



Predição de propagação de fissuras através de modelos constitutivos locais e técnica de construção progressiva da trajetória de descontinuidade

O.L. Manzoli

Faculdade de Engenharia de Bauru, UNESP - Univ Estadual Paulista, Bauru, SP, Brasil

INFORMAÇÃO SOBRE O ARTIGO

Historial do artigo:

Recebido a 21 de outubro de 2010

Aceite a 24 de maio de 2011

On-line a 26 de agosto de 2011

Palavras chave:

Localização de deformações

Elementos finitos com descontinuidade embecida

Modelo de fissuras distribuídas

Trajatória de fissura

Dependência da malha

R E S U M O

Estudam-se os aspectos referentes à qualidade e objetividade das respostas obtidas com as diferentes formulações (simétrica e não-simétrica) de elementos incorporados com descontinuidade forte regularizada, assim como com a abordagem contínua (distribuída), combinando-se a lei de abrandamento dependente do tamanho do elemento com um esquema de construção progressiva da trajetória de descontinuidade. O estudo é realizado com base nos conceitos de consistência cinemática e estática das formulações de elementos com descontinuidade incorporada.

© 2010 CIMNE (UPC). Publicado por Elsevier España, S.L. Todos os direitos reservados.

Prediction of crack propagation via local constitutive models with a scheme to track the discontinuity path

A B S T R A C T

This paper addresses the study of the quality and objectivity of responses obtained with the distinct formulations (symmetric and non-symmetric) of the discontinuity embedded finite elements, as well as with the local continuum approach (smeared model), in which the softening law dependent on the element size is combined with a scheme to track the discontinuity path. The study is based on the concepts of kinematic and static consistency of the embedded discontinuity formulations.

© 2010 CIMNE (UPC). Published by Elsevier España, S.L. All rights reserved.

Keywords:

Strain localization

Embedded crack elements

Smeared crack model

Crack path

Mesh dependence

1. Introdução

A simulação numérica da formação de descontinuidades em sólidos vem sendo desde longa data um dos temas de contínua pesquisa. Uma das opções muito recorridas refere-se ao emprego de meios contínuos não-lineares com abrandamento das tensões por deformações (*strain softening*). A idéia envolvida nessas aproximações consiste em descrever o processo de formação da descontinuidade mediante a perda de resistência do material em bandas estreitas, que, na situação limite de completa degradação do material, corresponderiam a superfícies de descontinuidade. A descontinuidade de deslocamentos é então representada de maneira distribuída, através de deformações localizadas no interior dessas pequenas regiões, denominadas bandas de localização.

Como já é bem conhecido, a abordagem contínua apresenta problemas numéricos quando aplicada a meios locais e independentes da velocidade (*rate-independent*). Tais meios não apresentam limitação intrínseca da largura da banda de localização de deformações, fazendo com que a situação teórica mais estável corresponda a uma banda de largura nula.

No contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF) estabeleceu-se uma limitação numérica da largura da banda de localização. A mínima dimensão da região localizada corresponde ao domínio de um elemento, fazendo com que a resposta dependa do tamanho dos elementos empregados na malha. Além da dependência do tamanho, existe a dependência do alinhamento dos elementos na malha. Se os contornos do elemento não estiverem alinhados de maneira a poder reproduzir adequadamente os modos de deformação compatíveis com os modos de descontinuidade esperados, a largura da banda de localização pode abranger o domínio de vários elementos, alterando substancialmente a resposta.

Correio eletrônico: omanzoli@feb.unesp.br

Com o intuito de sanar essas deficiências inerentes aos modelos contínuos, foram propostas diversas alternativas, entre as quais está o emprego de meios contínuos especiais [1,29,15,14,4,5], que apresentam intrinsecamente a dimensão da zona de localização.

No que se refere ao emprego de meios contínuos locais, a dependência do tamanho dos elementos pode ser efetivamente resolvida mediante a consideração do «tamanho característico» do elemento finito na lei de abrandamento do modelo constitutivo [17]. Buscasse, com isso, fazer com que a energia total consumida no interior da banda de localização seja a mesma, independente do tamanho dos elementos que a constituem. No contexto da mecânica da fratura, a região de localização de deformações corresponde à zona de processo de fraturamento e a energia consumida corresponde à energia de fratura. Esse recurso é capaz de resolver de maneira aceitável a dependência do tamanho, mas não afeta a falta de objetividade no que se refere ao alinhamento da malha. Nesse sentido, mais recentemente foram obtidos progressos para a representação objetiva de bandas cisalhantes em situações incompressíveis ou quase-incompressíveis, através de técnicas de estabilização em formulações de elementos finitos mistos [6,7].

Em contraposição às modelagens contínuas, as descontínuas buscam representar geometricamente a presença das descontinuidades, seja através da reconstrução da malha de elementos finitos introduzindo novos contornos correspondentes aos faces das descontinuidades [9]; através do enriquecimento do campo de deslocamentos da malha de elementos finitos existente [3,8]; ou mediante o enriquecimento do campo de deformações de elementos com descontinuidade incorporada [18,27,2,28,10]. Para representar a propagação da descontinuidade, a primeira opção exige o emprego de técnicas de reconstrução adaptativa da malha, enquanto a última necessita de um esquema de construção da trajetória de descontinuidade para garantir continuidade da mesma entre elementos adjacentes [11,24].

Tanto a modelagem descontínua de elementos com descontinuidade incorporada como a modelagem contínua buscam representar a descontinuidade através de deformações inelásticas compatíveis com os modos de descontinuidade no interior do elemento. A existência desse aspecto comum entre as duas abordagens sugere que a sensibilidade da resposta ao alinhamento na modelagem contínua pode ser tratada com o mesmo esquema de construção da trajetória de descontinuidade da formulação de elementos finitos com descontinuidade incorporada. O esquema usa um critério objetivo para orientação da banda de localização em função do estado de tensões, independentemente dos contornos do elemento. A banda de localização fica então confinada à largura de um elemento, impondo-se que somente os elementos pertencentes à trajetória possam apresentar comportamento não-linear com abrandamento, permanecendo os demais elementos da malha em regime elástico-linear.

No presente trabalho estudam-se os aspectos referentes à qualidade e objetividade das respostas obtidas com as diferentes alternativas (não-simétrica e simétricas) de elementos com descontinuidade incorporada, e emprega-se a abordagem contínua, combinando-se a lei de abrandamento dependente do tamanho do elemento com um esquema de construção progressiva da trajetória de localização. O estudo é realizado com base nos conceitos de consistência cinemática e estática das formulações de elementos com descontinuidade incorporada.

2. Elemento finito com descontinuidade incorporada

Considere o elemento finito de três nós da figura 1(a), de domínio bidimensional Ω_e , atravessado por uma interface descontínua, S_e , que divide o elemento em duas partes isolando o nó 1 dos demais. Seja $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}^T$ o vetor unitário normal à interface, e $\mathbf{m} = \{m_x, m_y\}^T = \{0, 1\}^T$ o vetor unitário normal ao lado oposto ao

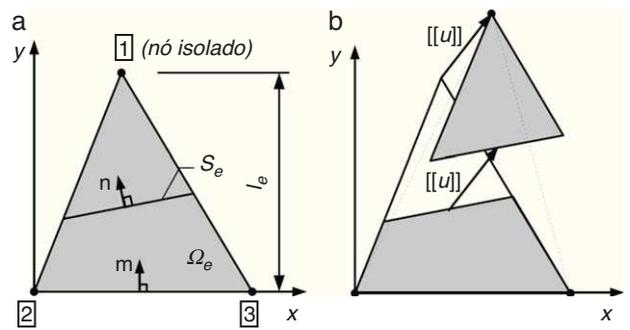


Figura 1. Elemento finito com descontinuidade incorporada.

nó isolado 1, de acordo com um sistema de referência cartesiano local (x, y) com o eixo x paralelo ao lado oposto ao nó isolado (ver figura 1(a)).

A presença da descontinuidade proporciona um deslocamento relativo do nó isolado com relação aos demais, que pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}_1 &= \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \\ \hat{\mathbf{d}}_2 &= 0 \\ \hat{\mathbf{d}}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

onde o vetor $\hat{\mathbf{d}}_i$ ($i = 1, 2, 3$) agrupa as componentes dos deslocamentos de cada nó produzidos pela descontinuidade e $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ é o vetor das componentes dos deslocamentos relativos na interface descontínua (ver figura 1(b)).

Os deslocamentos nodais produzidos pela descontinuidade, $\hat{\mathbf{d}}_i$, são provenientes de deslocamentos de corpo rígido entre as duas porções do elemento separadas pela descontinuidade. Portanto, ao determinarem-se as deformações, $\epsilon = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$, a partir dos deslocamentos nodais do elemento, \mathbf{d}_i , a componente dos deslocamentos nodais associados à descontinuidade deve ser subtraída, ou seja:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_i (\mathbf{d}_i - \hat{\mathbf{d}}_i) \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i - \mathbf{B}_1 \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \\ &= \mathbf{B} \mathbf{d} - \hat{\epsilon} \end{aligned} \quad (2)$$

onde a matriz \mathbf{B} agrupa as matrizes \mathbf{B}_i (deformação-deslocamento) convencionais do M.E.F., o vetor \mathbf{d} agrupa os vetores de deslocamentos nodais de todos os nós, \mathbf{d}_i , e $\hat{\epsilon} = \mathbf{B}_1 \llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ corresponde à parte das deformações associadas ao deslocamento de corpo rígido proveniente da descontinuidade. Segundo o sistema de referência local adotado, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \hat{\epsilon}_x \\ \hat{\epsilon}_y \\ \hat{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \llbracket u \rrbracket_x \\ \llbracket u \rrbracket_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_e} \begin{Bmatrix} 0 \\ \llbracket u \rrbracket_y \\ \llbracket u \rrbracket_x \end{Bmatrix} \quad (3)$$

onde N_1 é a função de forma convencional do M.E.F. associada ao nó isolado e l_e é a distância entre o nó isolado e o seu lado oposto (ver figura 1.a), denominada aqui «comprimento característico» do elemento. Na equação (3) teve-se em conta que

$$\begin{aligned} \{\partial N_1 / \partial x, \partial N_1 / \partial y\} &= \{m_x / l_e, m_y / l_e\} \\ &= \{0, 1 / l_e\} \end{aligned} \quad (4)$$

Considerando-se comportamento elástico-linear na parte contínua do elemento, as tensões ($\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$) podem ser obtidas por

$$\begin{aligned}\sigma &= \mathbf{D}\epsilon \\ &= \mathbf{D}(\mathbf{B}\mathbf{d} - \hat{\epsilon})\end{aligned}\quad (5)$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva elástica linear. Na equação (5) observa-se que as deformações $\hat{\epsilon}$ desempenham o papel de deformações inelásticas compatíveis com o deslocamento relativo do nó isolado proveniente da descontinuidade. As deformações $\hat{\epsilon}$ correspondem, portanto, à forma equivalente (distribuída) da descontinuidade $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ sobre o domínio do elemento. A condição de compatibilidade com a descontinuidade exige que $\hat{\epsilon}$ tenha a estrutura mostrada na equação (3), que impõe que a componente da deformação específica na direção x seja nula, ou seja:

$$\hat{\epsilon}_x = 0 \quad (6)$$

Tendo-se em conta que as tensões são constantes no elemento, o vetor de forças internas do elemento pode ser expresso por

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{int} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \sigma d\Omega_e \\ &= \mathbf{B}^T \sigma A_e\end{aligned}\quad (7)$$

onde A_e é a área do elemento finito.

A formulação do elemento finito com descontinuidade incorporada fica completamente definida introduzindo-se a lei constitutiva discreta da interface, $\mathbf{t}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)$, que estabelece a relação entre as componentes da descontinuidade e as forças de superfície, juntamente com a condição de continuidade entre as forças de superfície da parte contínua e da interface:

$$\mathbf{t}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) - \mathbf{N}^T \sigma = \mathbf{0} \quad (8)$$

Levando-se em conta as expressões (5) e (3), as equações (7) e (8) podem ser reescritas como

$$\mathbf{f}_{int} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \left(\mathbf{B}\mathbf{d} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \right) A_e \quad (9)$$

$$\mathbf{t}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) - \mathbf{N}^T \mathbf{D} \left(\mathbf{B}\mathbf{d} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \right) = \mathbf{0} \quad (10)$$

onde

$$\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}^T = l_e \mathbf{B}_1^T = \begin{bmatrix} m_x & 0 & m_y \\ 0 & m_y & m_x \end{bmatrix} \quad (11)$$

Em um esquema de solução não-linear incremental e iterativo baseado em deslocamentos, para um dado vetor de deslocamentos nodais do elemento, \mathbf{d} , é possível encontrar as correspondentes descontinuidades, $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$, resolvendo-se localmente o sistema de equações não-lineares (10). Pode-se então obter as forças internas do elemento diretamente a partir da expressão (9).

Diferenciando-se a equação (10), obtém-se:

$$\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = (\mathbf{K}' + \mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{M} / l_e)^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}} \quad (12)$$

onde $\mathbf{K}' = \partial \mathbf{t}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) / \partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ é a matriz constitutiva tangente discreta da interface.

Diferenciando-se a equação (9) e tendo-se em conta a equação (12), obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{f}}_{int} &= \mathbf{B}^T \mathbf{D} (\mathbf{B} \dot{\mathbf{d}} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket) A_e \\ &= \left[\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} - \frac{1}{l_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{M} (\mathbf{K}' + \mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{M} / l_e)^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \right] A_e \dot{\mathbf{d}} \\ &= \mathbf{K} \dot{\mathbf{d}}\end{aligned}\quad (13)$$

onde

$$\mathbf{K} = \left[\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} - \frac{1}{l_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{M} (\mathbf{K}' + \mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{M} / l_e)^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \right] A_e \quad (14)$$

é a matriz de rigidez do elemento.

É importante observar que, ainda que \mathbf{D} e \mathbf{K}' sejam simétricas, em geral a matriz de rigidez (14) não resulta simétrica. A matriz \mathbf{K} somente será simétrica na situação particular de os vetores unitários \mathbf{n} e \mathbf{m} coincidirem, ou seja, quando a descontinuidade for paralela ao lado do elemento oposto ao nó isolado, fazendo com que $\mathbf{N} = \mathbf{M}$ na expressão (14).

2.1. Formulações simétricas

Variações da formulação apresentada podem ser obtidas de maneira a obter matrizes de rigidez simétricas. Entretanto, tais formulações simétricas não são capazes de descrever simultaneamente o campo de deformações compatível com a descontinuidade e a condição de equilíbrio de forças de superfície na interface, referidas aqui como consistência cinemática e estática, respectivamente.

Uma formulação simétrica cinematicamente consistente pode ser obtida substituindo-se o vetor unitário \mathbf{n} por \mathbf{m} (ou \mathbf{N} por \mathbf{M}) nas equações anteriores. Nesse caso, as deformações associadas às descontinuidades continuam expressas por

$$\hat{\epsilon} = \frac{\mathbf{M}}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (15)$$

e a condição de equilíbrio na interface passa a ser expressa por

$$\mathbf{t}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) - \mathbf{M}^T \mathbf{D} \left(\mathbf{B}\mathbf{d} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \right) = \mathbf{0} \quad (16)$$

que somente corresponde à condição de equilíbrio original na situação particular em que $\mathbf{n} = \mathbf{m}$. Em geral a formulação não é estaticamente consistente.

Por outro lado, a formulação simétrica estaticamente consistente é obtida substituindo-se \mathbf{m} por \mathbf{n} (ou \mathbf{M} por \mathbf{N}) nas equações anteriores, conduzindo a:

$$\hat{\epsilon} = \frac{\mathbf{N}}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (17)$$

$$\mathbf{t}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) - \mathbf{N}^T \mathbf{D} \left(\mathbf{B}\mathbf{d} - \frac{\mathbf{N}}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \right) = \mathbf{0} \quad (18)$$

Note-se que nesse caso a consistência cinemática é perdida, exceto na situação particular em que os vetores unitários \mathbf{n} e \mathbf{m} coincidem.

2.2. Descontinuidade forte regularizada

A interface de descontinuidade no campo de deslocamentos (descontinuidade forte) pode ser representada como o caso limite de uma banda de localização de deformações de largura tendendo a zero. Desde esse ponto de vista, o comportamento não-linear da interface pode ser descrito através de relações constitutivas locais do tipo contínuas (tensões versus deformações) nos pontos materiais do interior da banda. Para isso, o modelo constitutivo deve satisfazer algumas condições para que seja compatível com deformações cujos valores tendem ao infinito com o estreitamento da banda [22].

Representando-se a interface de descontinuidade forte por uma banda de largura k (ver figura 2), o campo de deformações em seu interior pode ser aproximado por [19]:

$$\begin{aligned}\epsilon_s &= \epsilon + \frac{\mathbf{N}}{k} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \\ &= \mathbf{B}\mathbf{d} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket + \frac{\mathbf{N}}{k} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket\end{aligned}\quad (19)$$

O campo de tensões correspondente pode ser obtido mediante um modelo constitutivo local. Nesse caso, no lugar da equação (8),

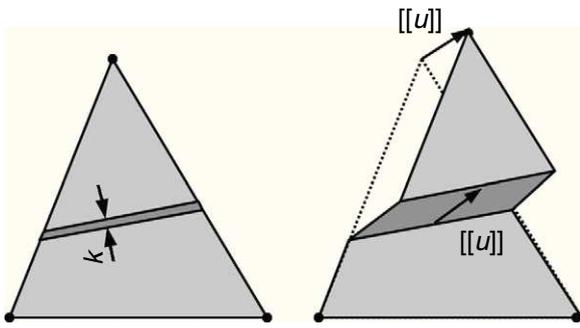


Figura 2. Elemento finito com descontinuidade forte regularizada.

a equação de continuidade de forças superficiais dentro e fora da banda fica expressa por

$$\mathbf{N}^T \sigma_S(\epsilon_S) - \mathbf{N}^T \sigma = \mathbf{0} \quad (20)$$

onde $\sigma_S(\bullet)$ representa a relação constitutiva do tipo contínua, que retorna tensões a partir das deformações na interface. Pode-se demonstrar que quando k tende a zero, recai-se em um problema de descontinuidade forte e a relação constitutiva do tipo contínua transforma-se em discreta, relacionando forças de superfícies com descontinuidades de deslocamentos [21,20,22].

Esse tipo de aproximação também é denominado Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF) e tem sido usada com êxito em problemas da mecânica da fratura, entre outros [23,13,12,25].

2.3. Construção da trajetória de descontinuidade

A correta representação da descontinuidade incorporada no elemento exige que o campo de deformações seja condizente com o deslocamento relativo do nó solitário, tal como ilustra a figura 1. Como foi visto, a construção da cinemática compatível com a descontinuidade necessita do reconhecimento do nó solitário entre os três nós. Não é necessário conhecer a posição exata da interface no interior do elemento, bastando conhecer a maneira como a descontinuidade atravessa o elemento, isolando um nó dos demais.

A linha de descontinuidade no interior do elemento representa somente um segmento da trajetória de descontinuidade, que se propaga ao longo de uma fila de elementos. Assim como ocorre em um elemento, os nós do conjunto de elementos descontínuos também devem ser separados de maneira condizente com a trajetória. Caso contrário, a cinemática da descontinuidade não poderá ser devidamente representada, acarretando travamento de tensões.

Portanto, faz-se necessário o uso de um esquema de construção da trajetória que garanta a continuidade da mesma nos contornos entre elementos vizinhos. Para isso, nesse trabalho emprega-se um esquema de construção progressiva de uma linha poligonal (ver figura 3). O esquema utiliza um critério de início da formação de descontinuidade em conexão com um critério de definição da direção da descontinuidade, \mathbf{n}_e , em função do estado de tensões em cada elemento.

3. Modelo constitutivo elasto-plástico

Para representar o comportamento não-linear da zona de localização, emprega-se o modelo constitutivo elasto-plástico definido pelas seguintes equações [26]:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \quad (21)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (22)$$

$$\dot{q} = H(\lambda) \dot{\lambda} \quad (23)$$

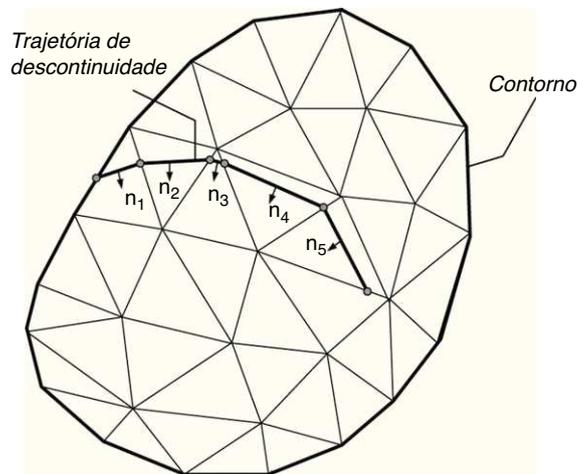


Figura 3. Esquema de construção da trajetória de descontinuidade.

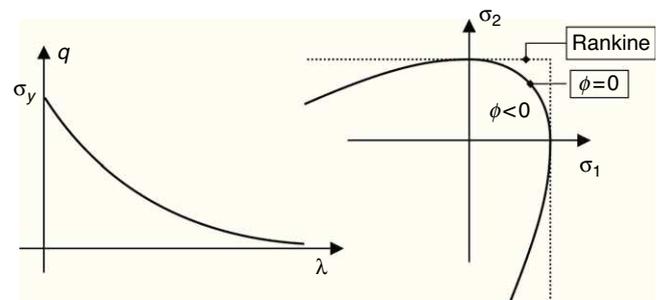


Figura 4. Modelo constitutivo elasto-plástico: (a) lei de abrandamento; (b) superfície de plastificação.

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva elástico-linear, $\dot{\epsilon}^p$ é o vetor de deformações plásticas, $\dot{\lambda}$ é o multiplicador plástico, q é a variável interna de encruamento, e H é o módulo de encruamento.

As situações de carga e descarga são caracterizadas pelas condições de Kuhn-Tucker:

$$\phi(\sigma, q) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} \phi(\sigma, q) = 0 \quad (24)$$

onde ϕ é a função de plastificação que define o domínio elástico $\phi(\sigma, q) < 0$.

No presente trabalho adotam-se as seguintes expressões para a superfície de plastificação e lei de abrandamento:

$$\phi(\sigma, q) = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{S}\| + p - q \quad (25)$$

$$q(\lambda) = \sigma_y e^{-A\lambda}; \quad H(\lambda) = \frac{\partial q(\lambda)}{\partial \lambda} = -A \sigma_y e^{-A\lambda} \quad (26)$$

onde $p = \text{Tr}(\sigma)/3$ é a tensão média, $\mathbf{S} = \sigma - p\mathbf{I}$ é a tensão desviadora, σ_y é a tensão de plastificação uniaxial, e A é o parâmetro de abrandamento. A figura 4 ilustra a lei de abrandamento exponencial adotada e a superfície de plastificação no espaço de tensões principais $\sigma_1 - \sigma_2$.

4. Energia consumida

Pode-se demonstrar que a potência específica consumida pelo modelo elasto-plástico é dado por:

$$\mathcal{P} = \sigma^T \dot{\epsilon}^p = q \dot{\lambda} \quad (27)$$

Assim, para que a energia específica total consumida no interior de uma banda de localização seja independente da largura, h , dessa banda, deve-se ter

$$h \int \mathcal{P} dt = h \int_0^\infty q d\lambda = G \quad (28)$$

com G constante. No contexto da mecânica da fratura, G corresponde à energia de fratura, considerada como uma constante do material. Tendo-se em conta a equação (26), a igualdade (28) se cumpre quando

$$A = \frac{\sigma_y}{G} h = \bar{A} h \quad (29)$$

ou seja, o parâmetro de abrandamento deve depender da largura da banda. Na equação (29), a constante $\bar{A} = \sigma_y/G$ denomina-se «parâmetro de abrandamento intrínseco» [18].

Na formulação de elementos finitos com descontinuidade forte regularizada, h corresponde à largura da banda no interior do elemento (figura 2), ou seja:

$$h = k \quad (30)$$

5. Modelo contínuo

5.1. Consistência cinemática

Para o modelo constitutivo elasto-plástico, o campo de deformações no interior do elemento finito pode ser expresso por:

$$\epsilon = \mathbf{B} \mathbf{d} - \epsilon^p \quad (31)$$

Comparando-se a expressão (31) com o campo de deformações do elemento com descontinuidade incorporada (2), verifica-se a correspondência entre as deformações plásticas do modelo contínuo, ϵ^p , com as deformações equivalentes do modelo descontínuo, $\hat{\epsilon}$. Portanto, se o modelo contínuo pretende representar o descontínuo, as deformações plásticas (inelásticas) devem ser compatíveis com o deslocamento relativo do nó isolado, associado com a presença de uma descontinuidade no interior do elemento. Isso somente ocorrerá se a condição de consistência cinemática da equação (6) for satisfeita, ou seja, se

$$\epsilon_x^p = 0 \quad (32)$$

Dado que em geral a condição (32) não se cumpre, conclui-se que o modelo contínuo é cinematicamente inconsistente.

Portanto, a consistência cinemática somente terá lugar na situação particular na qual a componente da deformação inelástica na direção paralela ao lado oposto ao nó isolado for nula. Nesse caso, as componentes da descontinuidade resultante podem ser estimadas a partir das deformações inelásticas mediante a equação (3), resultando

$$\begin{Bmatrix} \llbracket u \rrbracket_x \\ \llbracket u \rrbracket_y \end{Bmatrix} = l_e \begin{Bmatrix} \gamma_{xy}^p \\ \epsilon_y^p \end{Bmatrix} \quad (33)$$

5.2. Comprimento característico

Na modelagem contínua, a largura da banda de localização deve relacionar-se ao tamanho dos elementos que a compõem. Portanto, para obter-se a quantidade correta de energia consumida no interior da banda, é necessário estabelecer uma dimensão do elemento atravessado pela trajetória de localização que caracterize a largura h na equação (29). Com base na formulação de elementos com descontinuidade incorporada, nesse trabalho propõe-se o emprego da distância l_e entre o nó isolado e seu lado oposto (figura 1(a)):

$$h = l_e = \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} \right)^{-1} \quad (34)$$

6. Análises numéricas

6.1. Teste de tração uniaxial

A figura 5 apresenta a geometria e as condições de contorno do teste de tração simples. Controla-se o deslocamento da borda superior do espécime a fim de obter a curva de resposta estrutural (força-deslocamento) pós-crítica. A análise numérica é feita em tensão plana e o material é considerado elasto-plástico, de acordo com o modelo constitutivo apresentado anteriormente, com as seguintes propriedades: módulo de Young $E = 32$ MPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0$, tensão de plastificação uniaxial $\sigma_y = 2$ MPa, e parâmetro de abrandamento intrínseco $\bar{A} = 200$ cm⁻¹. A espessura fora do plano de análise é de 5 cm.

As análises são realizadas utilizando-se o modelo contínuo (Cont) e as três possibilidades de aproximações descontínuas de elementos com descontinuidade incorporada: não-simétrica estática e cinematicamente consistente (NS-EC), simétrica estática e cinematicamente consistente (S-E) e simétrica cinematicamente consistente (S-C). Nos modelos descontínuos emprega-se a aproximação de descontinuidade forte regularizada com $k = 0, 1$ cm.

Em todos os casos emprega-se o esquema de construção da trajetória de descontinuidade, na qual a orientação do seguimento em cada elemento é fixado ortogonalmente à direção da maior tensão principal no instante de início de plastificação. Os elementos situados fora da trajetória de localização têm comportamento elástico linear. Portanto, no presente teste a trajetória de localização corresponde a uma linha reta transversal à tensão normal imposta. Dada a homogeneidade das tensões antes do início da plastificação, a posição da trajetória é estabelecida *a priori*.

A resposta analítica do teste de tração uniaxial com o modelo elasto-plástico empregado corresponde ao desenvolvimento da componente de deformação plástica normal à trajetória, $\epsilon_y^p \neq 0$, permanecendo as demais componentes nulas, ou seja, $\epsilon_x^p = 0$ e $\gamma_{xy}^p = 0$ (os índices maiúsculos X e Y referem-se ao sistema de referência cartesiano global da figura 5). Essa resposta caracteriza o modo de deformação de abertura (modo I).

A figura 6 mostra as diferentes discretizações empregadas nas análises. São malhas com elementos finitos com contornos alinhados (Malha A) e não-alinhados (Malha B) com a trajetória de localização horizontal. Nas malhas alinhadas, o sistema de referência cartesiano local (x, y) de cada elemento pertence à trajetória

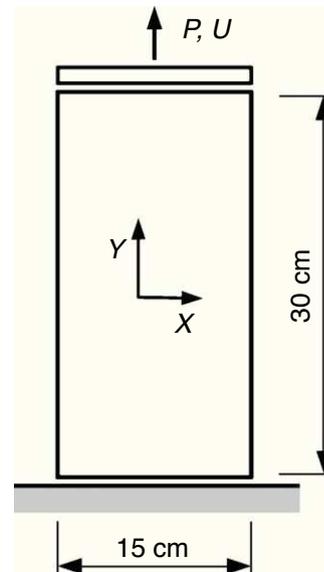


Figura 5. Teste de tração uniaxial.

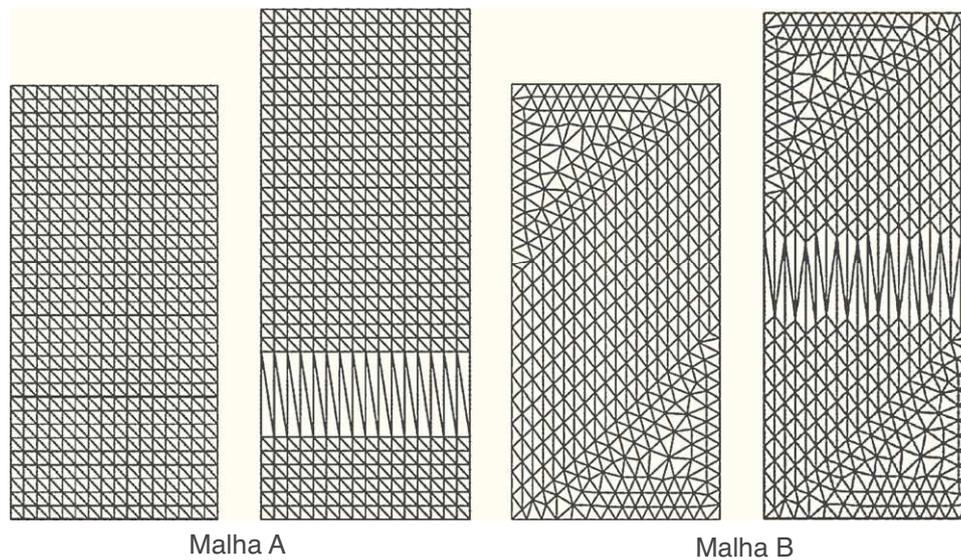


Figura 6. Malhas de elementos finitos para o teste de tração uniaxial.

coincide com o sistema global (X, Y). Na figura 6 também pode-se apreciar as configurações deformadas das malhas de elementos finitos no final da análise, que se mostraram similares para todas as aproximações.

A figura 7 mostra as respostas estruturais obtidas com as distintas aproximações numéricas. Pode-se notar que para a malha A, todas as aproximações forneceram exatamente a mesma resposta, evidenciando que as aproximações descontínuas são similares quando a malha é alinhada com a descontinuidade. A aproximação contínua se assemelha às descontínuas nesse caso, posto que a condição de consistência cinemática da equação (6) é satisfeita para todos os elementos pertencentes à trajetória. As curvas obtidas com a malha B mostram que as aproximações descontínuas simétricas e a contínua não são capazes de reproduzir adequadamente os modos de deformação do problema sem mobilização das deformações elásticas, gerando curvas estruturais mais elevadas. Entretanto, a mobilização das deformações elásticas não é proporcional ao desenvolvimento progressivo das inelásticas. A forma decrescente de todas as curvas estruturais reflete o relaxamento das deformações elásticas e, conseqüentemente, das tensões.

A figura 8 mostra a distribuição das tensões normais σ_y na malha B para um deslocamento $\delta = 0,01$ cm. Pode-se observar na figura que a falta de consistência cinemática da aproximação descontínua estaticamente consistente (S-E) e da contínua (Cont) mobiliza deformações elásticas, que se refletem na perda da homogeneidade das tensões. Embora a falta de homogeneidade das tensões não seja tão acentuada para a aproximação simétrica cinematicamente

consistente (S-C), a falta de consistência estática proporciona tensões superiores às esperadas.

6.2. Painel de concreto com dois entalhes

A análise está baseada nos experimentos realizados por Nooru-Mohamed [16] em painéis quadrados de concreto com dois entalhes profundos, submetidos primeiramente a cisalhamento e posteriormente à tração. Os experimentos envolvem a aparição de duas trajetórias de fratura curvas independentes, decorrentes da imposição de carregamentos não-proporcionais. A figura 9 ilustra a geometria e as condições de contorno do teste. Primeiramente aplica-se uma força horizontal $P_s = 10$ KN, transmitida à parede lateral esquerda superior do painel através de elementos que simulam uma placa metálica conectada ao painel. A força horizontal é mantida constante durante o restante da análise. Posteriormente impõe-se à borda superior deslocamentos verticais crescentes. As condições de contorno são impostas de maneira a impedir rotação das extremidades durante toda a análise. As propriedades do material são as mesmas empregadas na análise anterior. O esquema de construção da trajetória consiste em avançar a linha poligonal à medida que os elementos situados no fronte da mesma plastificam. Parte-se dos elementos situados nas pontas dos entalhes. A orientação de propagação é ortogonal à direção da maior tensão principal.

As figuras 10(a) e 10(b) mostram as configurações indeformada e deformada da malha de elementos finitos empregada, nas quais se destacam os elementos finitos pertencentes à trajetória

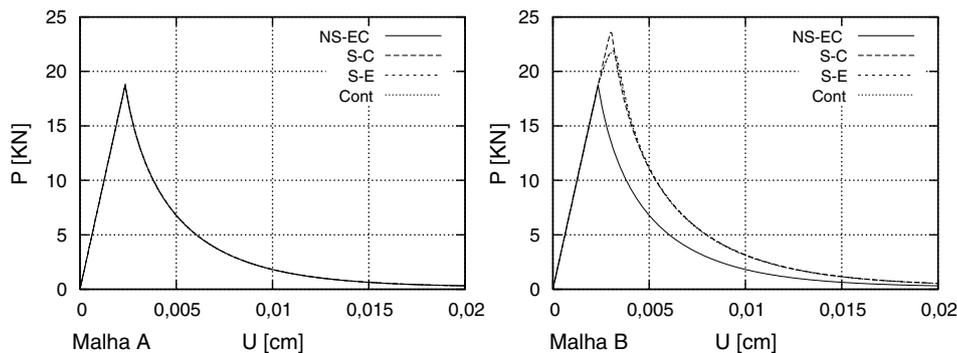


Figura 7. Respostas estruturais do teste de tração uniaxial.

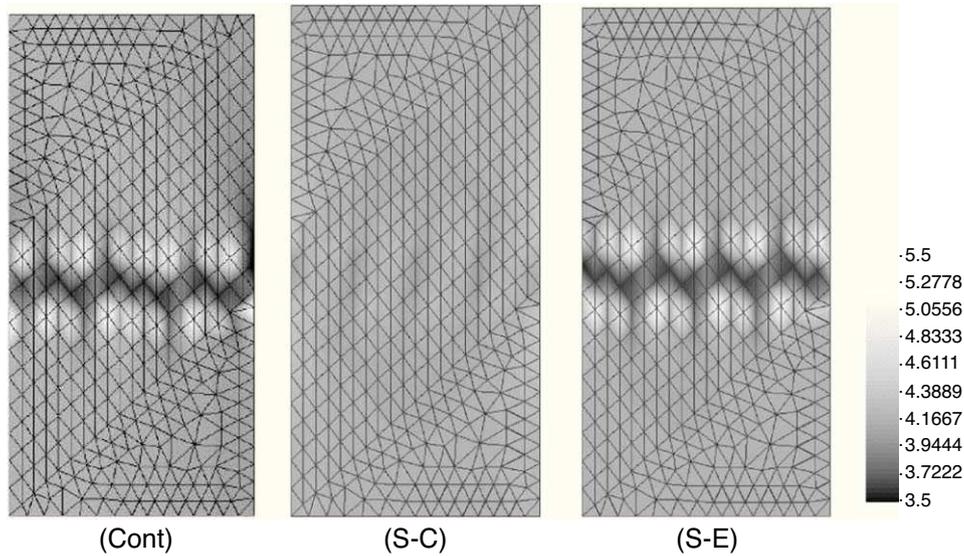


Figura 8. Distribuição das tensões σ_y para as diferentes aproximações.

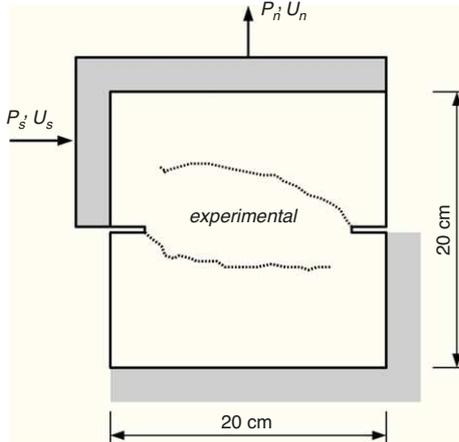


Figura 9. Painel de concreto com dois entalhes.

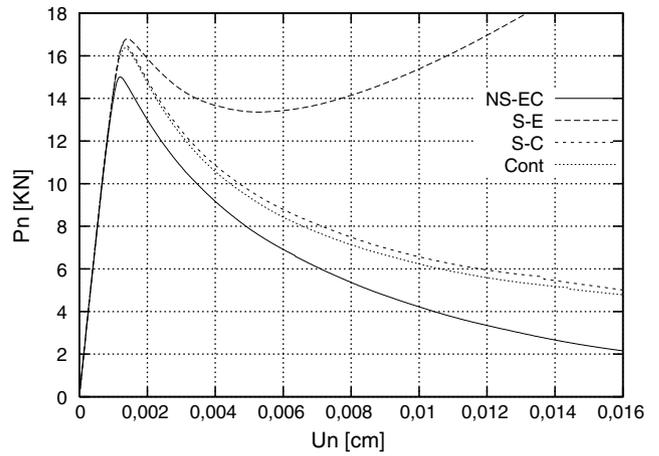


Figura 11. Respostas estruturais com as distintas aproximações.

de descontinuidade. Na figura 10(c) estão representadas as trajetórias de descontinuidade no final da análise obtidas com as diferentes aproximações. Pode-se observar que o esquema usado para a construção das trajetórias é capaz de proporcionar posições das descontinuidades bem próximas às experimentais para todas as aproximações analisadas. Entretanto, como pode ser observado

na figura 11, as curvas de respostas estruturais não ofereceram a mesma similaridade. As respostas obtidas com a formulação simétrica (S-C) e com a aproximação contínua (Cont) também correspondem a curvas estruturais mais elevadas. Já a resposta obtida com a aproximação simétrica (S-E) reflete um acentuado travamento de tensões.

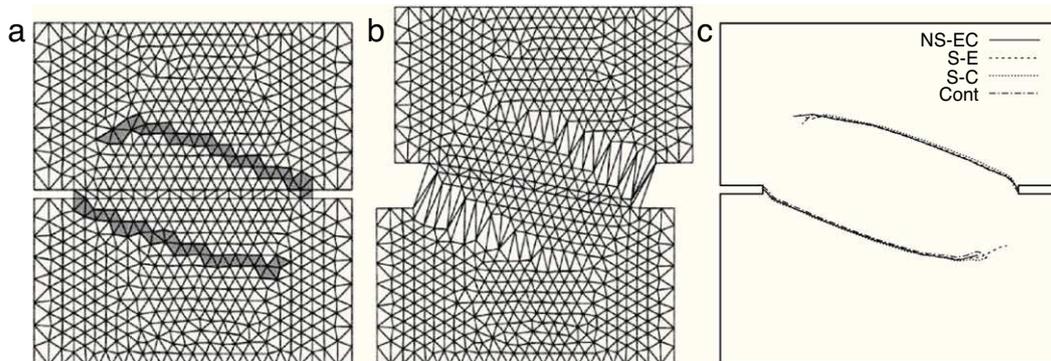


Figura 10. Painel de concreto com dois entalhes: (a) malha indeformada; (b) malha deformada; (c) posições das fissuras.

7. Conclusões

Realizou-se um estudo comparativo da *performance* das alternativas não-simétrica e simétricas de elementos finitos com descontinuidade forte incorporada, caracterizadas aqui como modelagens descontínuas. Analisou-se também o potencial da modelagem contínua para a representação da formação de descontinuidades em sólidos, através do emprego de modelo constitutivo elasto-plástico com abrandamento de tensões. Os estudos focaram os aspectos relacionados à objetividade das respostas com respeito à discretização espacial.

De acordo com o ponto de vista do presente trabalho, tanto as modelagens descontínuas como a contínua, direta ou indiretamente, representam a descontinuidade no interior do elemento através da introdução de deformações inelásticas «equivalentes». Essas deformações inelásticas buscam reproduzir os mesmos deslocamentos relativos entre os nós do elemento que resultariam da presença de uma descontinuidade interna. Verificou-se que a consistência cinemática entre deformações inelásticas «equivalentes» e modos de descontinuidade é fundamental para a obtenção de soluções objetivas. Do ponto de vista dos modelos descontínuos, a consistência cinemática é obtida pela correta construção do campo de deformações «equivalentes», de acordo com a geometria do elemento e a posição da descontinuidade em seu interior.

As modelagens contínuas não permitem intervenção da geometria nas componentes da deformação inelástica, podendo essa resultar cinematicamente inconsistente com os modos de descontinuidade que se pretende simular. Para elementos de três nós, demonstrou-se que a consistência cinemática ocorre somente para valores nulos da componente da deformação inelástica na direção do lado oposto ao nó isolado pela linha de descontinuidade que se pretende representar no interior do elemento. Dado que as deformações inelásticas dos modelos constitutivos não cumprem essa restrição, as respostas obtidas são sensíveis à orientação dos contornos dos elementos da malha.

As análises numéricas apresentadas evidenciam que somente o modelo descontínuo não-simétrico estática e cinematicamente consistente (NS-EC) produz resultados insensíveis à malha. O modelo simétrico cinematicamente consistente (S-C), apesar de apresentar tensões superiores para malhas não alinhadas à descontinuidade, não mobiliza as deformações elásticas do elemento na mesma proporção das deformações inelásticas, que crescem indefinidamente com o carregamento. As respostas estruturais obtidas com esse modelo, apesar de apresentarem dependência ao alinhamento, refletem a lei descendente do modelo constitutivo com abrandamento.

No que se refere à modelagem contínua, verifica-se que o controle da energia consumida pelo modelo constitutivo em função do «comprimento característico» resolve a questão da sensibilidade ao tamanho dos elementos. O emprego de um esquema de construção da trajetória de descontinuidade é capaz de proporcionar posições da trajetória independentes do alinhamento dos elementos da malha, entretanto a resposta estrutural permanece sensível ao alinhamento dos lados dos elementos. Essa sensibilidade ao alinhamento decorre da falta de consistência cinemática. Também nesse caso, as deformações elásticas não são mobilizadas na mesma proporção das inelásticas. As respostas estruturais são compatíveis com o abrandamento de tensões da lei constitutiva, sem apresentar efeitos típicos de travamento de tensões.

Portanto, o modelo contínuo munido de controle de energia consumida combinado com um esquema de construção da trajetória de descontinuidade pode ser uma ferramenta importante para análises qualitativas ou preliminares de problemas envolvendo descontinuidades, desde que reconhecidas as limitações apresentadas no presente artigo.

Todas as formulações apresentadas aqui são similares para os casos particulares nos quais a descontinuidade é paralela ao lado oposto ao nó isolado dos elementos com descontinuidades incorporadas e, para a modelagem contínua, quando a componente da deformação inelástica na direção do lado oposto ao nó isolado é nula.

Agradecimentos

O autor agradece o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Bibliografia

- [1] E.C. Aifantis, On the microstructural origin of certain inelastic models, *J. Engrg. Mater. Technol. ASME* 106 (1984) 326-330.
- [2] J. Alfaiate, G.N. Wells, L.J. Sluys, On the use of embedded discontinuity elements with crack path continuity for mode-I and mixed-mode fracture, *Engineering Fracture Mechanics* 69 (2002) 661-686.
- [3] T. Belytschko, N. Moës, Extended finite element method for cohesive crack growth, *Engineering Fracture Mechanics* 69 (2003) 813-833.
- [4] R. De Borst, Simulation of strain localization: A reappraisal of the cosserat continuum, *Engr. Comp.* 8 (1991) 317-332.
- [5] R. De Borst, H.B. Mühlhaus, Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 35 (1992) 521-539.
- [6] M. Cervera, M. Chiumenti, C. Agelet de Saracibar, Shear band localization via local j2 continuum damage mechanics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 193 (2003) 849-880.
- [7] M. Cervera, M. Chiumenti, C. Agelet de Saracibar, Shear band localization via local j2 continuum damage mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004) 849-880.
- [8] J. Dolbow, N. Moës, T. Belytschko, Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method, *Finite Elements in Analysis and Design* 36 (2000) 235-260.
- [9] A.R. Ingraffea, V. Saouma, Numerical modeling fracture propagation in reinforced and plain concrete, em: G.C. Sih, A. DiTomaso (Eds.), *Fracture Mechanics of Concrete: Structural Application and Numerical Calculation*, Martinus Nijhoff, 1984, pp. 171-225.
- [10] M. Jirásek, Comparative study on finite elements with embedded discontinuities, *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 188 (2000) 307-330.
- [11] O. Manzoli, J. Oliver, M. Cervera, Localización de deformaciones: Analisis y simulación numérica de discontinuidades en la mecánica de sólidos. *Centro Int. de Métodos Num. en Ingeniería (CIMNE)*, Monografía N. 44, Barcelona - Spain, 1999.
- [12] O.L. Manzoli, W.S. Venturini, An implicit bem formulation to model strong discontinuities in solids, *Computational Mechanics* 40 (2007) 901-909.
- [13] O.L. Manzoli, P.B. Shing, A general technique to embed non-uniform discontinuities into standard solid finite elements, *Computers & Structures* 84 (2006) 742-757.
- [14] A. Nacar, A. Needleman, M. Ortiz, A finite element methods for analyzing localization in rate dependent solids at finite strains, *Comput. Methods Appl. Engrg.* 73 (1989) 235-258.
- [15] A. Needleman, Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 67 (1988) 69-86.
- [16] M.B. Nooru-Mohamed, Mixed-mode fracture of Concrete: an experimental approach. PhD thesis, Delft University of Technology, Delft, 1992.
- [17] J. Oliver, A consistent characteristic length for smeared cracking models, *Int. Journ. Num. Meth. Engrg.* 28 (1989) 461-474.
- [18] J. Oliver, Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations, part 1: Fundamentals, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 39 (1996) 3575-3600.
- [19] J. Oliver, Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations, part 2: Numerical simulation, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 39 (1996) 3601-3623.
- [20] J. Oliver, On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations, *International Journal of Solids and Structures* 37 (2000) 7207-7229.
- [21] J. Oliver, M. Cervera, O.L. Manzoli, On the use of strain-softening models for the simulation of strong discontinuities in solids, em: R. de Borst, E. Van der Giessen (Eds.), *Material Instabilities in Solids*, John Wiley and Sons Ltd, 1998.
- [22] J. Oliver, M. Cervera, O.L. Manzoli, Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach, *Int. J. of Plasticity* 15 (1999) 319-351.
- [23] J. Oliver, A.E. Huespe, Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004) 3195-3220.
- [24] J. Oliver, A.E. Huespe, E. Samaniego, E.W.V. Chaves, On strategies for tracking strong discontinuities in computational failure mechanics, em: H.A. Mang,

- F.G. Rammerstorfer, J. Eberhardsteiner (Eds.), Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V), Vienna University of Technology, Austria, 2002.
- [25] J. Oliver, D.L. Linero, A.E. Huespe, O.L. Manzoli, Two-dimensional modeling of material failure in reinforced concrete by means of a continuum strong discontinuity approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008) 332–348.
- [26] J.C. Simó, T.J.R. Hughes, *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag, 1998.
- [27] J.C. Simó, J. Oliver, F. Armero, An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids, *Computational Mechanics* 12 (1993) 277–296.
- [28] B. Spencer, *Finite Elements with Embedded discontinuities for modeling reinforced concrete members*. PhD thesis, University of Colorado, Boulder, Colorado, 2002.
- [29] P. Steinmann, K. Willam, *Localization within the Framework of Micropolar Elasto-Plasticity*, in: *Advances in Continuum Mechanics*, Springer, Berlin, 1991.