

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

www.elsevier.es/rimni



Seleção de topologias ótimas de estruturas elásticas 2D com restrição de tensão – via Smooth Evolutionary Structural Optimization



V.S. Almeida^{a,*}, H.L. Simonetti^b e F. de Assis das Neves^b

^a Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil

^b Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Campus Morro do Cruzeiro, Bauxita, Ouro Preto - MG, Brasil

INFORMAÇÃO SOBRE O ARTIGO

Historial do artigo:

Recebido a 29 de junho de 2010

Aceite a 31 de maio de 2012

On-line a 13 de abril de 2014

Palavras-chave:

Otimização evolucionária topológica

Otimização evolucionária estrutural

Método SESO

Elemento finito triangular

R E S U M O

O artigo aborda a otimização topológica em problemas de elasticidade plana linear considerando a minimização do volume com restrição de tensão e empregando um índice de desempenho como monitoramento para o encontro da região de ótimo. Utiliza-se para este fim o método clássico da otimização evolucionária estrutural, ou Evolutionary Structural Optimization (ESO). Este procedimento de otimização baseia-se na retirada sistemática e gradativa dos elementos com menores tensões em comparação com a tensão máxima da estrutura. Procedimento este também conhecido como um processo «hard-kill». Propõe-se neste trabalho uma variante do método ESO, denominado de Smoothing ESO (SESO), cuja filosofia baseou-se na observação de que se o elemento não for realmente necessário à estrutura, naturalmente sua contribuição de rigidez vai diminuindo progressivamente, até que ele não tenha mais influência. Isto é, sua remoção é feita de forma suave, atenuando os valores da matriz constitutiva do elemento, como se este estivesse em processo de danificação. Define-se também o índice de desempenho para o monitoramento deste processo evolucionário suavizado. As aplicações do ESO e do SESO são feitas com o método dos elementos finitos, mas considerando um elemento finito triangular e de alta ordem. Por fim, implementou-se um filtro espacial em termos de controle de tensão, o qual associado à técnica SESO se mostrou ser bastante estável e eficiente na eliminação da formação do tabuleiro.

© 2010 CIMNE (Universitat Politècnica de Catalunya). Publicado por Elsevier España, S.L. Todos os direitos reservados.

Optimal topology selection for 2D structures with stress constraints via Smooth Evolutionary Structural Optimization

A B S T R A C T

Keywords:

Topological optimization

Evolutionary Structural Optimization

SESO Technique

Triangular Finite Element

This paper approaches the topology optimization problems in plane linear elasticity considering the minimization of the volume with restriction of the stress employing an index of performance for monitoring the meeting of the optimum region. It is used for this purpose the classical evolutionary structural optimization, or ESO - evolutionary structural optimization. This procedure is based on systematic and gradual removal of the elements with lower stress compared with the maximum stress of the structure. This procedure also known as a process “hard-kill”. It is proposed a variant of the ESO method, called SESO - Smoothing ESO, which is based on the philosophy that if an element is not really necessary for the structure, its contribution to the structural stiffness will gradually diminish until it has no longer influence in the structure, so its removal is performed smoothly. That is, their removal is done smoothly, reducing the values of the constitutive matrix of the element as if it were in the process of damage. A new performance index for the monitoring of this evolutionary process smoothed is proposed herein. The applications of ESO and SESO are made with the finite element method, but considering a high order triangular element based on the free formulation. Finally, it is implemented a spatial filter in terms of stress control, which was associated with SESO technique proved to be very stable and efficient in eliminating the formation of the checkerboard.

© 2010 CIMNE (Universitat Politècnica de Catalunya). Published by Elsevier España, S.L. All rights reserved.

* Autor para correspondência.

Correios eletrônicos: valerio.almeida@usp.br (V.S. Almeida), heliosimonetti@ig.com.br (H.L. Simonetti), fassis@em.ufop.br (F. de Assis das Neves).

1. Introdução

A otimização topológica (OT) é um campo de pesquisa da engenharia que tem o objetivo de projetar a topologia ótima de estruturas segundo determinado conjunto de critérios de projeto, podendo ser a procura do menor peso da estrutura, ou a restrição a um dado valor limite de tensão, deslocamento ou de frequência do projeto.

A OT é um tema recente no campo da otimização estrutural. Entretanto, os conceitos básicos que dão suporte teórico ao método foram estabelecidos há mais de um século, conforme descreve Rozvany et al. [1]. A grande vantagem da OT em comparação com os métodos tradicionais de otimização, como a otimização de forma ou a otimização paramétrica, é que esses métodos não são capazes de alterar o leiaute da estrutura original, sendo assim não auxiliam o projeto conceitual da estrutura. Desta forma, a aplicação da OT tem-se mostrado um caminho profícuo de pesquisas ligadas a projetos de interesse de indústrias, uma vez que facilita a moldagem de materiais sob certas condições de projeto.

Os métodos de OT buscam a solução ótima através da variação do domínio, isto é, topologia da estrutura e no que diz respeito a estruturas contínuas, são divididos em 2 grandes classes de abordagens, conforme Eschenauer e Olhoff [2]: a abordagem micro, ou baseada no material, e abordagem macro, ou baseada na geometria.

A abordagem micro trata da existência de uma micro estrutura porosa, que define as relações constitutivas do material em função da sua geometria e da densidade volumétrica de uma célula unitária representativa do material, que por sua vez é representada por variáveis contínuas, sucessivamente distribuídas, no espaço do domínio fixo estendido, que consiste numa região do espaço onde pode existir a estrutura, Stump [3]. Um exemplo para este grupo é o método Simple Isotropic Material with Penalization (SIMP), Bendsøe [4] e Rozvany et al. [5].

Na abordagem macro, a topologia da estrutura é modificada mediante a inserção de furos no domínio. Como exemplo deste grupo de OT pode-se citar o Evolutionary Structural Optimization (ESO) que é baseado no cálculo da função objetivo quando um elemento é removido da malha de elementos finitos; o Topological Sensitivity Analysis (TSA), baseado em uma função escalar, denominada derivada topológica, que fornece para cada ponto do domínio de definição do problema a sensibilidade da função custo quando um pequeno furo é criado, Labanowski et al. [6].

Além destes métodos, tem-se aplicado na resolução de problemas de OT as técnicas estocásticas, com destaque para o uso do algoritmo genético, Kane et al. [7], Kawamura et al. [8], Krishnamoorthy et al. [9], Lagaros et al. [10] e a técnica do simulated annealing, Kirkpatrick et al. [11]. Entretanto, a principal desvantagem destas técnicas aplicadas na OT é a busca da região ótima quando está associado à otimização de centenas ou até milhares de parâmetros, o que aumenta exponencialmente o tempo de processamento, muitas vezes inviabilizando sua aplicação.

Em seu método clássico, o ESO modifica a topologia de uma estrutura mediante a heurística de remoção gradual de elementos finitos da malha. Após esta remoção a estrutura evolui em direção a um ótimo ideal. O ESO tem-se destacado por ser um método de formulação simples de fácil entendimento.

Neste contexto, este artigo apresenta uma variante do método ESO, denominado de Smoothing ESO (SESO), por se tratar de uma técnica de suavização aplicada na forma de retirada dos elementos ineficientes da malha, uma vez que no ESO, ao retirar um grupo de elementos da malha pode-se eliminar elementos que estão no limite entre serem retirados ou não, podendo comprometer o processo evolutivo. Assim, para contornar este problema, foi proposta uma maneira mais suave de utilizar deste conceito, na qual além de remover os elementos finitos de regiões com baixa tensão, são devolvidos à estrutura uma porcentagem

desses elementos que numericamente estão próximos da restrição de tensão. Destarte, empregam-se elementos finitos triangulares de alta ordem, obtendo respostas de tensões com melhor precisão, além de permitir a geração de malhas não estruturadas e assim facilitando geometrias mais complexas. São apresentados alguns exemplos clássicos obtidos na literatura, que demonstram que o procedimento desenvolvido é robusto e genérico.

2. Otimização estrutural evolucionária

Dentre os métodos de OT que consideram malhas variáveis durante o processo estão os métodos de otimização estrutural evolucionária, conhecidos na literatura como ESO. A principal ideia destes métodos consiste na proposição de um critério eficiente, capaz de estimar a contribuição de cada elemento na resposta do sistema. Xie e Steven [12] desenvolveram uma maneira bem simples de impor modificações na topologia da estrutura, feita mediante heurística de remoção gradual e sistemática de elementos finitos da malha, correspondentes a regiões que não contribuem efetivamente para um bom desempenho desta.

Define-se inicialmente uma malha de elementos finitos que circunscreva todo o domínio de projeto, também chamado de domínio estendido, de forma a incluir as condições de contorno em forças e deslocamentos, cavidades e demais condições iniciais. Em um processo iterativo avaliam-se os parâmetros de interesse de otimização, neste artigo em especial é a minimização do volume mediante um critério de tensão máxima da estrutura. Assim, avaliam-se as tensões de cada elemento, conforme o uso da inequação:

$$\sigma_e^{vm} < RR \cdot \sigma_{max}^{vm} \quad (1a)$$

$$RR_{i+1} = RR_i + ER \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1b)$$

com σ_e^{vm} e σ_{max}^{vm} sendo, respectivamente, a tensão principal de Von Mises do elemento «e» e a máxima da estrutura na respectiva iteração, RR é um fator denominado de razão de rejeição e ER é uma razão evolucionária, isto é, um valor percentual constante que é adicionado a RR assim que o estado de equilíbrio é alcançado. Este parâmetro é definido na literatura como uma porcentagem que varia entre 0,1 a 2% devendo ser calibrada por meio dos experimentos numéricos, e controla o processo de evolução do algoritmo.

Em cada iteração, os elementos que satisfaçam a inequação (1a) são retirados do domínio, figura 1. O fator RR é aplicado para controlar o processo da remoção do domínio ($0,0 \leq RR \leq 1,0$). O mesmo ciclo de remoção dos elementos usados pela desigualdade (1a) é repetido até que não haja mais elementos que satisfaçam mais esta inequação (1a). Quando esta situação ocorre, um estado de equilíbrio é alcançado. O processo evolucionário é definido adicionando a RR uma razão evolucionária (ER), conforme equação (1b). Assim, um novo ciclo de evolução inicia-se, até que não existam mais elementos a serem eliminados e se obtenha uma configuração ótima, indicada pelo controle de um parâmetro de desempenho, denominado de índice de desempenho (ID). Este procedimento também

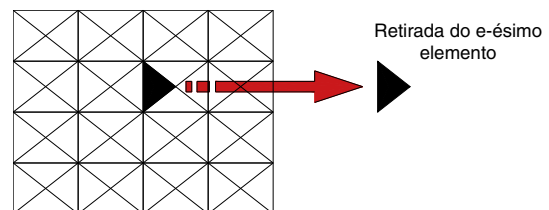


Figura 1. Ilustração da retirada de elemento da malha durante o processo evolucionário.

é conhecido como um método «hard-kill» e pode ser interpretado como segue:

$$D_i(j) = \begin{cases} D_0 & \text{se } j \in \Gamma_i \\ 0 & \text{se } j \in \bar{\Gamma}_i \end{cases} \quad (2)$$

onde $D_i(j)$ é a matriz constitutiva do elemento $j \in \Omega$ na i -ésima iteração e D_0 é a matriz constitutiva do elemento. Para um elemento de espessura t , material com módulo de elasticidade longitudinal E e coeficiente de Poisson ν , a matriz D_0 é dada por:

$$D_0 = \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

onde $\Omega = \Gamma_i \cup \bar{\Gamma}_i$ é conjunto formado por todos os elementos j pertencentes a $D_i(j)$ que serão removidos ou não do domínio. Assim, $\Gamma_i = \left\{ \Omega / \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_{VM}^{MAX}(\Omega)} \right) \geq RR_i \right\}$ é o conjunto dos elementos que não serão removidos do domínio (sólido), $\bar{\Gamma}_i = \Omega - \Gamma_i = \left\{ \Omega / \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_{VM}^{MAX}(\Omega)} \right) < RR_i \right\}$ é o conjunto dos elementos que serão removidos do domínio (vazio), todos na i -ésima iteração, [figura 1](#).

3. Suavização da otimização estrutural evolucionária

Pode-se aplicar sobre o método ESO uma condição de relaxação ou de suavização da forma de retirada de elementos do ESO, apresentando assim um procedimento («soft-kill»), de modo que o material, ou seja, os elementos que deveriam ser removidos pelo critério ESO – seguindo a inequação (1a) – são organizados em n grupos e alocados em ordem crescente de tensões sendo ponderados segundo uma função $0 \leq \eta(j) \leq 1$.

Assim, $p\%$ destes n grupos são removidos, os grupos que contêm os elementos com menores tensões (domínio Γ_{LS}) e os grupos (1- $p\%$) são devolvidos ao domínio Γ_{GS} . Esta remoção e devolução de elementos à estrutura pode ser feita por uma função, linear ou hiperbólica, que pondera a razão $\sigma_e^{VM} / \sigma_{VM}^{MAX}$ dentro do domínio $\bar{\Gamma}$. Isto é, permite que elementos que tenham suas tensões próximas e abaixo da tensão máxima, σ_{VM}^{MAX} , sejam reintegrados ao domínio a cada iteração, o que proporciona um melhor condicionamento do novo sistema de equações, e a diminuição da formação do «tabuleiro de xadrez» quando comparado ao ESO, isto porque estes elementos são importantes para a estrutura, não devendo ser eliminados ainda nesta iteração.

O procedimento «soft-kill» usado no SESO pode ser interpretado assim:

$$D_i(j) = \begin{cases} D_0 & \text{se } j \in \Gamma_i \\ D_0 \cdot \eta(\bar{\Gamma}) & \text{se } j \in \bar{\Gamma}_{GS_i} \\ 0 & \text{se } j \in \Gamma_{LS_i} \end{cases} \quad (3)$$

onde $\bar{\Gamma} = \Gamma_{LS_i} + \Gamma_{GS_i}$ é o domínio dos elementos que atendem a inequação (1a), Γ_{LS_i} é o domínio dos elementos que devem ser excluídos efetivamente, Γ_{GS_i} o domínio dos elementos que são devolvidos, $0 \leq \eta_j(\bar{\Gamma}) \leq 1$ é função reguladora que pondera o valor da razão $\sigma_e^{VM} / \sigma_{VM}^{MAX}$ dentro do domínio $\bar{\Gamma}$ e pode eliminar o problema do «tabuleiro de xadrez», tudo dentro da iteração «i». [A figura 2](#) ilustra o procedimento de suavização na forma de retirada dos elementos do domínio na iteração i .

A suavização proposta pode ser realizada através de $\eta(\bar{\Gamma})$ usando uma função linear do tipo $\eta(\bar{\Gamma}) = \alpha j + \beta$ ou uma função trigonométrica do tipo $\eta(\bar{\Gamma}) = \sin(\alpha j)$, pois estas funções são contínuas, portanto, diferenciáveis em todo o domínio $\bar{\Gamma}$ e tem imagem variando de 0-1.

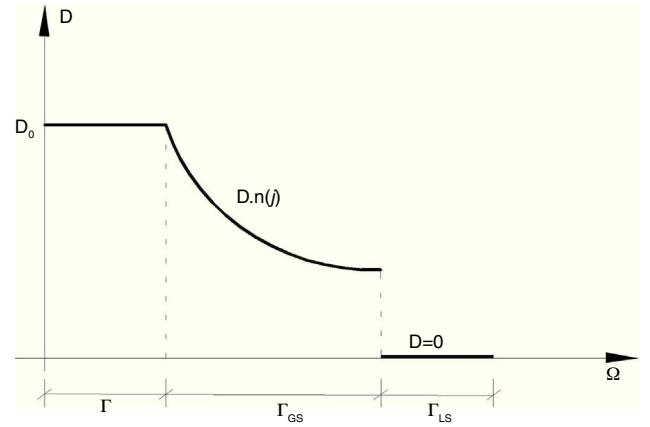


Figura 2. Ilustra o valor da matriz constitutiva de cada grupo do domínio, iteração «i».

4. Filtro espacial para o elemento finito triangular

Constata-se que quanto mais discretizado o domínio inicial do projeto melhor o contorno da topologia ótima, além de descrever melhor o campo de deslocamentos e consequentemente o campo das deformações e tensões. Entretanto, o aumento desta discretização no domínio inicial do projeto, em conjunto com o uso de elementos finitos triangulares e de baixa ordem provocam o aumento da formação do «tabuleiro de xadrez».

Para tentar diminuir a formação deste tabuleiro, empregou-se neste artigo um elemento finito não conforme de alta ordem, consistindo de um elemento de membrana triangular com graus de liberdade rotacionais desenvolvido mediante a formulação livre, descrito por Bergan e Felippa [13], mas que sua convergência é garantida por atender o «teste do elemento individual», proposto por Bergan e Hanssen [14].

Além disso, desenvolveu-se um filtro espacial de tensão que tem o objetivo de diminuir a formação do tabuleiro. Este filtro suaviza a distribuição espacial das variáveis de projeto ao longo do domínio inicial e minimiza, também, a dependência da malha de elementos finitos e permite o controle da complexidade da topologia.

O parâmetro de controle do filtro é o raio de abrangência e quanto maior for o raio maior será a suavização da distribuição das tensões de Von Mises do elemento central no interior do domínio inicial. Porém, não se deve usar um valor pequeno, pois, corre-se o risco de voltar ao problema da formação do «tabuleiro de xadrez», e não se deve usar um valor grande, uma vez que culmina numa quantidade muito grande de elementos para calcular as tensões intermediárias de Von Mises, já que esta é calculada observando a distância entre os centroides do elemento central e os vizinhos de nós e arestas, e os elementos cujos centroides estiverem dentro do círculo de raio r . Além disso, pode-se extrapolar o domínio de projeto e o algoritmo não consegue buscar a solução ótima, ver [figura 3](#).

O modo como a tensão do elemento i sofre influência das tensões dos elementos j dentro de uma circunferência de raio r é dada pela equação:

$$\sigma_i^{\text{ponderado}} = \frac{\sigma_i^{vm} \cdot A_i + \bar{w} \cdot \sum_j^{NE} \sigma_j^{vm} \cdot A_j}{A_i + \bar{w} \cdot \sum_j^{NE} A_j} \quad (4)$$

onde o termo $\sigma_i^{\text{ponderado}}$ é a tensão de Von Mises ponderado do elemento «i», que inicialmente apresenta tensão de Von Mises σ_i^{vm} ,

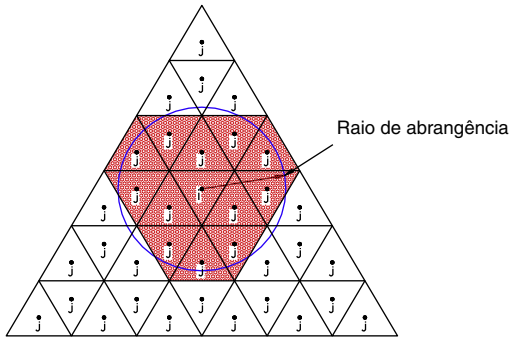


Figura 3. Elemento central «i» sofrendo influência dos elementos vizinhos dentro de um círculo de raio r .

A_i é a área deste elemento «i», A_j área do elemento «j» e σ_j^{vm} é a tensão de Von Mises do elemento «j». O peso $\bar{w}$ é dado pela equação:

$$\bar{w} = \frac{\sum_{j=1}^{NE} w_j}{NE} \quad (5)$$

onde:

$$w_j = \frac{R_{\max} - R_{ij}}{R_{\max}} \quad (6)$$

Nas equações (4) e (5), NE representa o número de elementos finitos cujos centroides estão no interior da circunferência de raio de abrangência $R_{\max}$. Na equação (6), R_{ij} é a distância entre os centroides dos elementos «i» e «j». Assim, mesmo que haja um refinamento da malha, mas o raio for mantido, a região delimitada pelo círculo será a mesma, agora com mais elementos triangulares que influenciam a tensão do elemento central. Isso justifica a redução da dependência da solução com relação ao nível de discretização da malha de EF. Adicionalmente, é possível diminuir também a instabilidade de tabuleiro.

Os filtros espaciais são uma restrição adicional à formulação do problema de otimização. Com o aumento do raio, os gradientes ficam restritos a valores menores, logo, a transição entre sólido (material) e vazio (sem material) torna-se mais suave, gerando mais elementos com tensões intermediárias. Percebe-se, fortemente, a sensibilidade da formulação do elemento finito utilizado à escolha do raio de abrangência, quando este assume um valor muito grande, pois os gradientes das variáveis de projeto podem ficar restritos a taxas de variações bem pequenas tais que o problema de otimização pode não ter solução para a condição inicial proposta.

5. Índice de desempenho para o Smooth Evolutionary Structural Optimization

O ID é um parâmetro adimensional desenvolvido para controlar a retirada evolucionária dos elementos no processo iterativo, de forma a monitorar a razão entre o volume inicial e da iteração atual, quantificando as mudanças no volume e nos níveis de tensão máxima do processo de otimização. Ele mede a eficiência da topologia em cada iteração identificando o instante em que a estrutura atinge seu ótimo topológico, Liang [15].

Ele é definido como sendo inversamente proporcional ao volume atual da estrutura e seu equacionamento parte da minimização do peso da estrutura e é dado por:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } w(\Omega) &= \sum_j^{NE} w_j \\ \text{sujeito a } \sigma_{j,\max}^{vm} - \sigma_{projeto} &\leq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Adota-se o peso ótimo de projeto na iteração inicial por:

$$w_0^s = \left(\frac{\sigma_{0,\max}^{vm}}{\sigma_{projeto}^{vm}} \right) \cdot w_0 \quad (8)$$

e na iteração i :

$$w_i^s = \left(\frac{\sigma_{i,\max}^{vm}}{\sigma_{projeto}^{vm}} \right) \cdot w_i \quad (9)$$

Define-se ID como a razão entre o peso do projeto inicial e o peso ótimo na iteração i , ou seja,

$$\begin{aligned} ID &= \frac{W_0^s}{W_i^s} = \left(\frac{\sigma_{0,\max}^{vm}}{\sigma_{i,\max}^{vm}} \right) \cdot \frac{W_0}{W_i} = \left(\frac{\sigma_{0,\max}^{vm}}{\sigma_{i,\max}^{vm}} \right) \cdot \frac{\rho_0 \cdot V_0}{\rho_i \cdot V_i} \\ &= \left(\frac{\sigma_{0,\max}^{vm}}{\sigma_{i,\max}^{vm}} \right) \cdot \frac{V_0}{V_i} \end{aligned} \quad (10)$$

sendo ρ_0 o peso específico inicial e ρ_i o peso específico na iteração i . O peso específico é considerado constante para o material, sendo assim $\rho_0 = \rho_i$, e o material é dito incompressível, portanto independe do estado de tensões que este sofra, e V_0 e V_i os volumes na primeira e i -ésima iteração. Pela expressão (10) minimizar o volume na i -ésima iteração equivale a minimizar o ID. Sabendo-se que para o estudo de problemas de estado plano de tensões a matriz constitutiva varia com a espessura de forma diretamente proporcional, a suavização empregada pela equação (3) pode ser aplicada à espessura, resultando em:

$$ID = \left(\frac{\sigma_{0,\max}^{VM}}{\sigma_{i,\max}^{VM}} \right) \cdot \frac{A_0 \cdot t}{\sum_{j=1}^{NE} A_j \cdot t_j} = \left(\frac{\sigma_{0,\max}^{VM}}{\sigma_{i,\max}^{VM}} \right) \cdot \frac{A_0 \cdot t_0}{\sum_{j=1}^{NE} A_j \cdot t_j \cdot \eta(j)} \quad (11)$$

de modo que o controle do ótimo é feito por esse ID.

6. Exemplos numéricos

Apresentam-se a seguir 3 exemplos numéricos, nos quais os parâmetros dos métodos empregados foram os mesmos, a saber: $0,1\% \leq RR \leq 1,25\%$, $0,1\% \leq ER \leq 2\%$. O volume retirado em cada iteração foi dividido em 10 grupos sendo (1-p) % igual a 80%, removido da estrutura, e p% igual a 20% ponderado com um fator $\eta(j) = 10^{-4}$ ou $\eta(j) = 10^{-2}$ e devolvido à estrutura devido a sua importância na resolução do sistema na iteração seguinte. Os coeficientes da formulação livre do elemento finito dados por alfa igual 1,5 e beta de 0,5. Empregou-se o ID como critério de parada.

6.1. Exemplo 1

Este exemplo, retirado de Kim et al. [16], trata da viga curta em balanço ilustrada na figura 4, com 1 mm de espessura, e cujo módulo de elasticidade longitudinal E é igual 210 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,3. Kim et al. [16] resolvem este exemplo aplicando o ESO e inserindo uma metodologia denominada Intelligent cavity creation (ICC), que é o controle da criação das cavidades ao longo do processo iterativo. O critério de parada é realizado em termos de controle de volume final e são utilizadas 2 densidades. No presente trabalho empregam-se 2 densidades de malhas de elementos finitos triangulares, indicadas na tabela 1.

Na figura 5 mostram-se as topologias obtidas por Kim et al. [16] e as figuras 6, 8 e 9 compararam estas com as obtidas com a presente formulação para o mesmo volume final. Destaca-se que Kim et al. [16] obtiveram valores apenas para os volumes indicados na tabela 1. Nota-se que as malhas otimizadas obtidas pelo SESO apresentam a formação de «tabuleiro de xadrez» com menos intensidade a que

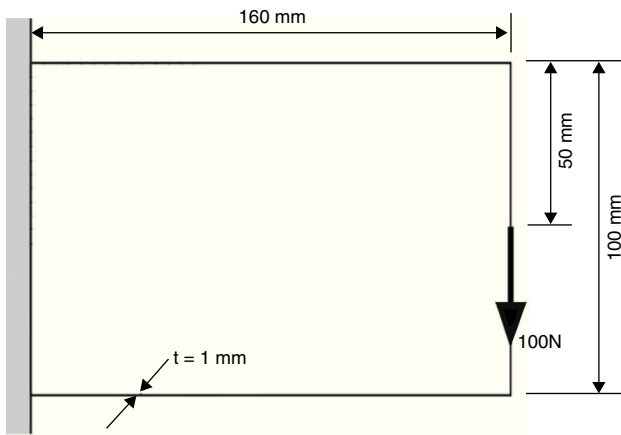


Figura 4. Domínio inicial de projeto de uma viga curta em balanço.

Tabela 1

Valores de volume final e tempo de processamento para as diversas análises

Quantidade de elementos	Método	Volume final (% V_0)	Tempo (min.)
5.120	ESO	43,5	1,4
5.120	SESO	42,7	2,2
11.520	SESO	44,0	12
2.560*	Kim et al. [16]	43,6	Não indicado
7.840*	Kim et al. [16]	37,2	Não indicado

* Elementos quadrados.

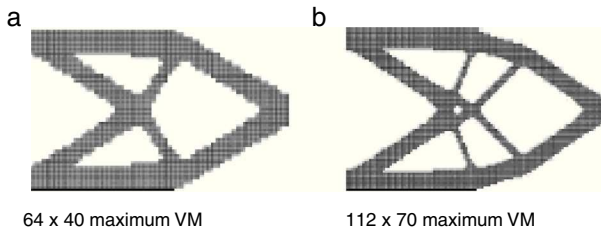


Figura 5. Configurações ótimas obtidas por Kim et al. [16] para: a) 2.560 elementos b) 7.840 elementos.

as obtidas pelo ESO, conforme figuras 8 e 9, mas ambas representam um bom indicativo de melhores soluções. No entanto, o ESO – por apresentar o problema na formação do tabuleiro – necessita de pequenas correções.

O gráfico da figura 7 indica o desempenho característico da estrutura otimizada, além de medir o sucesso desta otimização. Nota-se que a região acima da linha é uma região viável, mas a estrutura feita com este material será superdimensionada. A região abaixo da linha é uma região não viável, pois o material utilizado irá violar a restrição de tensão imposta no processo de otimização. Assim, o traço da linha é a região que atende as condições de ótimo proposta para a estrutura.

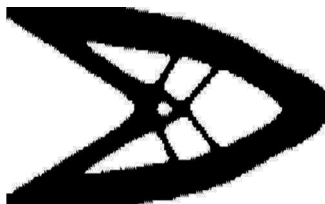


Figura 6. Configuração ótima obtida usando SESO para 11.520 elementos triangulares, $V = 0,44 V_0$.

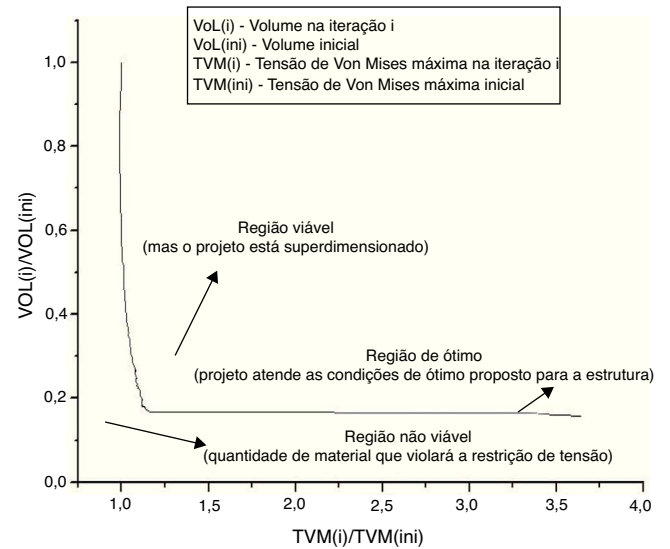


Figura 7. Curva do desempenho característico para a estrutura, malha de 11.520 elementos finitos.

Na figura 10 nota-se que o ID de ambas as formulações apresenta uma queda brusca nas iterações 120 e 155, respectivamente para o ESO e SESO. Estes pontos são os volumes mínimos obtidos de 15 e 18%, otimizados sem a estrutura se transformar em membros hipostáticos, ou seja, onde há esta queda brusca de ID, sabe-se que é a topologia otimizada alcançada no processo evolucionário.

6.2. Exemplo 2

O exemplo retirado de Liang et al. [17] é uma viga em balanço com geometria indicada na figura 11, com material de módulo E igual a 210 GPa, coeficiente de Poisson de 0,3 e espessura de 1 mm. Na figura 12a é apresentada a topologia ótima obtida por Liang et al. [18] com o uso de elementos finitos quadrangulares e nas figuras 12b e 12c apresentam-se as respostas obtidas com a presente formulação usando ESO e SESO com 7.200 elementos finitos triangulares e com tempo de processamento, respectivamente, 29 e 39 minutos.

Usando o método ESO, constata-se, durante o processo de otimização evolucionária deste exemplo, a formação acentuada do

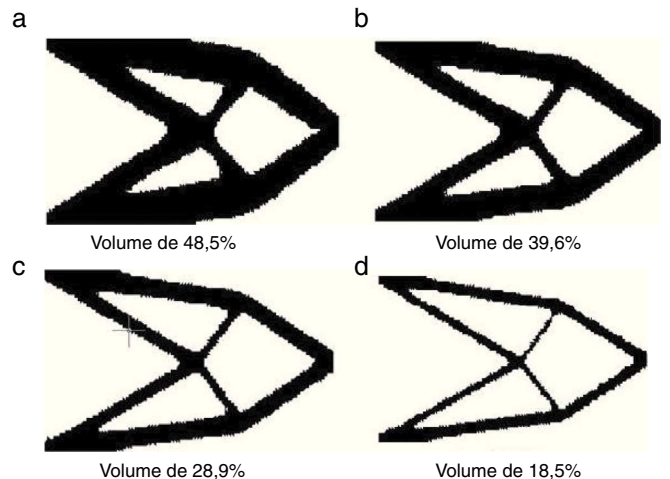


Figura 8. Diversas topologias ótimas obtidas para o SESO, impondo restrição de volume – 11.520 elementos.

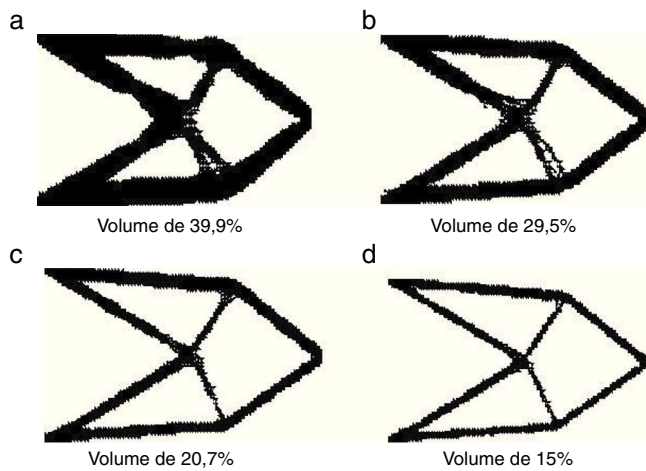


Figura 9. Diversas topologias ótimas obtidas para o ESO, impondo restrição de volume – 11.520 elementos.

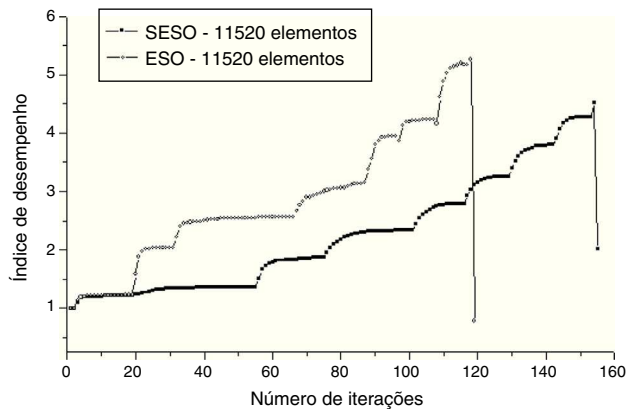


Figura 10. Gráfico do ID versus número de iteração, para o ESO ($V = 0,15 V_0$) e SESO ($V = 0,18 V_0$), com 11.520 elementos.

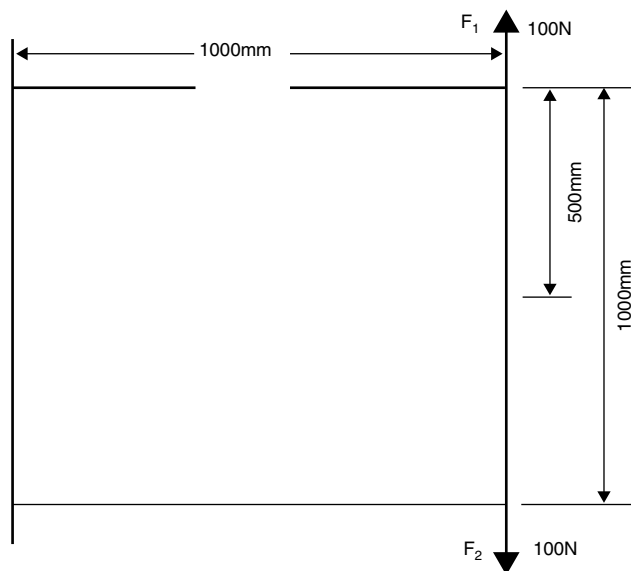


Figura 11. Esquema da viga em balanço, geometria e cargas.

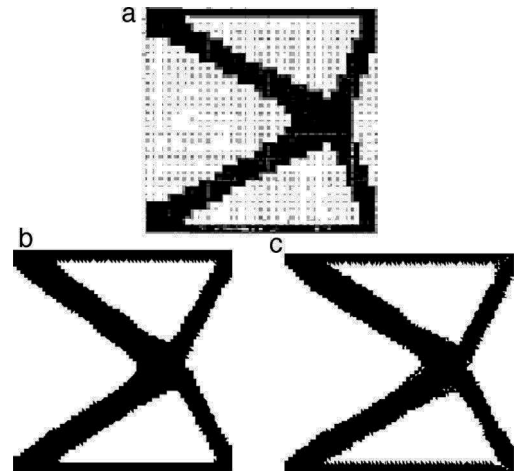


Figura 12. Topologias ótimas. (a) Liang et al. [18]; b) SESO – presente formulação c) ESO – presente formulação.



Figura 13. ESO – tabuleiro de xadrez.

tabuleiro de xadrez como pode ser observado na figura 13. É relevante destacar que este problema da OT não ocorreu para a técnica SESO.

Inicia-se o processo evolucionário com um RR e ER iguais a 0,1%. Destaca-se que o ID obtido neste artigo foi de 2,85 para o SESO, ver figura 14, atingido para uma razão de volume igual a 35%. A técnica SESO mesmo com uma metodologia diferente e com elementos finitos distintos mostrou uma grande concordância com o resultado apresentado por Liang et al. [18].

6.3. Exemplo 3

O exemplo a seguir é retirado de Lin e Hsu [19] e na figura 15 são apresentadas a geometria, condições de contorno e forças atuantes, além da topologia ótima obtida pelos autores com uma razão de volume igual 15,8%. Neste modelo, a otimização é realizada com um algoritmo adaptativo com restrição de volume (AVC), cuja obtenção da topologia da estrutura é capaz de satisfazer, simultaneamente, as restrições de tensão e deslocamento. O algoritmo é desenvolvido, usando o método de homogeneização, com minimização da flexibilidade média do material que compõe a estrutura ótima, isto é, «compliance» e volume fixo restringido.

As propriedades do material utilizado são coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$, módulo de Young $E = 210 \text{ GPa}$ e volume desejado igual a 15% do volume inicial; o volume retirado por iteração foi de 25%.

Na figura 16 observa-se a topologia ótima atingida pela presente formulação SESO, mostrando excelente concordância com a topologia apresentada por Lin e Hsu [19]. Na OT via SESO foram usados 7.680 elementos finitos triangulares de alta ordem e gasto um tempo de processamento de aproximadamente 12 minutos para alcançar o ótimo. A figura 17 mostra o processo evolucionário de

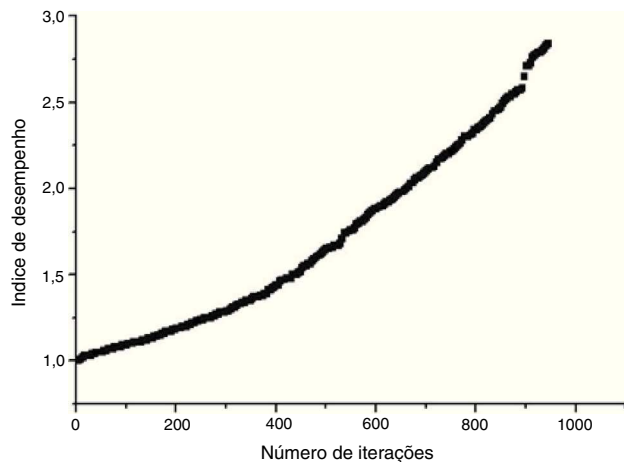


Figura 14. Gráfico de ID por número de iterações (SES0).

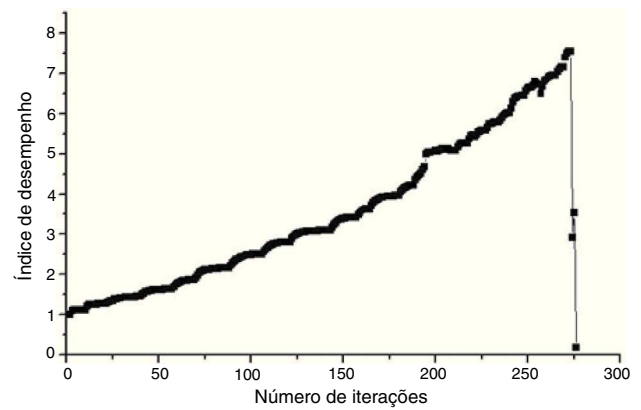


Figura 17. Gráfico do ID versus número de iteração, para o SES0 ($V=0,15 V_0$), com 7.680 elementos.

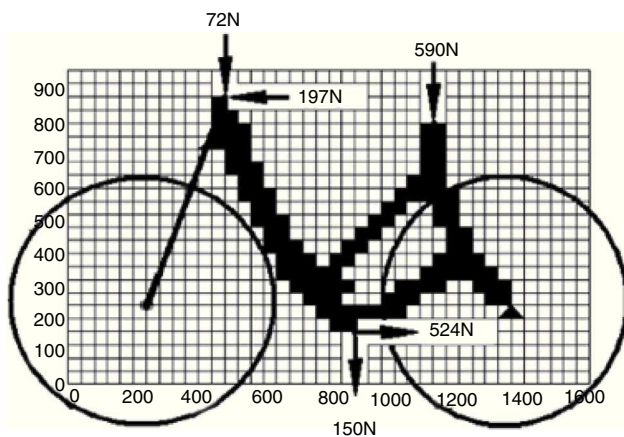


Figura 15. Domínio inicial de projeto e condições de contorno de uma bicicleta proposta por Lin e Hsu [19].

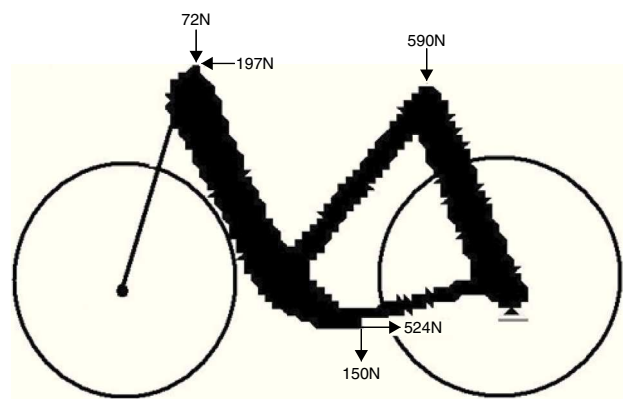


Figura 16. Topologia ótima obtida via SES0.

otimização da estrutura até a sua configuração ótima, destacando-se que o ID máximo obtido usando a técnica SES0 foi de 7,55 na iteração 273. Constatou-se que para um volume final de 10,26% o ID se torna menor que um, então a estrutura não é viável para projeto. Demonstrando que o ID tem a capacidade de monitorar com eficiência o desempenho da estrutura até o seu ótimo.

7. Conclusão

Neste trabalho são apresentados os resultados da aplicação de 2 algoritmos de OT para solução do problema de estado plano de tensões em regime elástico linear, de forma a se determinar o menor volume submetido a um campo de tensões máximas de Von Mises: o ESO e o SES0. Trata-se, portanto, de um problema de minimização de volume, por meio da mudança topológica, sob restrições de tensões.

Como todo algoritmo heurístico, de ordem 0, o ESO e SES0, não incorporam, no processo de busca, informações matemáticas sobre a função que se deseja maximizar ou minimizar, sendo dependente do ajuste de determinados parâmetros. Os parâmetros básicos principais do método que governam o algoritmo são: a RR e a ER. Na heurística de retirada de elementos, o ponto-chave é monitorar a velocidade de remoção por meio dos parâmetros RR e ER, de forma a controlar, principalmente, as singularidades e as instabilidades numéricas. Os valores típicos mais sugeridos na literatura são $RR=1\%$ e $ER=1\%$, mas alguns problemas necessitam de valores muito menores, até cerca de 0,1%.

Diante do exposto, conclui-se que o procedimento de suavização (SES0) proposto neste trabalho constitui-se numa contribuição importante pelo ótimo desempenho apresentado. Contudo, é importante ressaltar que a suavização proposta contribui de forma efetiva no processo de busca global do ótimo, com vistas a superar os principais problemas apresentados na OT. No entanto, em nível de busca local, as outras técnicas aplicadas de forma conjunta com a suavização e o filtro espacial de tensões são imprescindíveis para a efetividade total do algoritmo. Em outras palavras, a suavização proposta proporciona o melhor desempenho das outras técnicas aplicadas em conjunto.

Finalmente, nota-se que a formulação do ID para o caso do SES0 é capaz de medir com eficiência a topologia da estrutura, monitorando o critério de ótimo. Assim, à medida que o volume tende para um volume limite prescrito, o índice de desempenho, calculado em cada iteração, aumenta, capturando todas as informações de desempenho da estrutura. Deste modo, uma queda acentuada deste índice implica uma forte indicação de que se passou por uma configuração ótima estacionária.

Conflito de interesses

Os autores declaram não haver conflito de interesses.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Universidade Federal de Ouro Preto e à Universidade de São Paulo pelo financiamento para realização deste trabalho.

Bibliografia

- [1] G.I.N. Rozvany, M.P. Bendsøe, U. Kirsch, Layout optimization of structures, *Applied Mechanics Review*. 48 (1995) 41–119.
- [2] H.A. Eschenauer, N. Olhoff, Topology optimization of continuum structures, *Applied Mechanics Review* 54 (4) (2001) 331–390.
- [3] F.V. Stump, Otimização Topológica Aplicada ao Projeto de Estruturas Tradicionais e Estruturas com Gradação Funcional sujeitas a Restrição de Tensão, Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da USP, São Paulo (2006).
- [4] M.P. Bendsøe, Optimal shape design as a material distribution problem, *Structural Optimization* 1 (1989) 193–202.
- [5] G.I.N. Rozvany, M. Zhou, T. Birker, Generalized shape optimization without homogenization, *Structural Optimization* 4 (1992) 250–252.
- [6] Labanowski, A. Fancello, E.A. Novotny, A.A. SIMP, ESO e TSA: uma análise comparativa de métodos de otimização topológica para elasticidade 2d, CILAMCE 2004, Recife, 10/11/2004, 12/11/2004, Publicação: Proceedings of the XXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. CILAMCE 2004.
- [7] C. Kane, F. Jouve, M. Schoenauer, Structural optimization in linear and nonlinear elasticity using genetic algorithms, 21st ASME Design Automatic Conference, Boston, MA, 1995.
- [8] H. Kawamura, H. Ohmori, N. Kito, Truss topology optimization by a modified genetic algorithm, *Structure and multidisciplinary optimization* 23 (2002) 467–472.
- [9] C. Krishnamoorthy, P. Prasanna Venkatesh, R. Sudarshan, Object-Oriented Framework for Genetic Algorithms with Application to Space Truss Optimization, *J Comput Civ Eng* 16 (1) (2002) 66–75.
- [10] M. Lagaros, M. Papadrakakis, G. Kokossalaris, Structural optimization using evolutionary algorithms, *Computers and Structures* 80 (2002) 571–589.
- [11] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt Jr., M.P. Vecchi, Optimization by simulated annealing, *Science* 220 (4598) (1983) 671–680.
- [12] Y.M. Xie, G.P. Steven, A simple evolutionary procedure for structural optimization, *Computers & Structures* 49 (5) (1993) 885–896.
- [13] P.G. Bergan, C.A. Felippa, A triangular membrane element with rotational degrees of freedom, *Comp. Meths. in Appl. Mech. Eng.* 50 (1985) 25–69.
- [14] P.G. Bergan, L. Hanssen, A new approach for deriving “good” finite elements, MAFELAP II Conference, Brunel University 1975, in: J.R. Whiteman (Ed.), *The mathematics of finite elements and applications*, Academic Press, London, 1976, pp. 483–498, 1975.
- [15] Q.Q. Liang, Performance-based optimization of structures: Theory and applications, Spon Press, London, 2005.
- [16] Kim, Hyunsun, O.M. Querin, G.P. Steven, Y.M. Xie, Determination of an optimal topology with a predefined number of cavities, *AIAA JOURNAL* 40 (4) (2002) 739–744.
- [17] Q.Q. Liang, Y.M. Xie, G.P. Steven, On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization *Structural Optimization*, 18, Springer – Verlag, 1999, 67–13.
- [18] Q.Q. Liang, Y.M. Xie, G.P. Steven, Optimal selection of topologies for the minimum-weight design of continuum structures with stress constraints, *Proc Instn Mech Engrs Part C* 213 (1999) 755–762.
- [19] C.Y. Lin, F.M. Hsu, An efficient algorithm to obtain the optimal topology of industrial structural design problems, *Journal of the Chinese institute of Engineers* 31 (1) (2008) 17–30.