



## Obtenção de um modelo de elementos finitos simplificado para representação de juntas rebitadas em análise dinâmica de estruturas usando uma ferramenta de *updating*

M. Dourado \* e J. Meireles

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade do Minho, Campus de Azurém, 4800-058 Guimarães, Portugal



### INFORMAÇÃO SOBRE O ARTIGO

#### Historial do artigo:

Recebido a 12 de janeiro de 2015

Aceite a 13 de abril de 2015

On-line a 23 de julho de 2015

#### Palavras-chave:

Junta rebitada

Melhoramento de modelos de elementos

finitos

Análise modal

Otimização

### R E S U M O

Neste artigo é proposto um modelo de elementos finitos simplificado para representação de juntas rebitadas em análise dinâmica de estruturas. O rebite é modelado com elementos que combinam mola e amortecedor. Vários modelos numéricos são estudados com diferentes quantidades de rebites (um, 2, 3 e 5) e diferentes quantidades de elementos mola-amortecedor (4, 6, 8, 12, 16 e 20) por cada rebite. Amostras constituídas por 2 placas de alumínio ligadas entre si por diferentes quantidades de rebites (um, 2, 3 e 5) são construídas e submetidas a análise modal experimental, a fim de serem conhecidas as suas características modais – frequências naturais e formas naturais de vibração. É usada uma metodologia de melhoramento de modelos de elementos finitos, também conhecido na linguagem anglo-saxónica por *updating*, com o fim de obter a melhor representação numérica da junta rebitada relativamente às amostras experimentais. Uma avaliação da melhor representação numérica da junta rebitada é efetuada com base na comparação entre as frequências naturais experimentais e as frequências naturais numéricas, para cada modo de vibração, após aplicação do processo de melhoramento de elementos finitos. Mostra-se que o modelo de junta composto por 8 e 12 elementos mola-amortecedor por rebite consegue uma melhor aproximação ao comportamento dinâmico observado experimentalmente. Um valor numérico da constante de rigidez é obtido para as juntas em estudo.

© 2015 CIMNE (Universitat Politècnica de Catalunya). Publicado por Elsevier España, S.L.U. Este é um artigo Open Access sob a licença de CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

### Obtaining a simplified finite element model for riveted lap joints in structural dynamics analysis using a updating tool

### A B S T R A C T

In this paper, a simplified finite element model to represent a riveted lap joint in structural dynamic analysis field is proposed. The rivet is modeled by spring-damper combination elements. Several numerical models are studied with different quantities of rivets (1, 2, 3 and 5) and spring-damper combination elements (4, 6, 8, 12, 16 and 20) per rivet. Experimental samples of two aluminum material plates connected by different quantities of rivets (1, 2, 3 and 5) are built and tested in order to be known its modal characteristics - natural frequencies and mode shapes. A finite element model updating methodology is used in order to get the best numerical riveted lap joint representation relatively to the experimental samples. An evaluation of the best numerical riveted lap joint is carried out based on the comparison between the experimental and numerical resonance frequencies after updating. It is shown that the riveted lap joints composed by eight and twelve spring-damper combination elements per rivet have the best representation. A stiffness constant value is obtained for the riveted lap joints in study

© 2015 CIMNE (Universitat Politècnica de Catalunya). Published by Elsevier España, S.L.U. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

#### Keywords:

Riveted Lap Joint

Finite Element Model Updating

Modal Analysis

Optimization

\* Autor para correspondência.

Correios eletrónicos: [mdourado@dem.uminho.pt](mailto:mdourado@dem.uminho.pt) (M. Dourado), [meireles@dem.uminho.pt](mailto:meireles@dem.uminho.pt) (J. Meireles).

## 1. Introdução

As juntas rebitadas possuem ampla aplicação em diversos setores industriais, principalmente na indústria automóvel e aeroespacial. As estruturas envolvidas nesses setores de atividade possuem normalmente um largo número de ligações rebitadas. Para os projetistas desse tipo de estruturas não é prático modelar detalhadamente o rebite em elementos finitos, devido à necessidade de usar um grande número de graus de liberdade, aumentando o custo computacional da análise.

Alguns trabalhos que descrevem o comportamento estático e o comportamento à fadiga de juntas rebitadas, usam uma modelação simplificada [1–4]. Todos eles utilizam elementos de mola-amortecedor ou elementos de viga para efetuar a ligação entre os nós das placas a unir e assim simular o rebite. Contudo, a ligação rebitada não fica totalmente definida se o valor da constante de rigidez também não for definido. O valor da constante de rigidez da junta nunca é claramente explícito. Para aumentar a precisão do modelo numérico de uma junta rebitada, o valor da constante de rigidez deve ser definido, uma vez que este parâmetro modal tem grande influência nas frequências naturais e nas formas naturais de vibração do sistema.

Um trabalho semelhante ao proposto pelos autores, mas não envolvendo juntas rebitadas, descreve uma avaliação de modelos simplificados de elementos finitos para juntas soldadas por pontos [5]. Nesse trabalho, 4 tipos de modelos simplificados para simular aquele tipo de soldadura são avaliados pelos autores: o modelo de barra rígida múltipla ou *multiple rigide-bar* (MRB), o modelo de casca e barra-rígida ou *rigid bar-rigid shell* (RB-RSH), o modelo sólido tridimensional ou *solid nugget* (SN) e o modelo de barra rígida ou *rigid bar* (RB).

Um dos 4 modelos apresentados tem particular interesse para aplicação neste trabalho, o modelo MRB. No modelo MRB, 2 chapas são conectadas por vários elementos de barra de modo a simular a soldadura por pontos. Este modelo tem a vantagem de apresentar vários elementos de barra, o que permite obter mais estabilidade na junta de ligação devido à quantidade de graus de liberdade que são restringidos.

O modelo SN é composto por elementos sólidos e, portanto, mais complexo de construir e consequentemente de análise computacional mais demorada.

Para determinar o valor da constante rigidez da mola que simula o rebite, uma técnica de melhoramento de modelos de elementos finitos, também conhecida por *updating*, é utilizada. Essa técnica está assente num processo de otimização baseado em sucessivas iterações, sendo por isso denominado por método iterativo ou método indireto [6]. Os métodos indiretos podem ser divididos em 3 grupos principais: o método da sensibilidade [7], o método de função de resposta [8] e o método no domínio do tempo [9]. Neste trabalho é utilizada uma metodologia de melhoramento de modelos de elementos finitos desenvolvida com base no método da sensibilidade [10].

A metodologia, desenvolvida em Matlab®, trabalha com um otimizador que controla os parâmetros a otimizar no modelo numérico. Por sua vez, o otimizador está dotado com um *solver* de procura global estocástico (*GlobalSearch*) e usa o algoritmo Sequential Quadratic Programming (SQP) para encontrar o mínimo global da função objetivo [11]. Neste trabalho o parâmetro a otimizar é a constante de rigidez da mola do elemento mola-amortecedor. O processo de melhoramento de modelos de elementos finitos é descrito na secção 4.

É efetuada a análise modal experimental, como descrito na secção 5, de modo a conhecer o comportamento dinâmico dos modelos físicos com junta rebitada. Os modelos são constituídos por 2 chapas de alumínio unidas por diferentes quantidades de rebites (um, 2, 3 e 5).

Os modelos de elementos finitos são construídos em ANSYS® Parametric Design Language (APDL), conforme descrito na secção 6. Um valor inicial para a constante de rigidez é atribuído aos elementos mola-amortecedor. O amortecimento em materiais metálicos é considerado insignificante, pelo que pode ser desprezado, não sendo assim considerado no elemento mola-amortecedor. De modo a justificar essa opção foram determinados os fatores de amortecimento  $\xi$  para todos os modos de vibração obtidos experimentalmente de um dos casos de estudo apresentado. Foi usado o método do ponto de meia potência para obtenção dos fatores de amortecimento. Para cada modo de vibração é também apresentado o respetivo valor do fator de qualidade  $Q$ . Considera-se que para valores de  $\xi < 0.1$  o amortecimento do sistema é muito pequeno e para valores de  $Q > \frac{1}{2}$  o sistema é do tipo subamortecido [12].

Com o programa de melhoramento de modelos de elementos finitos é estimado o valor da constante rigidez da mola, sendo os resultados apresentados na secção 7.

O modelo de elementos finitos da junta rebitada que melhor representa os modelos físicos é assim obtido, como se conclui na secção 8.

## 2. Problema teórico

Para um sistema dinâmico, com vários graus de liberdade, a equação de movimento que governa a resposta dinâmica do sistema, quando sujeito a excitações externas, é dada sob a forma da matriz generalizada [13]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

onde,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , sendo  $n$  o número de graus de liberdade, denotam, respetivamente, a matriz de massa, amortecimento e rigidez do sistema, e  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , denotam, respetivamente, os vetores aceleração, velocidade, deslocamento e excitação externa em função do tempo.

Para um sistema não amortecido e sem perturbação externa, a Eq. (1) é reduzida a

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2)$$

Uma solução do sistema linear homogéneo de segunda ordem (2) pode ser escrita como

$$\mathbf{x}(t) = \phi_i \cos(\omega_i t + \psi_i) \quad (3)$$

onde  $\psi_i$  é um ângulo de mudança de fase,  $\phi_i$  representa um vetor próprio e  $\omega_i$  está relacionado com o valor próprio do problema de valores e vetores próprios como se explica a seguir.

Calculando a segunda derivada de (3) em ordem a  $t$  obtém-se

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\omega_i^2 \phi_i \cos(\omega_i t + \psi_i), \quad (4)$$

que em conjunto com (3) pode ser inserido na expressão (2), obtendo-se

$$\mathbf{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\phi_i. \quad (5)$$

Pré-multiplicando a Eq. (5) por  $\mathbf{M}^{-1}$  pode-se escrever a igualdade

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\phi_i = \omega_i^2 \phi_i, \quad (6)$$

ou introduzir a matriz identidade,

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{I})\phi_i = 0. \quad (7)$$

De modo a existir uma solução não-trivial,  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{I}$  deve ser singular. Assim,

$$\det(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{I}) = 0. \quad (8)$$

A partir de  $\det(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda_i\mathbf{I}) = \mathbf{0}$  pode-se determinar os valores próprios  $\lambda_i = \omega_i^2$  em que cada valor próprio tem um vetor próprio  $\phi_i \neq \mathbf{0}$  associado, o qual pode então ser obtido a partir de solução de (7). Os vetores próprios  $\phi_i$  correspondem às formas naturais de vibração, cujas componentes representam amplitudes, e  $\omega_i$  representam as frequências naturais circulares medidas em rad/s, definidas como as raízes quadradas positivas dos valores próprios.

O problema de encontrar as frequências naturais e as formas naturais de vibração de um dado sistema dinâmico é aqui abordado, na medida em que a resposta modal dos modelos de placas rebitadas é usada para o processo de melhoramento de modelos de elementos finitos.

A partir da resposta do sistema também é possível, usando a função de resposta em frequência (FRF), determinar o fator de amortecimento  $\xi$ . O fator de amortecimentos é dado por [12]

$$\xi = \frac{\Delta\omega}{2\omega}, \quad (9)$$

onde  $\Delta\omega = p_2 - p_1$  é a largura de banda em frequência entre os pontos de média potência  $p_1$  e  $p_2$ , e  $\omega$  é frequência natural circular do modo de vibração que está entre  $p_1$  e  $p_2$ .

Uma vez conhecido a amplitude máxima  $X_{\max}$ , os pontos de média potência são encontrados quando a amplitude  $X_p$  é determinada, em que

$$X_p = \frac{X_{\max}}{\sqrt{2}}. \quad (10)$$

O fator de qualidade  $Q$  é dado por

$$Q = \frac{1}{2\xi}. \quad (11)$$

### 3. Função objetivo

Nesta secção é descrito o formalismo desenvolvido para a função objetivo. A função objetivo  $f$  é dada pela soma de 3 funções específicas como descrito abaixo

$$f(\mathbf{v}) = f_{\varphi C}(\mathbf{v}) + f_{\varphi U}(\mathbf{v}) + f_{\lambda}(\mathbf{v}), \quad (12)$$

onde a função  $f_{\varphi C}$  representa e quantifica a diferença entre os pares de formas naturais de vibração correlacionadas do modelo de referência e do modelo numérico, a função  $f_{\varphi U}$  representa e quantifica a diferença entre os pares de formas naturais de vibração não correlacionadas do modelo de referência e do modelo numérico, e a função  $f_{\lambda}$  representa e quantifica a diferença entre as frequências do modelo numérico e do modelo de referência.

A função objetivo  $f$  depende do vetor  $\mathbf{v}$  que contém os parâmetros a otimizar e quantifica a diferença do comportamento dinâmico entre o modelo numérico e o modelo de referência.

A função objetivo  $f_{\varphi C}$  é dada por

$$f_{\varphi C}(\mathbf{v}) = -\frac{\sum_{i=1}^{N_C} \hat{M}AC_{ii_q}(\hat{\mathbf{v}}_q)}{\sum_{i=1}^{N_C} \hat{M}AC_{ii_0}(\hat{\mathbf{v}}_0)}, \quad (13)$$

onde  $N_C$  é o número de pares de formas naturais de vibração correlacionadas da diagonal da matriz MAC (Modal Assurance Criterion),  $\hat{M}AC_{ii_0}$  são os elementos da diagonal da matriz MAC inicialmente estimados,  $\hat{\mathbf{v}}_0$  é o vetor que contém os valores iniciais dos parâmetros,  $\hat{M}AC_{ii_q}$  são os elementos da diagonal da matriz MAC estimados a cada iteração  $q$  e  $\hat{\mathbf{v}}_q$  é o vetor que contém os valores dos parâmetros estimados a cada iteração  $q$ , com  $q \geq 0$ . O valor do

MAC entre 2 formas naturais de vibração  $\phi_i$  and  $\phi_{j_q}$  é definido por [14]

$$MAC_{ij_q} = \frac{\left(\phi_i^T \hat{\phi}_{j_q}\right)^2}{\left(\phi_i^T \phi_i\right) \left(\left(\hat{\phi}_{j_q}\right)^T \hat{\phi}_{j_q}\right)}, \quad (14)$$

onde  $\phi_i$  é o vetor de referência que contém as formas naturais de vibração experimentais  $i$  e  $\hat{\phi}_{j_q}$  é vetor que contém as formas naturais de vibração numéricas estimadas  $j$  a cada iteração  $q$ , com  $q \geq 0$ .

A função  $f_{\varphi U}$  é dada por

$$f_{\varphi U}(\mathbf{v}) = \left(\frac{1}{N_U}\right) \frac{\sum_{j=1}^{N_U} \sum_{i=1}^{N_U} \hat{M}AC_{ij_q}(\hat{\mathbf{v}}_q)}{\sum_{j=1}^{N_U} \sum_{i=1}^{N_U} \hat{M}AC_{ij_0}(\hat{\mathbf{v}}_0)}, \quad (15)$$

onde  $N_U$  é o número de pares de formas naturais de vibração não correlacionadas fora da diagonal da matriz MAC.

A função  $f_{\lambda}$  é dada por

$$f_{\lambda}(\mathbf{v}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_{\lambda}} \left(f_i - \hat{f}_{i_q}(\hat{\mathbf{v}}_q)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N_{\lambda}} \left(f_i - \hat{f}_{i_0}(\hat{\mathbf{v}}_0)\right)^2}, \quad (16)$$

onde  $N_{\lambda}$  é o número de valores próprios  $\lambda$  correspondente aos pares de formas naturais de vibração correlacionadas (ver secção 1),  $f_i$  é a  $i^{\text{th}}$  frequência natural de referência obtida experimentalmente,  $\hat{f}_{i_0}$  frequência numérica inicial estimada definida por  $\hat{f}_{i_0} = \sqrt{\hat{\lambda}_{i_0}/2\pi}$ ,  $\hat{f}_{i_q}$  é a  $i^{\text{th}}$  frequência natural numérica estimada a cada iteração  $q$  definida por  $\hat{f}_{i_q} = \sqrt{\hat{\lambda}_{i_q}/2\pi}$ ,  $\hat{\lambda}_{i_0}$  é o  $i^{\text{th}}$  valor próprio numérico inicial estimado, e  $\hat{\lambda}_{i_q}$  é o  $i^{\text{th}}$  valor próprio numérico estimado a cada iteração  $q$ , com  $q \geq 0$ . O termo quadrático na Eq. (16) é usado para acelerar a convergência e obter apenas diferenças positivas entre as frequências do modelo numérico e de referência. O denominador em (13), (15) e (16) é usado para obter diferenças normalizadas. Os vetores que contêm as formas naturais de vibração estimadas  $\hat{\phi}_{i_q}$  e os valores próprios estimados  $\hat{\lambda}_{i_q}$  são função dos parâmetros contidos no vetor  $\hat{\mathbf{v}}_q$ . A relação entre eles pode ser escrita, respetivamente, como

$$\hat{\phi}_{i_q} = f(\hat{\mathbf{v}}_{q_1}, \hat{\mathbf{v}}_{q_2}, \hat{\mathbf{v}}_{q_3}, \dots, \hat{\mathbf{v}}_{q_p}) \quad (17)$$

e

$$\hat{\lambda}_{i_q} = f(\hat{\mathbf{v}}_{q_1}, \hat{\mathbf{v}}_{q_2}, \hat{\mathbf{v}}_{q_3}, \dots, \hat{\mathbf{v}}_{q_p}), \text{ para } q = 1, \dots, n, \quad (18)$$

onde  $p$  é o número de parâmetros a otimizar e  $n$  é o número de graus de liberdade.

Os parâmetros  $\hat{\mathbf{v}}_{q_1}, \dots, \hat{\mathbf{v}}_{q_p}$  contidos no vetor  $\hat{\mathbf{v}}_q$  estão sujeitos à restrição

$$\nu_{LB} \leq \hat{v}_{q_i} \leq \nu_{UB}, \text{ para } i = 1, \dots, p, \quad (19)$$

onde a quantidade  $\nu_{LB}$  representa o limite inferior e a quantidade  $\nu_{UB}$  representa o limite superior.

O valor ótimo para a constante de rigidez do elemento mola-amortecedor é obtido quando a função objetivo é minimizada. No entanto, o valor mínimo obtido na função objetivo é diferente para cada caso, uma vez que os modelos envolvidos em cada caso também são diferentes, não podendo ser considerado como uma referência direta para avaliar a melhor representação numérica da respetiva junta rebitada. O valor mínimo obtido na função objetivo apenas indica que o valor ótimo da constante de rigidez foi encontrado. A avaliação é então dada pela diferença percentual média

entre as frequências naturais do modelo de referência e do modelo numérico, definida como

$$\text{Diferença Percentual Média} = \frac{\sum_{i=1}^{N_\lambda} \left( \frac{f_i - \hat{f}_i}{\hat{f}_i} \right)}{N_\lambda} \times 100, \quad (20)$$

onde  $\hat{f}_i$  é a  $i^{\text{th}}$  frequência natural numérica estimada final.

#### 4. Processo de melhoramento de modelos de elementos finitos

O algoritmo usado no processo de melhoramento de modelos de elementos finitos é apresentado nesta secção. O algoritmo é implementado em MATLAB®, usando algumas ferramentas da sua Toolbox, e está preparado para interagir com o programa de cálculo de elementos finitos ANSYS®.

##### 4.1. Descrição do algoritmo

Considere-se  $\hat{\varphi}_0(\hat{\mathbf{v}}_0)$  e  $\hat{\lambda}_0(\hat{\mathbf{v}}_0)$ , respetivamente como os vetores próprios numéricos iniciais estimados e os valores próprios numéricos iniciais estimados, a partir dos quais podem ser calculados  $\hat{M}\hat{A}\hat{C}_{ii_0}(\hat{\mathbf{v}}_0)$ ,  $\hat{M}\hat{A}\hat{C}_{ij_0}(\hat{\mathbf{v}}_0)$  e  $\hat{\omega}_{i_0}(\hat{\mathbf{v}}_0)$ , onde  $\hat{M}\hat{A}\hat{C}_{ii_0}(\hat{\mathbf{v}}_0)$  são os elementos da diagonal da matriz MAC inicial estimada e  $\hat{M}\hat{A}\hat{C}_{ij_0}(\hat{\mathbf{v}}_0)$  são os valores fora da diagonal da matriz MAC inicial estimada.

A função objetivo inicial  $f^0$ , definida em (12), dependendo das Eqs. (13)–(16), é usada para comparar os valores numéricos iniciais estimados com os valores de referência/experimentais. Se  $f^0 \rightarrow -1^+$ , onde  $-1^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-1 + \epsilon)$  ou se a condição  $\|f^{q+1} - f^q\| \leq 10^{-6}$  é satisfeita como critério de paragem, então o processo de melhoramento de modelos de elementos é concluído. Se nenhuma das condições acima é satisfeita, então  $q = q + 1$  e novas estimativas  $\hat{\varphi}_{q+1}(\hat{\mathbf{v}}_{q+1})$  e  $\hat{\lambda}_{q+1}(\hat{\mathbf{v}}_{q+1})$  são calculadas. Novamente, estes valores são comparados com os valores de referência usando a função objetivo  $f^{q+1}$  baseada na Eq. (12). Se para alguma iteração  $q = h \geq 1$ , tal que  $f^h \rightarrow -1^+$ , ou se a condição  $\|f_d^{q+1} - f_d^q\| \leq 10^{-6}$  é satisfeita, então o processo de melhoramento de modelos de elementos finitos é concluído e os valores ótimos de  $\hat{\varphi}_h(\hat{\mathbf{v}}_h)$  e  $\hat{\lambda}_h(\hat{\mathbf{v}}_h)$  são encontrados. O mesmo é dizer que o valor ótimo do parâmetro que caracteriza a constante de rigidez do elemento mola-amortecedor e que melhor aproxima o modelo numérico ao modelo de referência/experimental é encontrado.

##### 4.2. Fluxograma do processo

O fluxograma que descreve a interação entre o MATLAB® e o ANSYS® é apresentado na figura 1.

Os principais passos do processo de melhoramento de modelo de elementos finitos são os seguintes.

1. Executa o ANSYS® com o modelo de elementos finitos inicial a otimizar, construído em APDL num ficheiro *input.txt*, com os parâmetros a otimizar contidos no vetor inicial  $\mathbf{v}_0$ .
2. Lê o ficheiro de resultados *output.txt* obtido do ANSYS® e compara os valores estimados com os valores de referência/experimentais, de modo a construir a função objetivo  $f$ .
3. Conclui o processo se um valor ótimo é atingido, ou seja, se as condições de paragem são satisfeitas, ou vai para o passo 4.
4. Obtém os novos parâmetros  $\hat{\mathbf{v}}_{q+1}$  definidos pelo otimizador, tendo em conta os constrangimentos definidos pela condição (19).
5. Modifica o modelo de elementos finitos no ficheiro *input.txt* com os novos parâmetros  $\hat{\mathbf{v}}_{q+1}$ .

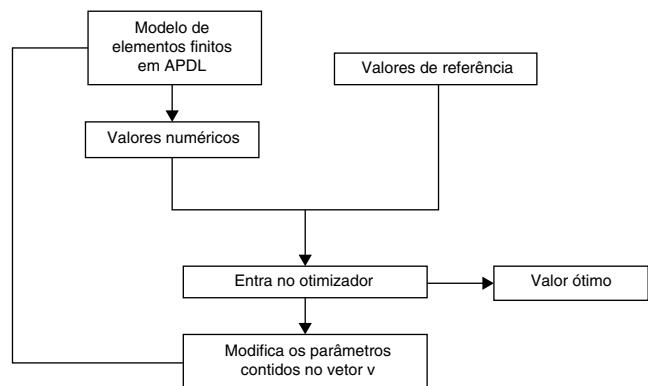


Figura 1. Fluxograma de interação entre o Matlab® e o Ansys®.

#### 6. Inicia uma nova análise com o novo ficheiro *input.txt*, indo para o passo 1.

O processo de melhoramento de elementos finitos usa no seu otimizador um solver de procura global baseado nos métodos estocásticos, o *GlobalSearch*, fornecido pela Toolbox do MATLAB®. O *GlobalSearch* é processado em 2 fases: a fase local e a fase global. Na fase local, os pontos de amostragem, obtidos aleatoriamente, são manipulados por um solver local, o *fmincon*, de modo a encontrar vários candidatos a mínimo local. Na fase global, o mínimo local com menor valor da função objetivo é usado como uma aproximação para o ótimo global. Os restantes pontos de partida são rejeitados.

#### 5. Procedimento experimental

As amostras para análise modal experimental consistem em 2 placas de alumínio (PL1 e PL2) interligadas, com 2 mm de espessura, como mostrado na figura 2a. As placas estão ligadas por meio de rebites de alumínio com 3 mm de diâmetro. Quatro amostras, com junta composta por um, 2, 3 e 5 rebites, são submetidas a análise modal experimental. Os testes são realizados em temperatura ambiente, cerca de 20 °C, utilizando o equipamento LMS SCADAS® para análise modal experimental. As amostras são testadas na condição próxima de livre no espaço, estando suspensas em 2 pontos por meio de um fio de nylon de 350 mm de comprimento, de modo a não causar interferência no ensaio, conforme mostrado na figura 2b. Os testes são realizados utilizando um martelo de impacto instrumentado da PCB®, sendo a força de impacto aplicada no ponto

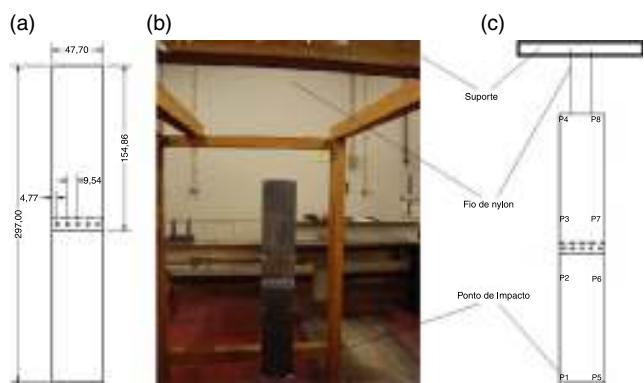


Figura 2. (a) Representação esquemática de um modelo com junta composta por 5 rebites; (b) modelo submetido a análise modal experimental; (c) localização dos pontos medidos.

P1, e a resposta medida com um laser de interferometria Doppler em 8 pontos, P1 a P8 como mostrado na figura 2c.

Os 8 pontos selecionados são os mínimos necessários para a obtenção de dados de referência/experimentais suficientes de modo a que o processo de melhoramento de modelos de elementos finitos (*updating*) seja efetuado com sucesso.

Foi efetuado outro ensaio experimental em que a resposta foi medida em 12 pontos, de modo a ser possível representar graficamente com boa aproximação as 8 primeiras formas naturais de vibração dos modelos experimentais. Os dados são coletados no domínio do tempo (amplitude em função do tempo) e processados no software de análise modal LMS®, de modo a serem convertidos para o domínio da frequência. As frequências naturais e amplitudes de cada ponto são obtidas a partir da curva ajustada da FRF.

O material foi adquirido todo do mesmo lote e os cortes efetuados por meio de tecnologia laser. Foram efetuados 3 ensaios em condições idênticas de um mesmo caso para avaliar a repetibilidade dos resultados, verificando-se uma diferença entre eles desprezável, pelo que se procedeu a posteriormente a um único ensaio para cada caso de estudo.

As 2 placas usadas para construir as amostras foram também elas sujeitas individualmente a análise modal experimental, com o fim de verificar se as placas modeladas em elementos finitos representam bem as placas físicas.

## 6. Modelos de elementos finitos

Os modelos numéricos são construídos utilizando o APDL, com as mesmas propriedades geométricas e mecânicas dos modelos experimentais, como apresentado na tabela 1. As propriedades mecânicas dos modelos experimentais, como o módulo de Young e o coeficiente de Poisson, foram estimadas por meio de ensaios experimentais de tração.

As placas são modeladas com elementos de casca (shell63). O rebite é construído com elementos que combinam mola e amortecedor (combin14). A dimensão do elemento de casca é de 0,003 m de largura 0,003 m de altura. O amortecimento em materiais metálicos como o alumínio é considerado insignificante, pelo que pode ser desprezado, não sendo assim considerado no elemento mola-amortecedor. Para justificar essa opção são apresentados na seção 7 os valores dos fatores de amortecimento  $\xi$ , assim como os respectivos valores do fator de qualidade  $Q$  para os modos de vibração obtidos experimentalmente no modelo de junta rebitada com 5 rebites.

Um valor inicial de  $5 \times 10^7$  N/m é atribuído à constante de rigidez da mola, que é variável durante o processo de melhoramento de modelos de elementos finitos. A massa do rebite obtida por pesagem é dividida pontualmente pelos nós que interligam as 2 placas por meio dos elementos mola-amortecedor e é modelada com elementos de massa (mass21), não sendo utilizada como variável ao longo do processo de melhoramento.). As propriedades do rebite modelado em elementos finitos são apresentadas na tabela 2.

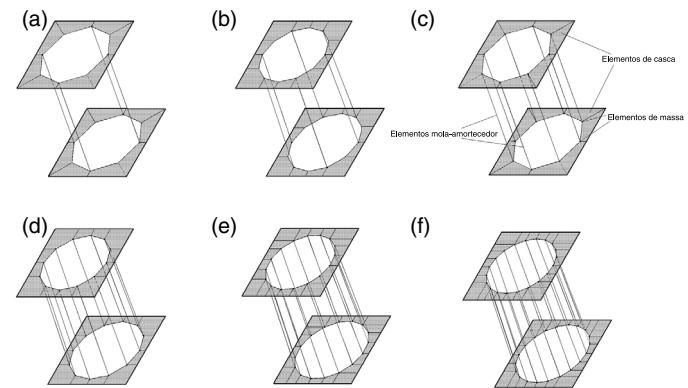
A figura 3 mostra as várias representações do rebite em elementos finitos com diferentes quantidades de elementos mola-amortecedor (4, 6, 8, 12, 16 e 20) por rebite.

**Tabela 1**  
Propriedades mecânicas do alumínio

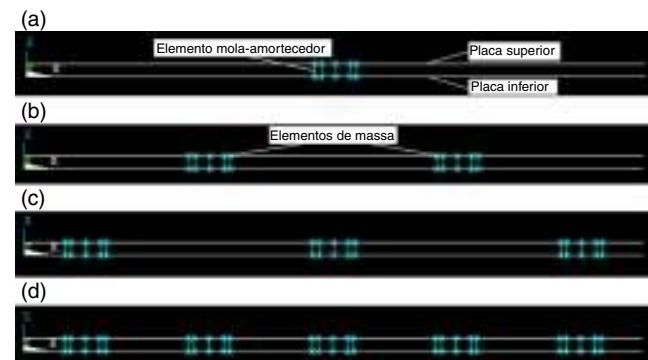
Propriedade	Símbolo	Unidades	Valor
Módulo de Young	$E_x$	[Pa]	$66.870 \times 10^9$
Módulo de Young	$E_y$	[Pa]	$71.030 \times 10^9$
Coeficiente de Poisson	$\nu_{xy}$	-	0,31
Densidade	$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	2.707

**Tabela 2**  
Propriedades atribuídas ao rebite modelado em elementos finitos

Propriedade	Símbolo	Unidades	Valor
Constante de rigidez por cada elemento mola-amortecedor	$k$	[N/m]	$5 \times 10^7$
Massa do rebite	$m$	[kg]	$2,5 \times 10^{-4}$



**Figura 3.** Representação do rebite em elementos finitos com: (a) 4, (b) 6, (c) 8, (d) 12, (e) 16 e (f) 20 elementos mola-amortecedor por rebite.



**Figura 4.** Modelo da junta rebitada em elementos finitos com: (a) um, (b) 2, (c) 3 e (d) 5 rebites.

A figura 4 mostra em corte transversal os vários modelos em elementos finitos de 2 placas interligadas por diferentes quantidades de rebites (um, 2, 4 e 5).

O processo de melhoramento de modelos de elementos finitos é usado de modo a encontrar o valor da constante de rigidez  $k$  dos elementos mola-amortecedor e, consequentemente, da junta rebitada numérica que melhor reproduz o modelo experimental. É esperado que esse valor possa variar de acordo com a quantidade de rebites e elementos mola-amortecedor por cada rebite. Para estudar esse efeito são construídos 24 modelos diferentes de juntas rebitadas em elementos finitos: 4 juntas rebitadas com diferentes quantidades de rebites (um, 2, 3 e 5), combinados com 6 diferentes quantidades de elementos mola-amortecedor (4, 6, 8, 12, 16 e 20) por cada rebite.).

## 7. Resultados e discussão

Os resultados obtidos são apresentados nesta seção. Primeiro apresenta-se nas tabelas 3 e 4 a comparação do comportamento dinâmico entre as duas placas físicas (PL1 e PL2, respectivamente) e o modelo em elementos finitos que as representa. A diferença

**Tabela 3**

Comparação entre o comportamento dinâmico da placa física PL1 e a respetiva representação em modelo de elementos finitos

Modo	Frequência natural da placa física [Hz]	Frequência natural da placa em elementos finitos [Hz]	Diferença [%]	MAC
1	436,41	434,88	0,35	1
2	859,07	850,24	1,03	1
3	1208,79	1207,15	0,14	1
4	1796,48	1788,13	0,46	1
5	2381,29	2376,29	0,21	1
6	2900,54	2895,54	0,17	1
7	3911,60	3920,37	0,22	1
8	4229,67	4246,45	0,40	1

**Tabela 4**

Comparação entre o comportamento dinâmico da placa física PL2 e a respetiva representação em modelo de elementos finitos

Modo	Frequência natural da placa física [Hz]	Frequência natural da placa em elementos finitos [Hz]	Diferença [%]	MAC
1	435,53	434,88	0,15	1
2	859,39	850,24	1,06	1
3	1208,82	1207,15	0,14	1
4	1796,47	1788,13	0,46	1
5	2382,32	2376,29	0,25	1
6	2900,87	2895,54	0,18	1
7	3912,71	3920,37	0,20	1
8	4230,79	4246,45	0,37	1

percentual média, obtida pela Eq. (20), entre as frequências naturais da placa PL1 e PL2 e o respetivo modelo de elementos finitos é de 0,37 e 0,35%, respetivamente. O valor 1 para o MAC revela que as formas naturais de vibração também estão bem correlacionadas. Podemos concluir que o modelo em elementos finitos representa com elevada aproximação as placas reais.

De modo a justificar a opção por desprezar o coeficiente de amortecimento nos modelos de elementos finitos, são apresentados na [tabela 5](#) os valores dos fatores de amortecimento  $\xi$  e os respetivos fatores de qualidade  $Q$  para cada modo de vibração do modelo de junta rebitada com 5 rebites.

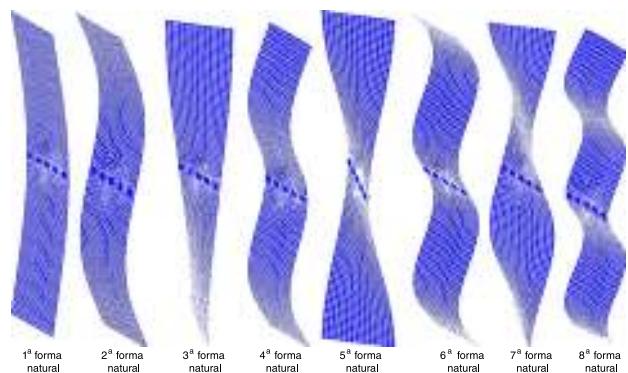
Os fatores de amortecimento  $\xi$  apresentados são muito pequenos ( $\xi < 0,1$ ) para todos os modos de vibração. Os fatores de qualidade  $Q$  são muito elevados e superiores a 0,5, o que demonstra que o sistema é do tipo subamortecido. Assim, o amortecimento pode ser desprezado nos modelos de elementos finitos.

A [figura 5](#) mostra uma representação das 8 primeiras formas naturais de vibração para o modelo de elementos finitos com junta rebitada composta por 5 rebites. A [figura 6](#) mostra a representação das 8 primeiras formas naturais de vibração obtidas experimentalmente em 12 pontos para o mesmo modelo.

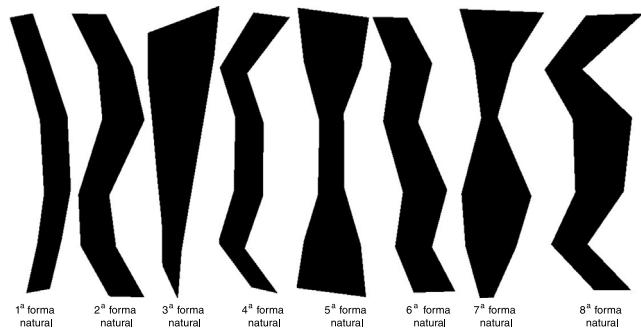
**Tabela 5**

Valores dos fatores de amortecimento  $\xi$  e dos respetivos fatores de qualidade  $Q$  para cada modo de vibração do modelo de junta rebitada com 5 rebites

Modo	Frequência natural da placa física [Hz]	Fator de amortecimento $\xi$	Fator de qualidade $Q$
1	112,75	0,0102	49
2	325,68	0,0015	333
3	449,07	0,0034	147
4	607,59	0,0022	227
5	849,17	0,0012	417
6	1058,59	0,0008	625
7	1390,99	0,0008	625
8	1512,36	0,0012	417



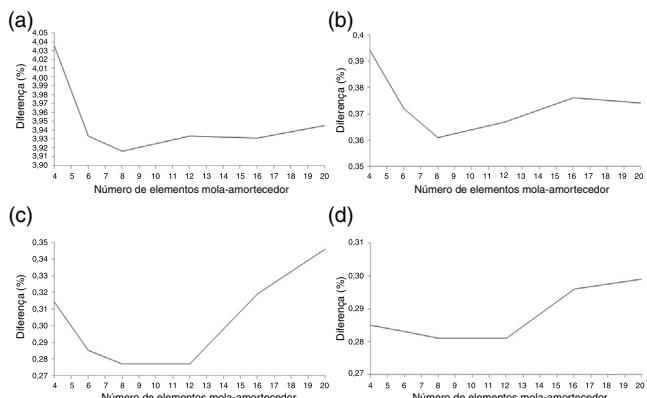
**Figura 5.** Representação das 8 primeiras formas naturais de vibração do modelo de elementos finitos com junta rebitada composta por 5 rebites.



**Figura 6.** Representação das 8 primeiras formas naturais de vibração do modelo experimental com junta rebitada composta por 5 rebites.

Como se pode observar por comparação entre as [figuras 5 e 6](#), existe boa correlação entre as formas naturais de vibração entre os 2 modelos. O mesmo acontece para os restantes modelos com um, 2 e 3 rebites.

O gráfico da [figura 7](#) mostra a relação entre a diferença percentual média, obtida por aplicação da Eq. (20), entre as frequências naturais dos modelos numéricos melhorados e dos respetivos modelos experimentais, em função da quantidade de elementos mola-amortecedor. As juntas construídas com 8 elementos mola-amortecedor por rebite permitem obter a melhor representação em elementos finitos relativamente aos respetivos modelos experimentais com um e 2 rebites como se pode observar nas [figura 7a](#) e b. A diferença percentual média usando 8 elementos mola-amortecedor é menor relativamente às outras quantidades.



**Figura 7.** Diferença percentual, após updating, entre o modelo de elementos finitos e o modelo experimental de junta rebitada com (a) 1 rebite, (b) 2 rebites, (c) 3 rebites e (d) 5 rebites.

**Tabela 6**

Evolução das frequências naturais e formas naturais de vibração (MAC) para o modelo o modelo de elementos finitos de junta rebitada com um rebite e 8 elementos mola-amortecedor

Modo	Frequência de referência [Hz]	Frequência numérica inicial [Hz]	Diferença antes do updating [%]	Frequência numérica final [Hz]	Diferença depois do updating [%]	MAC inicial	MAC final
1	101,90	104,44	2,49	102,31	0,41	1	1
2	325,37	322,34	0,93	322,32	0,94	1	1
3	444,19	389,43	12,33	380,11	14,43	1	1
4	564,80	572,16	1,30	564,12	0,12	1	1
5	856,42	852,69	0,44	852,64	0,44	1	1
6	1057,65	1039,53	1,71	1039,34	1,73	1	1
7	1363,77	1210,99	11,20	1182,92	13,26	1	1
8	1402,80	1420,80	1,28	1402,80	0,00	1	1

O mesmo acontece para os casos de juntas rebitadas com 3 e 5 rebites. No entanto, as modelações com 12 elementos mola-amortecedor para esses mesmos casos também apresentam a mesma diferença percentual média, como pode ser observado nas figura 7c e d. No entanto, a sua maior complexidade de modelação relativamente ao rebite com 8 elementos mola-amortecedor não justifica a sua implementação. Os gráficos mostram também que o aumento de rebites na junta reduz a diferença percentual média entre o modelo de elementos finitos e o modelo de referência.

As tabelas 6-9 mostram a evolução das frequências naturais dos modelos de elementos finitos e os valores MAC, antes (coluna 7) e após (coluna 8), o updating, para os modelos com um, 2, 3 e 5 rebites, respectivamente. Nessas tabelas também podem ser observadas as diferenças percentuais entre as 8 primeiras frequências naturais do

modelo de referência (coluna 2) e do modelo de elementos finitos, antes do updating (coluna 4) e depois do updating (coluna 6). Apenas são mostrados os resultados para os modelos com 8 elementos mola-amortecedor por cada rebite.

A diferença percentual média, obtida pela aplicação da Eq. (20), é de 3,92% para o modelo com um rebite (figura 7a), 0,36% para o modelo com 2 rebites (figura 7b), 0,28% para os modelos com 3 rebites (figura 7c) e 5 rebites (figura 7d). Confirma-se que essa diferença se reduz com o aumento do número de rebites na junta. Por outro lado, o valor de um para o MAC inicial e final revela que as formas naturais de vibração estão bem correlacionadas para todos os casos. Este fato indica que os valores ótimos obtidos para as constantes de rigidez  $k$  dos elementos mola-amortecedor, apresentados na tabela 10, são obtidos com elevada robustez.

**Tabela 7**

Evolução das frequências naturais e formas naturais de vibração (MAC) para o modelo de elementos finitos de junta rebitada com 2 rebites e 8 elementos mola-amortecedor

Modo	Frequência de referência [Hz]	Frequência numérica inicial [Hz]	Diferença antes do updating [%]	Frequência numérica final [Hz]	Diferença depois do updating [%]	MAC inicial	MAC final
1	109,32	105,13	3,83	109,39	0,07	1	1
2	324,85	324,17	0,21	324,34	0,16	1	1
3	443,03	434,18	2,00	435,86	1,62	1	1
4	592,64	574,49	3,06	592,62	0,00	1	1
5	849,38	851,99	0,31	853,01	0,43	1	1
6	1057,09	1054,82	0,21	1055,93	0,11	1	1
7	1369,06	1360,57	0,62	1366,09	0,22	1	1
8	1467,81	1427,00	2,78	1471,99	0,28	1	1

**Tabela 8**

Evolução das frequências naturais e formas naturais de vibração (MAC) para o modelo de elementos finitos de junta rebitada com 3 rebites e 8 elementos mola-amortecedor

Modo	Frequência de referência [Hz]	Frequência numérica inicial [Hz]	Diferença antes do updating [%]	Frequência numérica final [Hz]	Diferença depois do updating [%]	MAC inicial	MAC final
1	112,13	112,26	0,12	112,13	0,00	1	1
2	325,71	325,12	0,18	325,12	0,18	1	1
3	448,72	446,75	0,44	446,73	0,44	1	1
4	606,86	606,20	0,11	605,60	0,21	1	1
5	851,80	849,10	0,32	849,06	0,32	1	1
6	1058,86	1061,24	0,23	1061,23	0,22	1	1
7	1389,75	1400,94	0,81	1400,90	0,80	1	1
8	1508,88	1511,15	0,15	1509,50	0,04	1	1

**Tabela 9**

Evolução das frequências naturais e formas naturais de vibração (MAC) para o modelo de elementos finitos de junta rebitada com 5 rebites e 8 elementos mola-amortecedor

Modo	Frequência de referência [Hz]	Frequência numérica inicial [Hz]	Diferença antes do updating [%]	Frequência numérica final [Hz]	Diferença depois do updating [%]	MAC inicial	MAC final
1	112,75	112,78	0,03	112,75	0,00	1	1
2	325,68	325,13	0,17	325,12	0,17	1	1
3	449,07	446,76	0,51	446,72	0,52	1	1
4	607,59	607,85	0,04	607,67	0,01	1	1
5	849,17	846,98	0,26	846,92	0,26	1	1
6	1058,59	1061,31	0,26	1061,30	0,26	1	1
7	1390,99	1400,98	0,72	1400,88	0,71	1	1
8	1512,36	1517,62	0,35	1517,06	0,31	1	1

**Tabela 10**

Valores de constante de rigidez obtidos após *updating* dos modelos de elementos finitos para os 4 tipo de juntas rebitadas, em que o rebite é modelado com 8 elementos mola-amortecedor

Propriedade	Símbolo	Unidades	Valor			
			Um rebite	2 rebites	3 rebites	5 rebites
Constante de rigidez de cada elemento mola-amortecedor	$k$	[N/m]	$2,2 \times 10^7$	$2,6 \times 10^7$	$27,0 \times 10^7$	$40,5 \times 10^7$
Constante de rigidez de cada rebite			$17,3 \times 10^7$	$20,8 \times 10^7$	$215,6 \times 10^7$	$324,2 \times 10^7$
Constante de rigidez da junta				$41,5 \times 10^7$	$646,8 \times 10^7$	$1.621,0 \times 10^7$

## 8. Conclusões

Neste artigo, vários modelos de elementos finitos simplificados de juntas rebitadas são estudados e avaliados. A avaliação é efetuada com base na comparação entre as características modais desses modelos, após aplicado o processo de *updating*, e os respectivos modelos experimentais. Com base nos resultados obtidos conclui-se que as juntas rebitadas com 8 elementos mola-amortecedor por rebite apresentam a diferença média mais baixa entre o modelo numérico e o modelo experimental. Para as juntas com 3 e 5 rebites, o modelo com 12 elementos mola-amortecedor por rebite apresenta o mesmo comportamento que o modelo com 8 elementos mola-amortecedor por rebite. No entanto, a maior complexidade deste modelo não justifica a sua escolha.

Os resultados das avaliações permitem concluir que os modelos de elementos finitos simplificados propostos permitem representar os modelos de juntas rebitadas experimentais com elevada robustez. O modelo proposto, com 8 elementos mola-amortecedor por rebite, permite também boa eficiência computacional devido à simplicidade do tipo de elementos usados.

Com este estudo pretendemos contribuir com informação útil para os *designers* na modelação de juntas rebitadas para análise em elementos finitos de dinâmica de estruturas.

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao *Centre for Mechanical and Materials Technologies* (CT2 M) da Universidade do Minho.

## Referências

- [1] D.V.T.G. Pavan Kumar, S. Sathiya Naarayanan, S. Kalyana Sundaram, S. Chandra, Further numerical and experimental failure studies on single and multi-row riveted lap joints, Eng. Fail. Anal. 20 (2012) 9–24.
- [2] S. Sathiya Naarayanan, D.V.T.G. Pavan Kumar, S. Chandra, Implication of unequal rivet load distribution in the failures and damage tolerant design of metal and composite civil aircraft riveted lap joints, Eng. Fail. Anal. 16 (2009) 2255–2273.
- [3] W. Huang, T.-J. Huang, Y. Garbatov, C. Guedes Soares, Fatigue reliability assessment of riveted lap joint of aircraft structures, Int. J. Fatigue 43 (2012) 54–61.
- [4] M.R. Urban, Analysis of the fatigue life of riveted sheet metal helicopter airframe joints, Int. J. Fatigue 25 (2003) 1013–1026.
- [5] S. Xu, X. Deng, An evaluation of simplified finite element models for spot-welded joints, Finite Elem. Anal. Des. 40 (2004) 1175–1194.
- [6] M.I. Friswell, J.E. Mottershead, Finite element model updating in structural dynamics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [7] J.D. Collins, C.G. Hart, T.K. Hasselman, B. Kennedy, Statistical identification of structures, AIAA Journal 12 (1974) 185–190.
- [8] C.P. Fritzen, Identification of mass, damping and stiffness matrices of mechanical systems, J. Vib. Acoust. Stress. Reliab. Des. 108 (1986) 9–17.
- [9] E.M. Hernandez, D. Bernal, Iterative finite element model updating in the time domain, Mech. Syst. Signal Process. 34 (1–2) (2013) 39–46.
- [10] J. Meireles, Análise dinâmica de estruturas por modelos de elementos finitos identificados experimentalmente, in: Tese de Doutoramento em Engenharia Mecânica, Universidade do Minho, Guimarães, 2008.
- [11] M. Dourado, J. Meireles, A.M.A.C. Rocha, A global optimization approach applied to structural dynamic updating, Lect. Notes Comput. Sc. 8580 (2014) 195–210.
- [12] C. F. Beards, Structural Vibration: Analysis and Damping, Arnold, London, 1; 1996.
- [13] N.M.M. Maia, J.M.M. Silva, Theoretical and experimental modal analysis, Research Studies Press Ltd, Hertfordshire, 1997.
- [14] R.J. Allemand, L.D. Brown, A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis, in: Proc. 1st Int. Modal Analysis Conference & Exhibit, Florida, Holiday Inn (1982), p. 110–116.