (ver figura 4). El centro de masa y el origen del eje de referencia fijo al vehículo se consideran que coinciden. Utilizando la parametrización de los ángulos de Euler, la orientación del vehículo en el espacio se obtiene por una rotación $\mathcal{R}$ desde $\mathcal{A}$ hasta $\mathcal{I}$, donde $\mathcal{R}$ es la matriz de rotación.

La dinámica de un cuerpo rígido sometido a un conjunto de fuerzas externas aplicadas en su centro de masas y expresadas en el eje de referencia fijo, se obtiene a partir de las ecuaciones de Newton-Euler como:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= v \\ m\dot{v} &= f \\ \dot{\mathcal{R}} &= \mathcal{R}\hat{\omega} \\ \mathbf{I}\dot{\omega} &= -\omega \times \mathbf{I}\omega + \tau\end{aligned}\quad (12)$$

donde $\xi = (x, y, z)^T$ denota la posición del centro de masa del cuerpo en el eje de referencia $\mathcal{I}$, $v \in \mathcal{I}$ representa la velocidad lineal expresada en el eje inercial, $\omega \in \mathcal{A}$ denota la velocidad angular, m representa la masa del vehículo, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de inercia alrededor del centro de masa (expresado con respecto al eje fijo del cuerpo $\mathcal{A}$), $\hat{\omega}$ representa la matriz antisimétrica del vector ω , $f \in \mathcal{I}$ representa el vector principal de fuerzas no conservativas aplicadas al vehículo, incluyendo la fuerza principal T_f , y los términos de fricción

asociados con los motores, $\tau \in \mathcal{A}$ representa los momentos que actúan en el vehículo.

Fuerza traslacional y fuerza gravitacional:

Las fuerzas que actúan en el cuerpo del vehículo están dadas por la fuerza traslacional T_f y la fuerza gravitacional g . La fuerza principal T_f (o entrada de control principal³) aplicada al vehículo es (ver figura 4):

$$T_f = \sum_{i=1}^4 f_i \quad (13)$$

donde la fuerza f_i generada por el motor puede ser modelada como $f_i = k\omega_i^2$ en la dirección z , de lo anterior, se tiene que k es una constante mayor que cero y ω_i es la velocidad angular del i -enésimo motor. Reescribiendo (13) se obtiene:

$$T_f = k \left(\sum_{i=1}^4 \omega_i^2 \right). \quad (14)$$

Observando la figura 4, el vector de fuerzas F , se puede expresar como:

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_f \end{bmatrix},$$

La fuerza gravitacional es:

$$f_g = -mgE_z \quad (15)$$

Reescribiendo el vector principal de fuerzas no conservativas f , se obtiene:

$$f = R_{E_z} T_f + f_g. \quad (16)$$

Momentos:

Debido a las restricciones rígidas del motor, la dinámica de cada disco del motor, en su eje de rotación, puede ser referida como un sistema desacoplado en la variable generalizada ω_i , que denota la velocidad angular de un motor alrededor de su eje. El esfuerzo de torsión ejercido por cada motor eléctrico es denotado por τ_{M_i} . El esfuerzo de torsión del motor es opuesto a la fricción aerodinámica del motor $\tau_{drag} = k_\tau \omega_i^2$.

Utilizando la segunda Ley de Newton,

$$I_M \dot{\omega}_i = -\tau_{drag} + \tau_{M_i},$$

donde I_M es el momento (o esfuerzo de torsión) angular del i -enésimo motor y $k_\tau > 0$ es una constante.

Cuando $\dot{\omega}_i = 0$, se tiene que:

$$\tau_{M_i} = k_\tau \omega_i^2. \quad (17)$$

³ Notar que cuando se utiliza el enfoque de Euler-Lagrange, se utiliza u para designar esta fuerza.

El momento aplicado en el cuerpo del vehículo a lo largo de un eje es la diferencia entre el momento generado por cada motor en el otro eje.

El movimiento de *pitch* se obtiene incrementando la velocidad del motor trasero M_3 , mientras se reduce la velocidad del motor delantero M_1 . De igual manera, el movimiento de *roll* se obtiene utilizando los motores laterales. El movimiento en *yaw* es obtenido incrementando el momento del motor delantero y trasero, τ_{M_1} y τ_{M_3} respectivamente, mientras se reduce el momento de los motores laterales τ_{M_2} y τ_{M_4} . Dichos movimientos deben ser llevados a cabo con la fuerza principal constante. Escribiendo lo anterior en forma matemática, se obtiene:

$$\tau_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \tau_{M_i} \\ (f_2 - f_4)\ell \\ (f_3 - f_1)\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{\psi} \\ \tau_{\theta} \\ \tau_{\phi} \end{bmatrix},$$

donde ℓ es la distancia entre los motores y el centro de gravedad.

Reescribiendo lo anterior,

$$\tau_{\psi} = k_r(\omega_1^2 + \omega_3^2 - \omega_2^2 - \omega_4^2) \quad (18)$$

$$\tau_{\theta} = \ell k(\omega_2^2 - \omega_4^2) \quad (19)$$

$$\tau_{\phi} = \ell k(\omega_3^2 - \omega_1^2) \quad (20)$$

donde τ_{ψ} , τ_{θ} , τ_{ϕ} son los momentos generalizados (*yaw*, *pitch* y *roll*).

Cada motor se puede considerar como un disco rígido rotando alrededor de su eje E_z con una velocidad angular ω_i . El eje de rotación del motor se mueve con la velocidad angular del eje de referencia, lo cual produce los siguientes momentos giroscópicos:

$$\tau_{G_{\mathcal{A}}} = - \sum_{i=1}^4 \mathbb{J}_r(\omega \times E_z)\omega_i = -(\omega \times E_z) \sum_{i=1}^4 \mathbb{J}_r\omega_i$$

donde $\mathbb{J}_r$ es el momento de inercia del motor alrededor de su eje.

Reescribiendo los momentos aplicados al vehículo,

$$\tau = \tau_{\mathcal{A}} + \tau_{G_{\mathcal{A}}}. \quad (21)$$

Finalmente el modelo dinámico (12), se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= v \\ m\dot{v} &= R_{E_z}T_f - mgE_z \\ \dot{\mathcal{R}} &= \mathcal{R}\hat{\omega} \\ \mathbf{I}\dot{\omega} &= -\omega \times \mathbf{I}\omega + \tau_{\mathcal{A}} + \tau_{G_{\mathcal{A}}} \end{aligned} \quad (22)$$

4. ESTRATEGIA DE CONTROL

En esta sección se presenta un algoritmo de control no lineal basado en el análisis de Lyapunov y la técnica de las saturaciones anidadas (Castillo *et al.*, 2005a). Para este algoritmo de control se utilizara el modelo matemático (ecuaciones (6)-(11)) obtenido utilizando el enfoque de Euler-Lagrange.

El algoritmo propuesto, se basa en una idea de (Teel, 1992) para la estabilización de una cadena de integradores utilizando saturaciones anidadas. Esta idea, se utiliza aquí para controlar un sistema no lineal, si bien el análisis de estabilidad propuesto es mas fácil de seguir y de comprender que el presentado en (Teel, 1992). En este trabajo, el algoritmo de control no lineal propuesto es evaluado tanto por simulaciones, como en experiencias reales. Señalar que la estrategia de control no lineal es comparada con un algoritmo de control lineal (LQR), con el fin de observar el desempeño de las leyes de control, probando de esta manera, cual de ellas es mas robusta ante perturbaciones externas.

Una ventaja de utilizar este controlador es que cada estado puede ser regulado de manera secuencial usando unas reglas de prioridad. De igual forma, cada entrada de control puede ser aplicada de manera independiente.

Primero, se aplicará la técnica de asignación de polos para estabilizar la altura del helicóptero y el ángulo de *yaw*. El control del ángulo de ϕ y el desplazamiento en la coordenada “*y*” se realiza con una ley de control no lineal. Esta estrategia de control se ha planteado considerando el comportamiento del quadri-motor como el de un PVTOL (Castillo *et al.*, 2005a; Hauser *et al.*, 1992). El último elemento del algoritmo de control planteado, consisten en la estabilización del ángulo de θ y el desplazamiento en “*x*”.

Una de las principales ventajas del algoritmo planteado es que los parámetros o ganancias del controlador, son muy fáciles de ajustar, por lo que el algoritmo propuesto, se hace relativamente fácil de implementar en un PC o microcontrolador. Por otro lado, cada entrada de control se puede implementar y operar de manera independiente, con lo cual el quadri-motor puede operar de manera semi-automática o automática.

Control de la altura y del ángulo yaw:

Para controlar la altura y el ángulo de *yaw* se utiliza la técnica de asignación de polos. La idea es forzar que la altura, o el ángulo de *yaw*, satisfagan la dinámica de un sistema lineal.

Para estabilizar la altura se propone la siguiente ley de control:

$$u = (r_1 + mg) \frac{1}{\cos \theta \cos \phi}, \quad (23)$$

donde r_1 representa un controlador PD, tal que:

$$r_1 \triangleq -a_{z_1} \dot{z} - a_{z_2} (z - z_d) \quad (24)$$

Siendo a_{z_1} , a_{z_2} constantes positivas y z_d la referencia sobre la altura deseada.

De igual forma, la ley de control sobre el ángulo de yaw será:

$$\tilde{\tau}_\psi = -a_{\psi_1} \dot{\psi} - a_{\psi_2} (\psi - \psi_d). \quad (25)$$

Introduciendo (23)-(25) en (6)-(9) y asumiendo que $\cos \theta \cos \phi \neq 0$, esto es, $\theta, \phi \in (-\pi/2, \pi/2)$, se obtiene:

$$m\ddot{x} = -(r_1 + mg) \frac{\tan \theta}{\cos \phi}, \quad (26)$$

$$m\ddot{y} = (r_1 + mg) \tan \phi, \quad (27)$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} (-a_{z_1} \dot{z} - a_{z_2} (z - z_d)), \quad (28)$$

$$\ddot{\psi} = -a_{\psi_1} \dot{\psi} - a_{\psi_2} (\psi - \psi_d). \quad (29)$$

Las ganancias de control a_{ψ_1} , a_{ψ_2} , a_{z_1} , a_{z_2} son constantes positivas que se determinan de tal manera que se asegure una respuesta estable del quadri-motor. De (28) y (29) se tiene que si ψ_d y z_d son constantes, entonces ψ y z convergen. De igual forma, $\dot{\psi}$ y $\dot{z} \rightarrow 0$, lo cual, haciendo uso de (29), implica que $\psi \rightarrow \psi_d$. De forma similar, $z \rightarrow z_d$.

Control del ángulo ϕ y del desplazamiento en el eje y :

Definiendo $\psi_d \equiv 0$ en (25) y (29), se tiene que $\psi \rightarrow 0$, notar que de (24) y (28), implica que $r_1 \rightarrow 0$.

Una de las ideas de utilizar saturaciones en la ley de control surge de la necesidad de poder controlar y/o restringir la amplitud en los ángulos de inclinación del helicóptero. Dado que ante errores elevados en la posición, la ley de control tratará de minimizar dicho error incrementando la amplitud en los ángulos de inclinación e incrementando la velocidad en los motores para poder avanzar de manera rápida, si no existe un límite de dicho ángulo o en la velocidad del quadri-motor, esto podría provocar un ángulo demasiado grande que haría que el vehículo perdiera estabilidad y como consecuencia que el quadri-motor se pudiera estrellar contra el suelo.

Por contra, el algoritmo de control que se propone en este trabajo garantiza que el helicóptero converge al punto deseado en un tiempo T , sea cual sea su distancia inicial, restringiendo de manera

secuencial la velocidad del vehículo y su ángulo de inclinación.

La estrategia de control desarrollada en (Teel, 1992), puede estabilizar de manera exponencial una cadena de integradores con entradas acotadas. Las amplitudes de las saturaciones pueden ser escogidas de tal manera que después de un tiempo T' , el ángulo de *roll* esta en el intervalo $-1 \text{ rad} \leq \phi \leq 1 \text{ rad}$. Por lo tanto, para $t > T'$ $|\tan \phi - \phi| < 0,54$. Después de un tiempo suficientemente grande r_1 es pequeño y el sub-sistema (y, ϕ) se reduce a:

$$\ddot{y} = g\phi, \quad (30)$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi, \quad (31)$$

El cual representa un sistema formado por cuatro integradores en cascada.

Para (30)-(31) el algoritmo de control utilizando la técnica de las saturaciones anidadas es:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_\phi = & -\sigma_{\phi_1}(\dot{\phi} + \sigma_{\phi_2}(\phi + \dot{\phi} + \sigma_{\phi_3}(2\phi + \dot{\phi} + \frac{\dot{y}}{g} + \\ & \sigma_{\phi_4}(\dot{\phi} + 3\phi + 3\frac{\dot{y}}{g} + \frac{y}{g}))))), \end{aligned} \quad (32)$$

donde σ_a es una función saturación de la forma

$$\sigma_a(s) = \begin{cases} -a & s < -a, \\ s & -a \leq s \leq a, \\ a & s > a. \end{cases}$$

Utilizando el algoritmo de control, el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable, ver (Teel, 1992), y por lo tanto ϕ , $\dot{\phi}$, y y $\dot{y}$ convergen a cero.

Control del ángulo θ y del desplazamiento en el eje x :

De lo anterior, se puede observar que para ángulos pequeños ϕ y r_1 , (26) se reduce a $\ddot{x} = -g \tan \theta$. Entonces, el sub-sistema (x, θ) se puede representar como:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -g \tan \theta, \\ \ddot{\theta} &= \tilde{\tau}_\theta. \end{aligned}$$

Proponiendo el siguiente algoritmo de control:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_\theta = & -\sigma_{\theta_1}(\dot{\theta} + \sigma_{\theta_2}(\theta + \dot{\theta} + \sigma_{\theta_3}(2\theta + \dot{\theta} - \frac{\dot{x}}{g} + \\ & \sigma_{\theta_4}(\dot{\theta} + 3\theta - 3\frac{\dot{x}}{g} - \frac{x}{g}))))), \end{aligned} \quad (33)$$

Se tiene que θ , $\dot{\theta}$, x y $\dot{x}$ también convergen a cero. De la estrategia de control propuesta, se puede observar que la ley de control no lineal es aplicada al sub-sistema (y, ϕ) o al sub-sistema (x, θ) .

Para estabilizar la altura y el ángulo de yaw, se utiliza un controlador PD obtenido a partir de la técnica de asignación de polos.

4.1 Control LQR

Para comparar el desempeño del algoritmo de control no lineal, se desarrolla un segundo algoritmo de control. Este algoritmo de control lineal es un convencional LQR.

Definiendo $\bar{x} = [y \dot{y} \phi \dot{\phi}]^T$, las expresiones (30) y (31) se pueden representar como:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad (34)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \tilde{\tau}_\phi.$$

Con una entrada de control de tipo:

$$\bar{u} = -K\bar{x} \quad (35)$$

donde $K = R^{-1}B^TP$, y P es la única solución positiva semidefinida de la ecuación algebraica de Riccati. Utilizando la entrada de control (35) sobre el sistema (34), se obtiene:

$$\dot{\bar{x}} = (A - BK)\bar{x}. \quad (36)$$

Escogiendo:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 6 \\ -2 & 4 & 8 & -12 \\ -4 & 8 & 16 & -24 \\ 6 & -12 & -24 & 36 \end{bmatrix}, \quad R = 1.$$

La matriz de ganancias que estabilizan el sistema (36) es:

$$K = [1 \quad 3,2848 \quad 29,3030 \quad 9,7266]$$

Siendo los valores propios $(A - BK)$, negativos, $\{-5,2393, -2,3946, -1,6056, -0,4870\}$, se concluye que el sistema en lazo cerrado es estable.

5. SIMULACIONES

En esta sección se presentan los resultados de las simulaciones realizadas de la aplicación de las leyes de control propuestas para la estabilización del sub-sistema (y, ϕ) .

Para evaluar el controlador no lineal propuesto contra un controlador lineal se realizan diferentes tipos de simulaciones con distintos valores de condiciones iniciales. Primero, se pretende probar el controlador ante un error grande en la posición, esto es, $y(0)$ se escoge lo suficientemente grande mientras que la condición inicial para el ángulo de 'roll' es pequeña o nula ($\phi(0) = 0$).

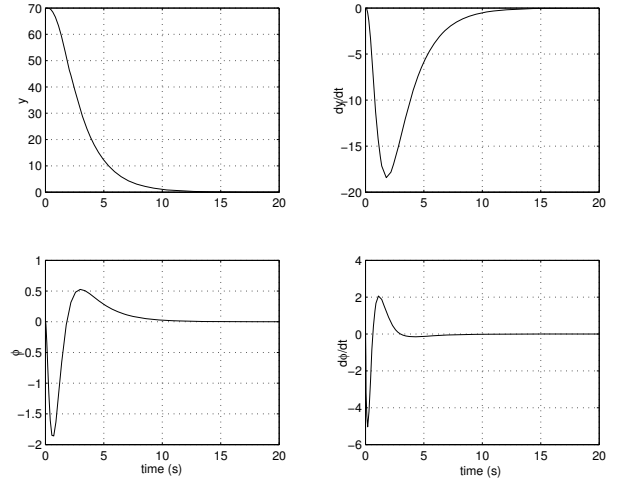


Figura 5. Simulación obtenida aplicando el algoritmo de control lineal LQR, sobre el modelo del sistema lineal (34). Las condiciones iniciales son $y(0) = 70$ y $\phi(0) = 0$.

Segundo, se valida el controlador propuesto ante errores grandes en el ángulo de 'roll' y errores pequeños en la posición, esto es, $\phi(0) = 17^\circ$. Finalmente, se valida el controlador no lineal ante errores grandes en la posición y en el ángulo, esto es, $y(0) = 200$ y $\phi(0) = 40^\circ$.

La figura 5 muestra los resultados en simulación utilizando el control lineal LQR. La posición deseada es $\bar{x}_d = 0$. Notar que para las condiciones iniciales $y(0) = 70$ m, $\phi(0) = 0^\circ$ el estado converge a cero.

Aplicando el mismo algoritmo de control al sistema no lineal (11) y (27), y utilizando las condiciones iniciales anteriores, los estados y y ϕ divergen (ver figura 6).

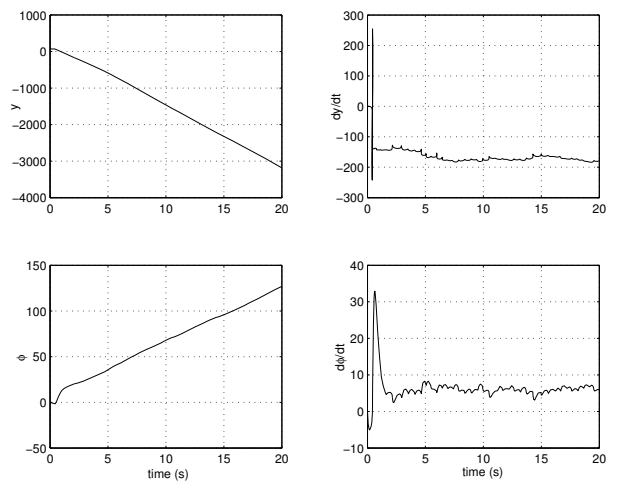


Figura 6. Simulación obtenida aplicando el algoritmo de control lineal LQR, sobre el modelo del sistema no lineal (11) y (27). El ángulo ϕ diverge debido a la dinámica no lineal. Las condiciones iniciales son $y(0) = 70$ y $\phi(0) = 0$.

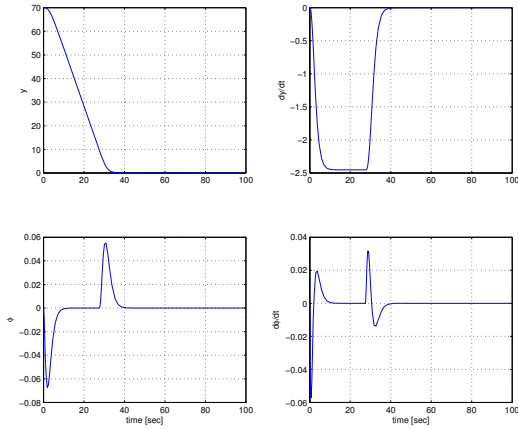


Figura 7. Simulación obtenida aplicando el algoritmo de control no lineal (32), sobre el modelo del sistema no lineal (11) y (27). Las condiciones iniciales son $y(0) = 70$ y $\phi(0) = 0$.

Como es bien sabido, un controlador lineal tiene un buen desempeño cuando el sistema se sitúa entorno a su punto de equilibrio, pero fuera del mismo las prestaciones del sistema se degradan considerablemente, pudiendo llegarse incluso a la inestabilidad del mismo.

Como se puede apreciar en las simulaciones, cuando el helicóptero se encuentra lejos de la posición deseada, el controlador LQR no es lo suficientemente robusto como para garantizar la convergencia de los estado a cero (figura 6). Por contra, la convergencia del sistema, a partir de la aplicación de un controlador no lineal, es robusta frente a errores de posición iniciales (ver figura 7).

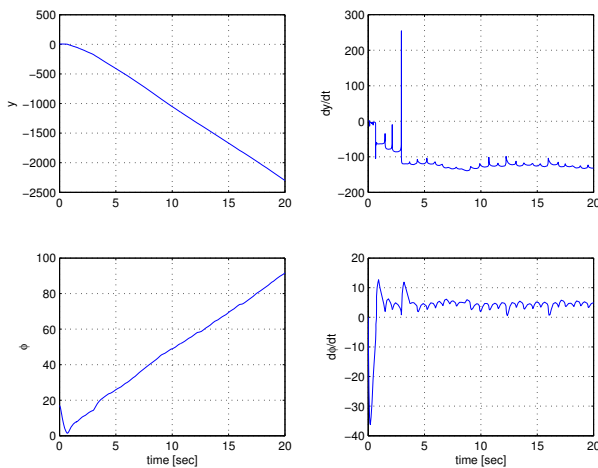


Figura 8. Simulación obtenida aplicando el algoritmo de control lineal LQR, sobre el modelo del sistema no lineal (11) y (27). El sistema diverge cuando las condiciones iniciales están lejos del punto de equilibrio. Las condiciones iniciales son $y(0) = 5$ y $\phi(0) = 17^\circ$

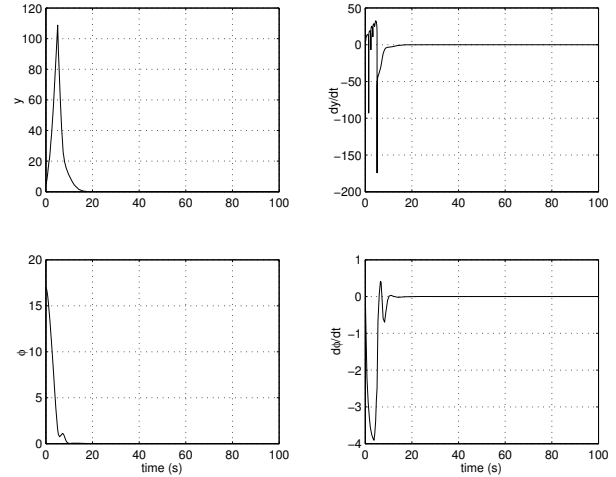


Figura 9. Resultados de la simulación de la ley de control no lineal (32) aplicada al sub-sistema (11) y (27). Las condiciones iniciales son $y(0) = 5$, $\dot{y}(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = 0$, y $\phi(0) = 17^\circ$.

Para el controlador LQR, cuando existe un error elevado entre la condición inicial en el ángulo de 'roll' y el ángulo deseado, es decir, $e_\phi = \phi(0) - \phi_d = 17 - 0 = 17^\circ$, también se presenta una divergencia del sistema (ver figura 8).

Para el controlador no lineal, en la figura 9 se muestran los resultados cuando la condición inicial en el ángulo de roll es mayor de 15 grados. Para esta simulación las condiciones iniciales fueron $y(0) = 5$ m y $\phi(0) = 17^\circ$, las ganancias utilizadas se muestran en la Tabla 1. Notar que $y \rightarrow 0$, $\dot{y} \rightarrow 0$, $\phi \rightarrow 0$, y $\dot{\phi} \rightarrow 0$. Notar igualmente que la velocidad de convergencia del sistema aumenta cuando se incrementa la amplitud en las funciones de saturación.

Parámetros de control	Valor
a_{z1}	0,001
a_{z2}	0,002
$a_{\psi1}$	2,374
$a_{\psi2}$	0,08
$b_{\phi1}$	2
$b_{\phi2}$	1
$b_{\phi3}$	0,2
$b_{\phi4}$	0,1
$b_{\theta1}$	2
$b_{\theta2}$	1
$b_{\theta3}$	0,2
$b_{\theta4}$	0,1
T	17 ms

Cuadro 1. Valores de las ganancias utilizadas en el algoritmo de control no lineal (28), (29), (32), y (33). Estos parámetros fueron sintonizados manualmente con objeto de obtener un mejor desempeño del sistema.

La ultima validación, en simulación, de la ley de control propuesta fue planteada considerando las

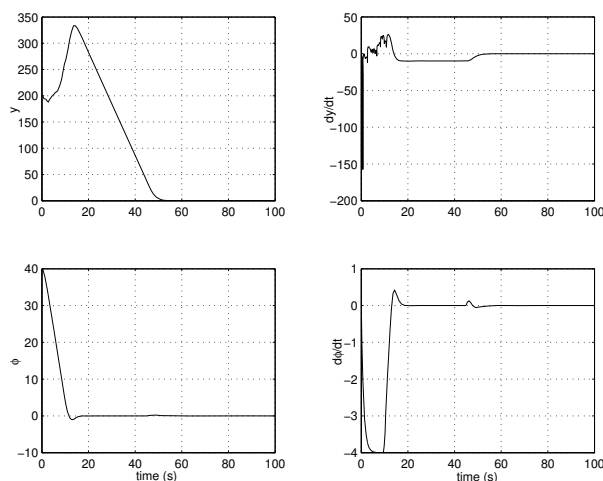


Figura 10. Resultados de la ley de control no lineal (32) aplicada al sub-sistema (11) y (27). Las condiciones iniciales son $y(0) = 200$, $\dot{y}(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = 0$, y $\phi(0) = 40^\circ$.

condiciones iniciales lo suficientemente alejadas de las posiciones finales deseadas, esto es, $e_y = y(0) - y_d = 200 - 0 = 200$ y $e_\phi = \phi(0) - \phi_d = 40 - 0 = 40^\circ$. En la figura 10 se puede observar los resultados al utilizar las condiciones antes mencionadas. Notar que, en simulación, se demuestra que el controlador no lineal propuesto es robusto ante errores relativamente elevados.

A partir de los resultados obtenidos, se muestra que contrariamente al controlador lineal LQR, el algoritmo de control no lineal (32) estabiliza el sub-sistema (y, ϕ) entorno al origen para condiciones iniciales muy alejadas del mismo.

6. PLATAFORMA EXPERIMENTAL

Para poder implementar los algoritmos de control sobre un proceso real, se desarrolló una plataforma de control de tiempo real.

Esta plataforma está constituida de un helicóptero con cuatro motores, modelo Draganflyer III de la empresa *rctoy*s (<http://www.rctoys.com>), un radio control de la marca Futaba (72 Mhz), un PC pentium II y un sensor electromagnético llamado *polhemus* (Fastrack, 2001). El sensor polhemus mide la posición (x, y, z) y la orientación (ψ, θ, ϕ) del helicóptero. Dicho sensor está conectado al PC utilizando el puerto serie, vía protocolo de comunicación RS-232, ver figura 11. Este aparato de medición es un sensor que facilita una medida de todo el estado $(x, y, z, \psi, \theta, \phi)$, los inconvenientes son su costo que es demasiado caro, su sensibilidad al ruido magnético (se debe alejar lo suficiente de los motores), y su espacio reducido de trabajo (solamente trabaja en una esfera con diámetro de 90 cm).

El helicóptero lleva incorporado un sistema electrónico empotrado que posee tres giroscopios, cuatro controladores de velocidad PWM, un “switch” de seguridad y un microprocesador que mezcla las entradas de control para obtener una adecuada señal de entrada para cada motor. Señalar que el vehículo se controla modificando la velocidad de sus motores.

La conexión entre el PC y el radio control se hace utilizando tarjetas de adquisición de datos PC-Lab de la marca ADVANTECH PCL-818HG y PCL-726. Para simplificar los experimentos cada entrada de control puede ser escogida independientemente entre modo manual y modo automático, ver figura 11. Los tres giroscopios que posee el helicóptero son utilizados como una retroalimentación en lazo cerrado para ayudar a estabilizar el helicóptero, sin estos giroscopios la estabilización del helicóptero de manera manual sería muy difícil, sin embargo únicamente con estos giroscopios no es suficiente para realizar vuelo estacionario de manera autónoma puesto que éstos sólo representan una retro-alimentación en la velocidad angular. Para realizar vuelo estacionario se requiere un sensor de altura y una ley de control basada en el desplazamiento angular.

Como se ha mencionado anteriormente, el sensor “polhemus”, suministra una medida de la posición y la orientación del vehículo, pero la estrategia de control propuesta precisa de las derivadas de la posición y de la orientación. Estas derivadas se obtienen utilizando una aproximación de primer orden, $\dot{q}(t) \approx \frac{q(t) - q(t-T)}{T}$, donde q es la variable en cuestión, y T es el periodo de muestreo.

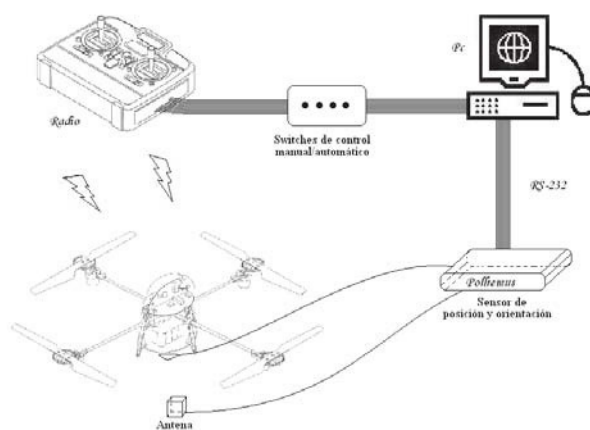


Figura 11. Plataforma experimental para estabilizar el quadri-motor. El sensor de posición/orientación está conectado al PC utilizando la comunicación RS-232, el PC genera las entradas de control que son enviadas al helicóptero a través del radio-control.

7. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En esta sección se presentan algunos resultados experimentales obtenidos al aplicar los algoritmos de control propuestos. Primero se describen los experimentos realizados con el controlador lineal LQR, y a continuación se muestran las mejoras obtenidas a partir de la aplicación de un controlador no lineal (incluso en condiciones más adversas que para el regulador LQR).

7.1 Control LQR

Los resultados experimentales utilizando la ley de control lineal fueron llevados a cabo utilizando el control de la altura en modo manual. Para estabilizar el sub-sistema $y - \phi$ en tiempo real, primero se utilizaron las ganancias obtenidas en simulación. La figura 12a muestra la posición y y el ángulo ϕ del helicóptero. Como puede observarse en la figura, el ángulo de roll del vehículo oscila de manera considerable, lo que no permite que el helicóptero pueda despegar. Para reducir dichas oscilaciones, se tuvo que ajustar las ganancias una por una para mejorar su desempeño. Después de varios intentos se logró reducir dichas oscilaciones, tal y como puede apreciarse en la figura 12b. Sin embargo, en ningún caso el desempeño obtenido puede considerarse muy bueno para realizar un vuelo estacionario de manera automática.

7.2 Control no lineal

Para realizar el experimento con la ley de control no lineal, se colocó el helicóptero en una posición arbitraria, en concreto en la posición $(x, y, z) = (9, 12, 0)$ cm. El objetivo planteado era hacer que el helicóptero realizara un vuelo estacionario a una altura de 20 cm, esto es, que el helicóptero alcanzara la posición $(x, y, z) = (0, 0, 20)$ cm, mientras que su orientación fuera $(\psi, \theta, \phi) = (0, 0, 0)$, ver figura 14. Las ganancias del algoritmo de control utilizadas en este experimento se muestran en la Tabla 1. La figura 13 muestra una foto del vuelo estacionario del quadri-motor de manera autónoma.

Las amplitudes de las saturaciones en la ley de control (32) fueron ajustadas como sigue: primero se determina la amplitud de σ_{ϕ_1} de tal manera que la velocidad angular $\dot{\phi}$ permanezca cerca de cero aun cuando sea introducida una perturbación. En segundo lugar se escoge la amplitud de σ_{ϕ_2} de tal manera que el ángulo ϕ sea suficientemente pequeño. En ambos casos se trata de evitar grandes amplitudes para evitar oscilaciones. La amplitud de σ_{ϕ_3} fue escogida con el objeto de que el efecto de las pequeñas perturbaciones en la velocidad $\dot{y}$

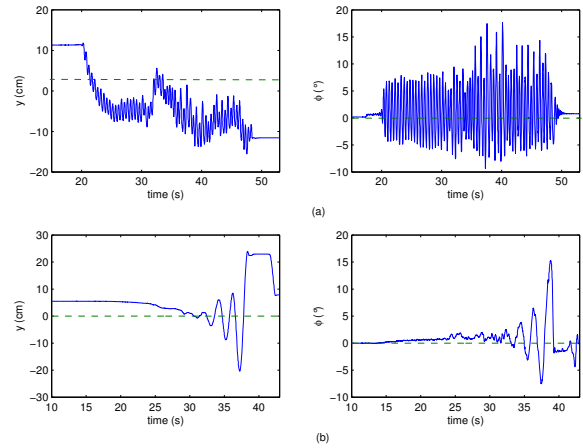


Figura 12. Respuesta inestable del quadri-motor cuando se utiliza el controlador lineal LQR al sub-sistema (ϕ, y) . a).- Las líneas punteadas representan la trayectoria deseada, las condiciones iniciales utilizadas fueron $y(0) = 12$ y $\phi(0) = 0$. En esta experiencia los valores de las ganancias son los de la matriz K . b).- Las ganancias LQR fueron manualmente ajustadas para mejorar el desempeño del vehículo, con este ajuste de ganancias se logró reducir las oscilaciones pero cualquier perturbación por pequeña que fuera desestabilizaba el sistema. Las condiciones iniciales utilizadas fueron $y(0) = 6$ y $\phi(0) = 0$.

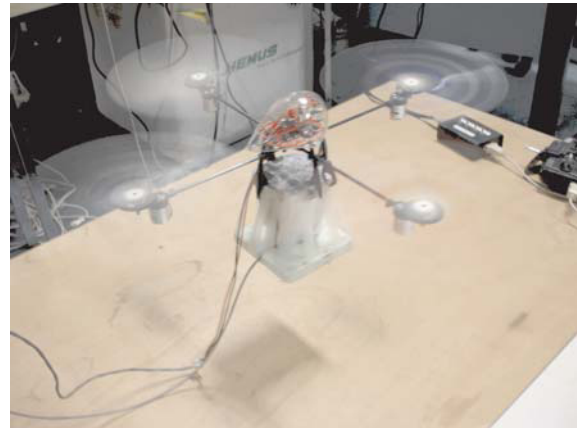


Figura 13. Vuelo estacionario autónomo del quadri-motor. Los cables en el helicóptero que se ven en la figura son de la alimentación eléctrica de los motores y del sensor electro-magnético.

sea compensado. Finalmente la amplitud de σ_{ϕ_4} se determina tal que la variable y este muy cerca de la posición deseada. Los parámetros del controlador $\tilde{\tau}_\theta$ fueron seleccionados de manera similar. Finalmente se realiza el ajuste de los parámetros de u y $\tilde{\tau}_\psi$ para obtener una altura y un ángulo de yaw deseado. Uno de los parámetros de u es utilizado para compensar la fuerza de gravedad.

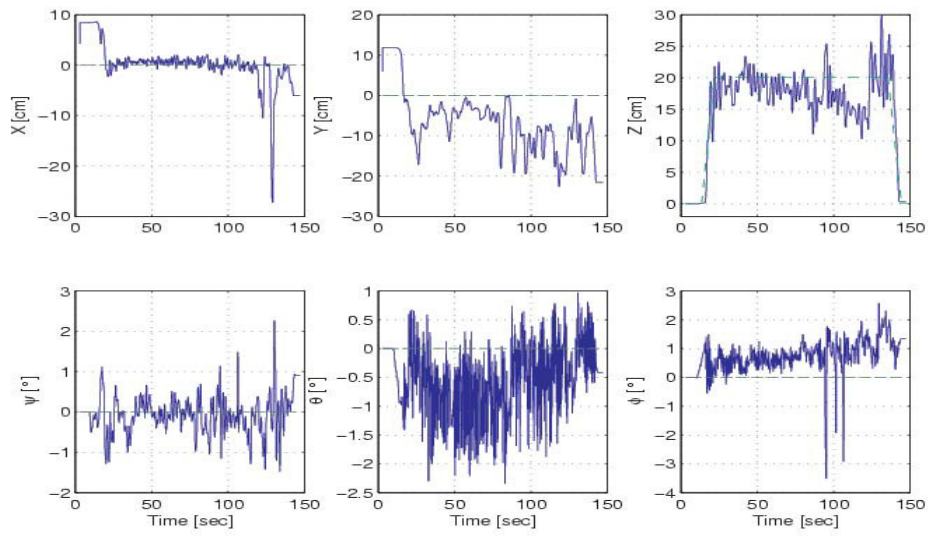


Figura 14. Respuesta del quadri-motor cuando se utiliza el algoritmo de control propuesto (32) sujeta a perturbaciones en los ejes x , y y z . Las líneas punteadas representan la trayectoria deseada. Las condiciones iniciales son $(x, y, z) = (9, 12, 0)$ cm y $(\psi, \theta, \phi) = (0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$.

Figura 15. Respuesta del quadri-motor con perturbaciones en el ángulo de roll. Las condiciones iniciales son $(x, y, z) = (8, 12, 0)$ cm y $(\psi, \theta, \phi) = (0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$. Las líneas punteadas representan la trayectoria deseada. El ángulo ϕ es perturbado por $+10^\circ$ y -30° . Este experimento muestra que la ley de control no lineal puede estabilizar la orientación del helicóptero incluso ante perturbaciones muy agresivas.

La figura 14 muestra el desempeño obtenido cuando se introduce una perturbación manualmente en el eje x de -25 cm en el instante de tiempo $t = 125$ s, cinco perturbaciones de -20 cm en el eje y en los tiempos $t = 25$ s, $t = 80$ s, $t = 90$ s, $t = 120$ s, y $t = 130$ s, dos perturbaciones de -10 cm en el eje z en los tiempos $t = 80$ s, y $t = 115$ s, y una perturbación de $+10$ cm en el eje z en el tiempo $t = 130$ s.

De igual forma se prueba el controlador no lineal propuesto ante perturbaciones agresivas en el ángulo ϕ . En este experimento primero se aplica una fuerza manualmente en el ángulo ϕ de tal manera que éste alcance un valor de $+10^\circ$. Posteriormente, en el instante de tiempo $t = 95$ s, se aplica una perturbación en el ángulo de *roll* de -30° . En las figuras 15 y 16 se muestra la respuesta del sistema ante dichas perturbaciones.

Dado que con el controlador LQR no se consiguió realizar un vuelo estacionario del helicóptero (ver figura 12). Estos experimentos no se han podido comparar con respecto a un controlador lineal LQR.

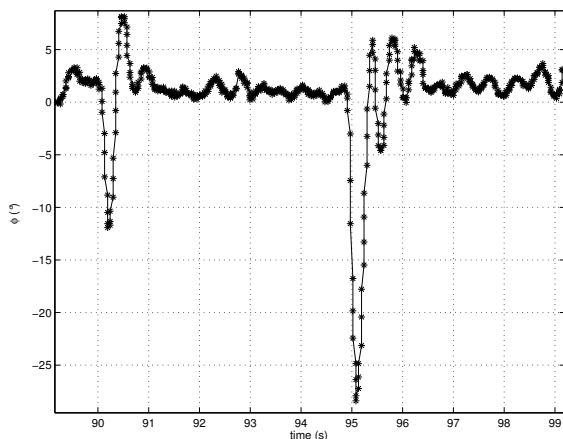


Figura 16. Respuesta del sistema ante una perturbación en el ángulo de roll. La figura muestra un detalle del ángulo de roll de la figura 15. Con la ley de control no lineal, el sub-sistema (11)-(27) permanece estable incluso ante una perturbación de -30° .

8. CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado los dos modelos matemáticos más utilizados del quadri-motor, dichos modelos fueron obtenidos a partir de la aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange y las leyes de Newton. En base al modelo dinámico obtenido a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, se propone una estrategia de control no lineal para estabilizar el helicóptero con cuatro rotores.

El algoritmo de control está basado en el análisis de Lyapunov y en la técnica de las saturaciones anidadas. La estrategia de control es muy fácil de implementar y es tal que se puede aplicar de manera independiente del vehículo a controlar. El ajuste de las ganancias es muy sencillo en comparación con otros algoritmos de control presentes en la literatura.

La estrategia de control fue aplicada a un quadrimotor de manera satisfactoria y los resultados obtenidos muestran que el algoritmo de control es robusto, incluso para perturbaciones muy elevadas. De igual manera se comparó el desempeño del algoritmo propuesto, con respecto a un algoritmo de control lineal LQR, mostrándose que el algoritmo de control lineal no es robusto ante perturbaciones o errores en la posición inicial, mientras que el algoritmo de control no lineal sí que lo es.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Ministerio de Educación y Ciencia Español, dentro del programa de ayudas a jóvenes investigadores en su convocatoria del año 2004, y por el proyecto CICYT DPI2005-09327-C02.

REFERENCIAS

- Alderete, T.S. (2006). *Simulator aero model implementation*. NASA; Ames Research Center, Moffett Field, California. [Online], Available: http://www.simlabs.arc.nasa.gov/library_docs/rt_sim_docs/Toms.pdf.
- Altug, E., J.P. Ostrowski and C.J. Taylor (2003). Quadrotor control using dual camera visual feedback. in *Proc. ICRA '03. IEEE International Conference on Robotics and Automation*.
- Bouabdallah, S., P. Murrieri and R. Siegwart (2004). Design and control of an indoor micro quadrotor. in *Proc. ICRA '04. IEEE International Conference on Robotics and Automation* **5**, 4393–4398.
- Castillo, P., R. Lozano and A. Dzul (2005a). *Springer-Verlag in Advances in Industrial Control*. Springer-Verlag.
- Castillo, P., R. Lozano and A. Dzul (2005b). Stabilization of a mini rotorcraft having four rotors. *IEEE Control Systems Magazine* **25**(6), 45–55.
- Chen, M. and M. Huzmezan (2003). A combined mbpc/2 dof h infinity controller for a quad rotor uav. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, AAS Astrodynamics Specialist Conference*.
- Etkin, B. and L. Duff Reid (1959). *Dynamics of Flight*. John Wiley and Sons, Inc., New York.

- Fastrack (2001). *Fastrack 3Space Polhemus*,; User's Manual. Colchester, Vermont, USA.
- Goldstein, H. (1980). *Classical Mechanics*. Addison Wesley Series in Physics, Addison-Wesley, U.S.A., second edition.
- Hanford, S.D., L.N. Long and J.F. Horn (2003). A small semi-autonomous rotary-wing unmanned air vehicle (uav). *2003 AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference & Exhibit*.
- Hauser, J., S. Sastry and G. Meyer (1992). Nonlinear control design for slightly nonminimum phase systems: Application to v/stol aircraft. *Automatica* **28**(4), 665–679.
- McKerrow, P. (2004). Modelling the draganflyer four-rotor helicopter. *in Proc. ICRA '04. IEEE International Conference on Robotics and Automation* **5**, 3596–3601.
- Mistler, V., A. Benallegue and N.K. M'Sirdi (2001). Exact linearization and noninteracting control of a 4 motors helicopter via dynamic feedback. *in Proc. of IEEE International Workshop on Robot and Human Interactive Communication*.
- Tanaka, T., H. Ohtake and H.O. Wang (2004). A practical design approach to stabilization of a 3-dof rc helicopter. *IEEE transactions on control systems technology* **12**(2), 315–325.
- Tarek, H., R. Mahony, R. Lozano and J. Ostrowski (2002). Dynamic modeling and configuration stabilization for an x4-flyer. *In Proc. of IFAC World Congress, Barcelona, Spain*.
- Teel, A.R. (1992). Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Syst. & Contr. Lett.* **18**, 165–171.

ANEXO

Notar que para las coordenadas de η , el modelo no lineal es

$$\mathbb{J}\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \tau,$$

este modelo matemático puede reescribirse en la forma general, tal que

$$M(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \tau$$

donde $M(\eta) = \mathbb{J}(\eta) = W_\eta^T \mathbf{I} W_\eta$.

$$\mathbb{J}(\eta) = W_\eta^T \mathbf{I} W_\eta$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & 1 \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & 1 \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_{xx} \sin \theta & 0 & I_{xx} \\ I_{yy} \cos \theta \sin \phi & I_{yy} \cos \phi & 0 \\ I_{zz} \cos \theta \cos \phi & -I_{zz} \sin \phi & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{xx} s^2 \theta + I_{yy} c^2 \theta s^2 \phi + I_{zz} c^2 \theta c^2 \phi & c \theta c \phi s \phi (I_{yy} - I_{zz}) & -I_{xx} s \theta \\ c \theta c \phi s \phi (I_{yy} - I_{zz}) & I_{yy} c^2 \phi + I_{zz} s^2 \phi & 0 \\ -I_{xx} s \theta & 0 & I_{xx} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para calcular la matriz de Coriolis, se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L_{\text{rot}}}{\partial \dot{\eta}} \right] - \frac{\partial L_{\text{rot}}}{\partial \eta} = \tau,$$

o

$$\frac{d}{dt} \left[\Omega^T \mathbf{I} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\eta}} \right] - \Omega^T \mathbf{I} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = \tau,$$

entonces

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\eta}} = \begin{bmatrix} -s_\theta & 0 & 1 \\ c_\theta s_\phi & c_\phi & 0 \\ c_\theta c_\phi & -s_\phi & 0 \end{bmatrix}$$

de lo cual se obtiene,

$$\begin{aligned} \Omega^T \mathbf{I} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\eta}} &= \begin{pmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} s_\theta \\ \dot{\theta} c_\phi + \dot{\psi} c_\theta s_\phi \\ \dot{\psi} c_\theta c_\phi - \dot{\theta} s_\phi \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_\theta & 0 & 1 \\ c_\theta s_\phi & c_\phi & 0 \\ c_\theta c_\phi & -s_\phi & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} s_\theta & \dot{\theta} c_\phi + \dot{\psi} c_\theta s_\phi & \dot{\psi} c_\theta c_\phi - \dot{\theta} s_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_{xx} s_\theta & 0 & I_{xx} \\ I_{yy} c_\theta s_\phi & I_{yy} c_\phi & 0 \\ I_{zz} c_\theta c_\phi & -I_{zz} s_\phi & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} b_1 &= -I_{xx}(\dot{\phi} s_\theta - \dot{\psi} s_\theta^2) + I_{yy}(\dot{\theta} c_\theta s_\phi c_\phi + \dot{\psi} c_\theta^2 s_\phi^2) + I_{zz}(\dot{\psi} c_\theta^2 c_\phi^2 - \dot{\theta} c_\theta s_\phi c_\phi) \\ b_2 &= I_{yy}(\dot{\theta} c_\phi^2 + \dot{\psi} c_\theta s_\phi c_\phi) - I_{zz}(\dot{\psi} c_\theta s_\phi c_\phi - \dot{\theta} s_\phi^2) \\ b_3 &= I_{xx}(\dot{\phi} - \dot{\psi} s_\theta) \end{aligned}$$

Derivando $\Omega^T \mathbf{I} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\eta}}$, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{b}_1 &= -I_{xx}(\ddot{\phi} s_\theta + \dot{\phi} \dot{\theta} c_\theta - \ddot{\psi} s_\theta^2 - 2\dot{\psi} \dot{\theta} s_\theta c_\theta) + I_{yy}(\ddot{\theta} c_\theta s_\phi c_\phi - \dot{\theta}^2 s_\theta s_\phi c_\phi \\ &\quad - \dot{\theta} \dot{\phi} c_\theta s_\phi^2 + \dot{\theta} \dot{\phi} c_\theta c_\phi^2 + \ddot{\psi} c_\theta^2 s_\phi^2 - 2\dot{\psi} \dot{\theta} s_\theta c_\theta s_\phi^2 + 2\dot{\psi} \dot{\phi} c_\theta^2 s_\phi c_\phi) \\ &\quad + I_{zz}(\ddot{\psi} c_\theta^2 c_\phi^2 - 2\dot{\psi} \dot{\theta} s_\theta c_\theta c_\phi^2 - 2\dot{\psi} \dot{\phi} c_\theta^2 s_\phi c_\phi - \ddot{\theta} c_\theta s_\phi c_\phi + \dot{\theta}^2 s_\theta s_\phi c_\phi \\ &\quad + \dot{\theta} \dot{\phi} c_\theta c_\phi^2 - \dot{\theta} \dot{\phi} c_\theta s_\phi^2) \\ \dot{b}_2 &= I_{yy}(\ddot{\theta} c_\phi^2 - 2\dot{\theta} \dot{\phi} s_\phi c_\phi + \ddot{\psi} c_\theta s_\phi c_\phi - \dot{\psi} \dot{\theta} s_\theta s_\phi c_\phi + \dot{\psi} \dot{\phi} c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi} \dot{\phi} c_\theta s_\phi^2) \\ &\quad - I_{zz}(\ddot{\psi} c_\theta s_\phi c_\phi - \dot{\psi} \dot{\theta} s_\theta s_\phi c_\phi - \dot{\psi} \dot{\phi} c_\theta s_\phi^2 + \dot{\psi} \dot{\phi} c_\theta c_\phi^2 - \ddot{\theta} s_\phi^2 - 2\dot{\theta} \dot{\phi} s_\phi c_\phi) \\ \dot{b}_3 &= I_{xx}(\ddot{\phi} - \ddot{\psi} s_\theta - \dot{\psi} \dot{\theta} c_\theta) \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi}c_\theta & 0 \\ 0 & -\dot{\psi}s_\theta s_\phi & -\dot{\theta}s_\phi + \dot{\psi}c_\theta c_\phi \\ 0 & -\dot{\psi}s_\theta c_\phi & -\dot{\psi}c_\theta s_\phi - \dot{\theta}c_\phi \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} \Omega^T \mathbf{I} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi}s_\theta \\ \dot{\theta}c_\phi + \dot{\psi}c_\theta s_\phi \\ \dot{\psi}c_\theta c_\phi - \dot{\theta}s_\phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi}c_\theta & 0 \\ 0 & -\dot{\psi}s_\theta s_\phi & -\dot{\theta}s_\phi + \dot{\psi}c_\theta c_\phi \\ 0 & -\dot{\psi}s_\theta c_\phi & -\dot{\psi}c_\theta s_\phi - \dot{\theta}c_\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde: $h_1 = 0$,

$$\begin{aligned} h_2 &= -I_{xx}(\dot{\psi}\dot{\phi}c_\theta - \dot{\psi}^2 s_\theta c_\theta) - I_{yy}(\dot{\psi}\dot{\theta}s_\theta s_\phi c_\phi + \dot{\psi}^2 s_\theta c_\theta s_\phi^2) - \\ &I_{zz}(\dot{\psi}^2 s_\theta c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi}\dot{\theta}s_\theta s_\phi c_\phi), \\ h_3 &= I_{yy}(-\dot{\theta}^2 s_\phi c_\phi - \dot{\psi}\dot{\theta}c_\theta s_\phi^2 + \dot{\psi}\dot{\theta}c_\theta c_\phi^2 + \dot{\psi}^2 c_\theta^2 s_\phi c_\phi) + \\ &I_{zz}(-\dot{\psi}^2 c_\theta^2 s_\phi c_\phi + \dot{\psi}\dot{\theta}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi}\dot{\theta}c_\theta c_\phi^2 + \dot{\theta}^2 s_\phi c_\phi). \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el momento son

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{b}_1 - h_1 \\ \dot{b}_2 - h_2 \\ \dot{b}_3 - h_3 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -I_{xx}(\ddot{\phi}s_\theta + \dot{\phi}\dot{\theta}c_\theta - \ddot{\psi}s_\theta^2 - 2\dot{\psi}\dot{\theta}s_\theta c_\theta) + I_{yy}(\ddot{\theta}c_\theta s_\phi c_\phi \\ &\quad - \dot{\theta}^2 s_\theta s_\phi c_\phi - \dot{\theta}\dot{\phi}c_\theta s_\phi^2 + \dot{\theta}\dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 + \ddot{\psi}c_\theta^2 s_\phi^2 \\ &\quad - 2\dot{\psi}\dot{\theta}s_\theta c_\theta s_\phi^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi) + I_{zz}(\ddot{\psi}c_\theta^2 c_\phi^2 - 2\dot{\psi}\dot{\theta}s_\theta c_\theta c_\phi^2 \\ &\quad - 2\dot{\psi}\dot{\phi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi - \ddot{\theta}c_\theta s_\phi c_\phi + \dot{\theta}^2 s_\theta s_\phi c_\phi \\ &\quad + \dot{\theta}\dot{\phi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\theta}\dot{\phi}c_\theta c_\phi^2) \\ \tau_2 &= I_{xx}(\dot{\psi}\dot{\phi}c_\theta - \dot{\psi}^2 s_\theta c_\theta) + I_{yy}(\ddot{\theta}c_\phi^2 - 2\dot{\theta}\dot{\phi}s_\phi c_\phi + \ddot{\psi}c_\theta s_\phi c_\phi \\ &\quad + \dot{\psi}\dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi}\dot{\phi}c_\theta s_\phi^2 + \dot{\psi}^2 s_\theta c_\theta s_\phi^2) \\ &\quad - I_{zz}(\ddot{\psi}c_\theta s_\phi c_\phi - \dot{\psi}^2 s_\theta c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi}\dot{\phi}c_\theta s_\phi^2 + \dot{\psi}\dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 - \ddot{\theta}s_\phi^2 \\ &\quad - 2\dot{\theta}\dot{\phi}s_\phi c_\phi) \\ \tau_3 &= I_{xx}(\ddot{\phi} - \ddot{\psi}s_\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}c_\theta) - I_{yy}(-\dot{\theta}^2 s_\phi c_\phi - \dot{\psi}\dot{\theta}c_\theta s_\phi^2 \\ &\quad + \dot{\psi}\dot{\theta}c_\theta c_\phi^2 + \dot{\psi}^2 c_\theta^2 s_\phi c_\phi) \\ &\quad - I_{zz}(-\dot{\psi}^2 c_\theta^2 s_\phi c_\phi + \dot{\psi}\dot{\theta}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi}\dot{\theta}c_\theta c_\phi^2 + \dot{\theta}^2 s_\phi c_\phi) \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \ddot{\psi}(I_{xx}s_\theta^2 + I_{yy}c_\theta^2 s_\phi^2 + I_{zz}c_\theta^2 c_\phi^2) + \ddot{\theta}(I_{yy}c_\theta s_\phi c_\phi \\ &\quad - I_{zz}c_\theta s_\phi c_\phi) - \ddot{\phi}I_{xx}s_\theta + \dot{\psi}(I_{xx}\dot{\theta}s_\theta c_\theta \\ &\quad + I_{yy}(-\dot{\theta}s_\theta c_\theta s_\phi^2 + \dot{\phi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi) - I_{zz}(\dot{\theta}s_\theta c_\theta c_\phi^2 + \dot{\phi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi)) \\ &\quad + \dot{\theta}(I_{xx}\dot{\psi}s_\theta c_\theta - I_{yy}(\dot{\theta}s_\theta s_\phi c_\phi + \dot{\phi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 + \dot{\psi}s_\theta c_\theta s_\phi^2) \\ &\quad + I_{zz}(\dot{\phi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi}s_\theta c_\theta c_\phi^2 + \dot{\theta}s_\theta s_\phi c_\phi)) \\ &\quad - \dot{\phi}(I_{xx}\dot{\theta}c_\theta - I_{yy}\dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi + I_{zz}\dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi) \\ \tau_2 &= \ddot{\psi}(I_{yy}c_\theta s_\phi c_\phi - I_{zz}c_\theta s_\phi c_\phi) + \ddot{\theta}(I_{yy}c_\phi^2 + I_{zz}s_\phi^2) \\ &\quad + \dot{\psi}(-I_{xx}\dot{\psi}s_\theta c_\theta + I_{yy}\dot{\psi}s_\theta c_\theta s_\phi^2 + I_{zz}\dot{\psi}s_\theta c_\theta c_\phi^2) \\ &\quad - \dot{\theta}(I_{yy}\dot{\phi}s_\phi c_\phi - I_{zz}\dot{\phi}s_\phi c_\phi) \\ &\quad + \dot{\phi}(I_{xx}\dot{\psi}c_\theta + I_{yy}(-\dot{\theta}s_\phi c_\phi + \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta s_\phi^2) \\ &\quad + I_{zz}(\dot{\psi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2 + \dot{\theta}s_\phi c_\phi)) \\ \tau_3 &= -\ddot{\psi}I_{xx}s_\theta + \ddot{\phi}I_{xx} \\ &\quad - \dot{\psi}(I_{yy}\dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi - I_{zz}\dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi) \\ &\quad + \dot{\theta}(-I_{xx}\dot{\psi}c_\theta + I_{yy}(\dot{\theta}s_\phi c_\phi + \dot{\psi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2) \\ &\quad - I_{zz}(\dot{\psi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2 + \dot{\theta}s_\phi c_\phi)) \end{aligned}$$

Con lo cual, el modelo no lineal puede ser escrito como

$$M(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \tau$$

siendo

$$M(\eta) = \begin{bmatrix} I_{xx}s_\theta^2 + I_{yy}c_\theta^2 s_\phi^2 + I_{zz}c_\theta^2 c_\phi^2 & c_\theta c_\phi s_\phi(I_{yy} - I_{zz}) & -I_{xx}s_\theta \\ c_\theta c_\phi s_\phi(I_{yy} - I_{zz}) & I_{yy}c_\phi^2 + I_{zz}s_\phi^2 & 0 \\ -I_{xx}s_\theta & 0 & I_{xx} \end{bmatrix} \quad (37)$$

y

$$C(\eta, \dot{\eta}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} c_{11} &= I_{xx}\dot{\theta}s_\theta c_\theta + I_{yy}(-\dot{\theta}s_\theta c_\theta s_\phi^2 + \dot{\phi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi) - I_{zz}(\dot{\theta}s_\theta c_\theta c_\phi^2 + \dot{\phi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi) \\ c_{12} &= I_{xx}\dot{\psi}s_\theta c_\theta - I_{yy}(\dot{\theta}s_\theta s_\phi c_\phi + \dot{\phi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 + \dot{\psi}s_\theta c_\theta s_\phi^2) \\ &\quad + I_{zz}(\dot{\phi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi}s_\theta c_\theta c_\phi^2 + \dot{\theta}s_\theta s_\phi c_\phi) \\ c_{13} &= -I_{xx}\dot{\theta}c_\theta + I_{yy}\dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi - I_{zz}\dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi \\ c_{21} &= -I_{xx}\dot{\psi}s_\theta c_\theta + I_{yy}\dot{\psi}s_\theta c_\theta s_\phi^2 + I_{zz}\dot{\psi}s_\theta c_\theta c_\phi^2 \\ c_{22} &= -I_{yy}\dot{\phi}s_\phi c_\phi + I_{zz}\dot{\phi}s_\phi c_\phi \\ c_{23} &= I_{xx}\dot{\psi}c_\theta + I_{yy}(-\dot{\theta}s_\phi c_\phi + \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta s_\phi^2) + I_{zz}(\dot{\psi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2 \\ &\quad + \dot{\theta}s_\phi c_\phi) \\ c_{31} &= -I_{yy}\dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi + I_{zz}\dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi \\ c_{32} &= -I_{xx}\dot{\psi}c_\theta + I_{yy}(\dot{\theta}s_\phi c_\phi + \dot{\psi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2) - I_{zz}(\dot{\psi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2 \\ &\quad + \dot{\theta}s_\phi c_\phi) \\ c_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Notar que $M(\eta)$ obtenida en (37) y (37) es la misma matriz simétrica tal que

$$\begin{aligned}
\det(M(\eta)) &= \\
&= (I_{xx}s_\theta^2 + I_{yy}c_\theta^2s_\phi^2 + I_{zz}c_\theta^2c_\phi^2)(I_{xx}I_{yy}c_\phi^2 + I_{xx}I_{zz}s_\phi^2) \\
&\quad - c_\theta^2c_\phi^2s_\phi^2(I_{yy} - I_{zz})^2I_{xx} - I_{xx}^2s_\theta^2(I_{yy}c_\phi^2 + I_{zz}s_\phi^2) \\
&= I_{xx}^2I_{yy}s_\theta^2c_\phi^2 + I_{yy}^2I_{xx}c_\theta^2s_\phi^2c_\phi^2 + I_{zz}I_{xx}I_{yy}c_\phi^4c_\theta^2 + I_{xx}^2I_{zz}s_\theta^2s_\phi^2 \\
&\quad + I_{zz}^2I_{xx}c_\theta^2s_\phi^2c_\phi^2 + I_{zz}I_{xx}I_{yy}c_\theta^2s_\phi^4 - c_\theta^2c_\phi^2s_\phi^2(I_{yy} - I_{zz})^2I_{xx} \\
&\quad - I_{xx}^2s_\theta^2(I_{yy}c_\phi^2 + I_{zz}s_\phi^2) \\
&= I_{zz}I_{xx}I_{yy}c_\theta^2(s_\phi^4 + c_\phi^4) + (I_{yy}^2 + I_{zz}^2 - (I_{yy} - I_{zz})^2)I_{xx}c_\theta^2s_\phi^2c_\phi^2 \\
&= I_{zz}I_{xx}I_{yy}c_\theta^2(s_\phi^4 + c_\phi^4) + 2I_{yy}I_{zz}I_{xx}c_\theta^2s_\phi^2c_\phi^2 \\
&= I_{zz}I_{xx}I_{yy}c_\theta^2(s_\phi^2 + c_\phi^2)^2 \\
&= I_{zz}I_{xx}I_{yy}c_\theta^2
\end{aligned}$$

De lo anterior se puede observar que $M(\eta)$ es positiva definida para todo $\theta \neq n\pi/2, \forall n = 1, 3, 5, \dots$

Derivando M , se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{11} &= 2I_{xx}\dot{\theta}s_\theta c_\theta - 2I_{yy}\dot{\theta}s_\theta c_\theta s_\phi^2 + 2I_{yy}\dot{\phi}c_\theta^2s_\phi c_\phi \\
&\quad - 2I_{zz}\dot{\theta}s_\theta c_\theta c_\phi^2 - 2I_{zz}\dot{\phi}c_\theta^2s_\phi c_\phi \\
\dot{M}_{12} = \dot{M}_{21} &= -I_{yy}\dot{\theta}s_\theta s_\phi c_\phi + I_{yy}\dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 - I_{yy}\dot{\phi}c_\theta s_\phi^2 \\
&\quad + I_{zz}\dot{\theta}s_\theta s_\phi c_\phi - I_{zz}\dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 + I_{zz}\dot{\phi}c_\theta s_\phi^2 \\
\dot{M}_{13} = \dot{M}_{31} &= -I_{xx}\dot{\theta}c_\theta \\
\dot{M}_{22} &= -2I_{yy}\dot{\phi}s_\phi c_\phi + 2I_{zz}\dot{\phi}s_\phi c_\phi \\
\dot{M}_{23} = \dot{M}_{32} &= 0 \\
\dot{M}_{33} &= 0
\end{aligned}$$

Obteniéndose así, la propiedad de pasividad, tal que

$$P = \dot{M} - 2C$$

esta dada por

$$\begin{aligned}
P_{11} &= 0 \\
P_{12} &= -I_{yy}\dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 + I_{yy}\dot{\phi}c_\theta s_\phi^2 - I_{zz}\dot{\theta}s_\theta s_\phi c_\phi + I_{zz}\dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 \\
&\quad - I_{zz}\dot{\phi}c_\theta s_\phi^2 - 2I_{xx}\dot{\psi}s_\theta c_\theta + 2I_{yy}\dot{\psi}s_\theta c_\theta s_\phi^2 + 2I_{zz}\dot{\psi}s_\theta c_\theta c_\phi^2 \\
P_{13} &= I_{xx}\dot{\theta}c_\theta - 2I_{yy}\dot{\psi}c_\theta^2s_\phi c_\phi + 2I_{zz}\dot{\psi}c_\theta^2s_\phi c_\phi \\
P_{21} &= -P_{12} \\
P_{22} &= 0 \\
P_{23} &= -2I_{xx}\dot{\psi}c_\theta - 2I_{yy}(-\dot{\theta}s_\phi c_\phi + \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta s_\phi^2) \\
&\quad - 2I_{zz}(\dot{\psi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2 + \dot{\theta}s_\phi c_\phi) \\
P_{31} &= -P_{13} \\
P_{32} &= -P_{23} \\
P_{33} &= 0
\end{aligned}$$

la cual es una matriz *skew*, esto es

$$P = \begin{bmatrix} 0 & P_{12} & P_{13} \\ -P_{12} & 0 & P_{23} \\ -P_{13} & -P_{23} & 0 \end{bmatrix}$$