

# Interpolación inversa de características de respuesta transitoria temporal a parámetros de la función de transferencia típica de segundo orden

Javier Joglar Alcubilla \*

*Departamento de Aviónica, Instituto Barajas, Avda. América 119, 28042 Madrid, España.*

## Resumen

A efectos de obtener una metodología de traslado de especificaciones temporales al dominio de la frecuencia, que minimiza el sobrediseño y la iteración manual en el proceso de búsqueda de un controlador en frecuencia, se propone utilizar aproximaciones sucesivas de forma automática, aplicando algún método de interpolación inversa. En este sentido, se recomiendan técnicas específicas para traslado de especificaciones, para cada tipo de requerimiento, basadas en el “método de Newton por diferencias ascendentes y descendentes de 5º orden”, debido a sus ventajas prácticas frente a otros procedimientos de interpolación. Para ello, se usarán como funciones de interpolación las descriptivas de la señal escalón o de la señal impulso, aproximadas por un modelo de segundo orden con amortiguamiento subcrítico.

**Palabras Clave:** traslado de especificaciones, dominio de la frecuencia, interpolación inversa, teoría de realimentación cuantitativa, seguimiento, sensibilidad.

## 1. Introducción

En las técnicas de diseño de controladores que trabajan en el dominio de la frecuencia, como en QFT (Horowitz y Sidi, 1972), las especificaciones de diseño representan los requisitos de cumplimiento asociados a la dinámica del sistema a controlar en lazo cerrado. Estas especificaciones o requerimientos suelen expresarse en el dominio del tiempo usando características de respuesta transitoria temporal (Houpis y Rasmussen, 1999), como son:

- El tiempo de subida “ $t_r$ ” o “ $t_{tr}$ ”, el sobreimpulso máximo “ $M_p$ ”, el tiempo de pico máximo “ $t_{MP}$ ”, tiempo de asentamiento “ $t_s$ ” o “ $t_{ss}$ ” y tamaño del canal de asentamiento o tolerancia máxima admisible “ $desv$ ”, propias de la respuesta de un sistema de control en lazo cerrado a un cambio escalón en la entrada.
- El valor de pico máximo “ $f_{max}$ ”, los tiempos de picos “ $t_p$ ”, el tiempo de asentamiento “ $t_s$ ” o “ $t_{ss}$ ” y canal de asentamiento “ $desv$ ”, asociadas a la respuesta de un sistema de control en lazo cerrado para rechazo a perturbaciones.

Las respuestas a los cambios indicados, escalón unitario o perturbación representada por impulso unitario, se pueden aproximar bien por las respuestas de sistemas de segundo orden subamortiguados escalón o impulso, respectivamente, que están descritas formalmente en función de los parámetros coeficiente de amortiguación “ $\zeta$ ” y frecuencia natural “ $\omega_n$ ” (Ogata, 1993).

Si se parte de especificaciones en el dominio tiempo y la etapa de diseño de la metodología de control utilizada se efectúa en

frecuencia, los requerimientos iniciales impuestos deben ser transformados al dominio de la frecuencia. Se trata de buscar funciones de transferencia en el dominio de la frecuencia que satisfagan los límites de la envolvente, superior y/o inferior, generada por la especificación temporal. Las metodologías tradicionales, como la descrita en (Franchek y Herman, 1998), la técnica en (Krishnan y Cruickshanks, 1977) o el procedimiento basado en modelos utilizado en (D’Azzo y Houpis, 1995), plantean en general comenzar con funciones de transferencia de segundo orden, con diferentes parámetros de frecuencias  $\omega_n$  y coeficientes  $\zeta$ ; añadiendo polos y ceros a la función, se consigue ir aproximando lo más que se pueda a la especificación temporal original. Pero, en cualquier caso, todos los procedimientos están basados en iteración manual de prueba-error, que concluye cuando el diseñador decide que la función obtenida es suficientemente adecuada.

Cuando se habla de traslado de especificaciones del dominio temporal al dominio de la frecuencia, en realidad no se pretende traducir características de la respuesta transitoria ( $t_r$ ,  $t_s$ ,  $M_p$ , ...) en especificaciones sobre la respuesta en frecuencia (margen de ganancia y de fase, ancho de banda, círculos M, ...). Se está utilizando la nomenclatura, ampliamente usada por autores, como en (Yaniv, 1999) o en (Houpis y Rasmussen, 1999), para referenciar la etapa de control que trata de la determinación de alguna función de transferencia en el dominio de la frecuencia, que proporciona una respuesta equivalente a la dada por los requerimientos temporales impuestos.

Existen otras formas de simplificar la técnica de traslado de especificaciones:

- Usar hipótesis clásicas de aproximación de los tiempos de asentamiento; aunque sólo válidas para seguimiento de

\* Autor en correspondencia.

Correo electrónico: [j.jogl ar@duca.madr i d. or g](mailto:j.jogl ar@duca.madr i d. or g) (Javier Joglar Alcubilla),  
URL: [www. avi oni caj ogl ar . bl ogspot . com](http://www. avi oni caj ogl ar . bl ogspot . com) (Javier Joglar Alcubilla)

entradas escalón y canales de asentamiento del 2% o el 5% del valor estacionario de salida.

- Gráficamente, mediante ábacos (Ogata, 1993).

Un método más preciso, que minimiza la iteración manual y los problemas de sobrediseño a que da lugar ésta (Gil-Martínez, 2008), consiste en utilizar aproximaciones sucesivas para la obtención de las características de respuesta temporal requeridas, asociadas a unos parámetros concretos de  $\zeta$  y  $\omega_n$ . Esto es posible ya que, si se observa la descripción formal de las respuestas tipo escalón o impulso aproximadas a un sistema de segundo orden, vemos que son ecuaciones doblemente trascendentes en la característica temporal buscada (asentamiento o subida), respecto de  $\zeta$  y  $\omega_n$  (Aleixandre et al., 1989). En (Joglar-Alcubilla, 2016) se presenta un método concreto, para traslado de especificaciones temporales de seguimiento para obtener el límite en frecuencia inferior, descrito en forma de funciones de transferencia de respuesta subamortiguada de segundo orden. Este método, específico para requerimientos de seguimiento, utiliza las técnicas de interpolación inversa que se describen en este artículo para respuestas tipo escalón.

En definitiva, el objetivo de este trabajo es encontrar técnicas que proporcionen funciones de transferencia de segundo grado en el dominio de la frecuencia, cuyas respuestas sean equivalentes a las proporcionadas por las especificaciones impuestas en el dominio temporal. Su aplicación en la etapa de diseño de controladores en frecuencia debe asegurar un sobrediseño reducido y una iteración mínima en el proceso de búsqueda del controlador, a efectos de cumplimiento de dichas especificaciones temporales y de las trasladadas en frecuencia.

## 2. Traslado de especificaciones temporales al dominio de la frecuencia

La importancia de contar con una metodología de traslado en frecuencia de especificaciones temporales precisa, automática y específica resulta patente, sobre todo en la etapa final de análisis de las respuestas del sistema en técnicas de control, donde el diseño del controlador se realiza en el dominio de la frecuencia. Con una transferencia de especificaciones temporales al dominio de la frecuencia precisa, se incrementa la probabilidad de que el cumplimiento de especificaciones en frecuencia signifique también el cumplimiento de las mismas en el tiempo. Así, el grado de iteración manual necesaria se puede reducir, simplemente llevando a cabo un traslado de especificaciones adecuado.

La utilización de aproximaciones sucesivas hacia el parámetro temporal buscado, aplicando algún método de interpolación inversa (Joglar-Alcubilla, 2015), específica para cada tipo de requerimiento, va a proporcionar una herramienta de reducción de la iteración manual en el proceso de diseño.

Las técnicas específicas para traslado de especificaciones planteadas van a estar basadas en el “método de Newton por diferencias ascendentes y descendentes de 5º orden”. Se ha elegido este método frente a otros tradicionales para interpolación, como puede ser la polinómica de Lagrange, debido a sus ventajas prácticas (Iyengar, 2008):

- Requiere menos operaciones aritméticas.
- No es necesario reiniciar la computación si se desea añadir o quitar un punto del conjunto que se usa para construir el polinomio final.

En este sentido, lo primero que hay que considerar es el tipo de función y, en segundo lugar, la característica de respuesta temporal a interpolar. La función está relacionada directamente con el tipo de especificación a tratar.

- Están las especificaciones basadas en respuestas para seguimiento de entradas escalón, como es el caso habitual de los límites de seguimiento siguientes:
  - *Seguimiento Límite Superior*. Una referencia de entrada de valor máximo “ $r_{max}$ ” va a ser seguida por una salida que no debe sobrepasar la amplitud “ $y_{max}$ ”. Un ejemplo aplicación de esta especificación se utiliza en el problema de QFT desarrollado en (Kobylarz et al., 1992). Ver ejemplo y parámetros asociados en la Figura 1, obtenidos con la aplicación STEPTRAC.M, cuyo acceso se indica en la sección 5. Observar que el límite en frecuencia superior para seguimiento sólo exige un sobreimpulso máximo, imponiendo tiempos de respuesta mínimos.
  - *Seguimiento Límite Inferior*. Una señal de salida va a seguir a una entrada escalón de forma subamortiguada, no excediendo unos valores concretos máximos de sobreimpulso, tiempo de subida, tiempo de asentamiento y canal de asentamiento. Un ejemplo aplicación de esta especificación en QFT se tiene en (Nataraj, 2002). Ver ejemplo en la Figura 3, desarrollado en la sección 3.3 con la metodología propuesta para este caso en (Joglar-Alcubilla, 2015). Observar que el límite en frecuencia inferior para seguimiento viene impuesto siempre por características de respuesta temporal máximas (tiempos superiores y sobreimpulso máximo).

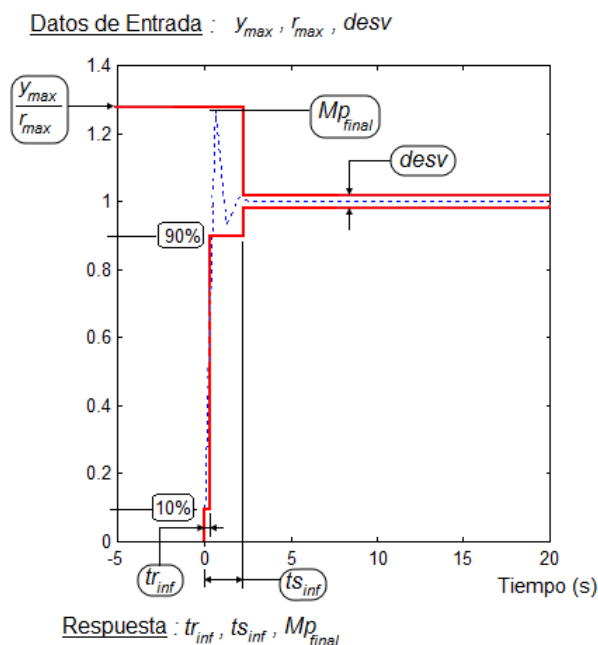


Figura 1: Ejemplo de especificación de seguimiento límite superior en frecuencia. Tiempos mínimos y sobreimpulso máximo. Resultados obtenidos con STEPTRAC.M normalizados a la unidad.

- También están las especificaciones asociadas a respuestas tipo impulso subamortiguado, inducido por una perturbación de entrada, como por ejemplo,
  - *Sensibilidad genérica*. Una perturbación de amplitud “ $In$ ” en un sistema de regulación produce una respuesta de

salida tipo impulso, que no debe sobrepasar una amplitud máxima concreta (“Out”), asentándose en un determinado canal de asentamiento impuesto, después de un tiempo  $T$  específico máximo. En (Franchek et al., 1997) se tiene un ejemplo aplicación de rechazo de perturbaciones genéricas. Ver ejemplo en la Figura 2, desarrollado con la metodología propuesta para este caso en (Joglar-Alcubilla, 2015).

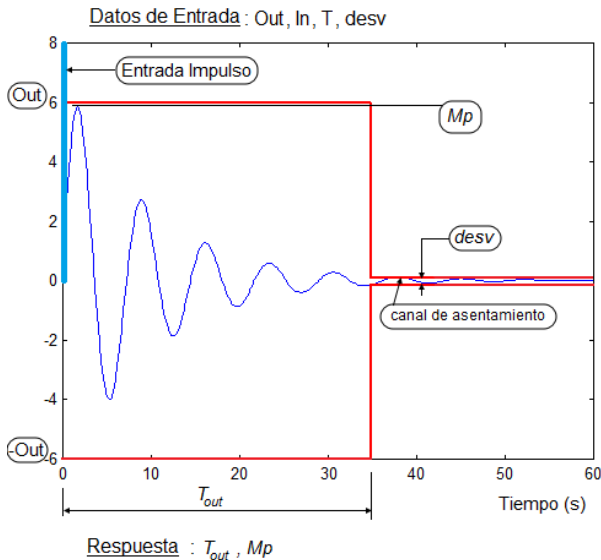


Figura 2: Ejemplo de especificación de sensibilidad genérica. Límite superior en frecuencia. Resultados obtenidos con ESEN.M

- **Sensibilidad específica.** En ocasiones, en el rechazo de perturbaciones no se exige exclusivamente estar por debajo de un valor máximo, sino que se permite durante un determinado tiempo una respuesta comprendida en un intervalo de amplitudes. Así, en la sensibilidad específica, una perturbación de entrada genera una salida tipo impulso cuya amplitud estará comprendida entre dos valores concretos “[ $\pm Out$ ,  $\pm Out_{max}$ ]”, pero durante un tiempo límite  $T$  determinado, tras el cual se asienta dentro de un canal de amplitud  $\pm Out$ . Ver ejemplo en la Figura 7, desarrollado en la sección 4.2. Como puede verse en las Figuras 2 y 7 de los ejemplos propuestos, tanto en sensibilidad genérica como en sensibilidad específica, se utiliza un canal de asentamiento de la respuesta. La diferencia entre ambas es que el tiempo permitido para el desarrollo del impulso respuesta fuera de este canal de asentamiento, se mide desde 0 a  $t_s$  para sensibilidad genérica y, desde  $t_r$  a  $t_s$  para sensibilidad específica;  $t_r$  es el tiempo de subida hasta alcanzar por primera vez los límites del canal de asentamiento y superarlos;  $t_s$  es el tiempo de asentamiento dentro del canal especificado. Por ejemplo, en el problema RCAM de (Garteur, 1997), un fallo de motor en la aeronave (perturbación) produce una desviación lateral máxima de 100m (“ $Out_{max}$ ”), que debe reducirse a menos de 20m (“ $Out$ ”) en 40s (“ $T$ ”).

El objetivo principal de este trabajo es asociar a cada especificación temporal de las indicadas una función de transferencia, representativa de un sistema de segundo orden subamortiguado de parámetros  $\zeta$  y  $\omega_n$ , como aproximación en el dominio de la frecuencia. ¿Por qué utilizar una aproximación de

segundo orden y no de cualquier otro orden? Mediante este tipo de aproximación el proceso puede ser automático. En (Joglar-Alcubilla, 2016) se desarrolla también una aproximación a la envolvente de límites inferior y superior para especificaciones de seguimiento, basada en sistemas de orden superior, pero que requiere un procedimiento de implementación manual; se compara con el método de segundo orden automático, concluyendo que no son mejores los resultados obtenidos en el sistema de orden superior.

En la aproximación de segundo orden, la forma de relacionar las características de respuesta de la especificación (dominio temporal) con los parámetros  $\zeta$  y  $\omega_n$  equivalentes (dominio de la frecuencia) es a través de la función que describe formalmente la respuesta temporal generada por la especificación. Es decir, mediante la función descriptiva de la señal escalón unitario o de la señal impulso unitario. Así, se usará como función dependiente del tiempo alguna de las siguientes:

$$f_{step}(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \arccos \zeta) \quad (1)$$

$$f_{pulse}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \quad (2)$$

Observar cómo en las funciones (1) y (2) está implícita la relación temporal con el dominio de la frecuencia, a través de los parámetros  $\zeta$  y  $\omega_n$ . Por tanto, se pueden usar como funciones de interpolación de tiempos ( $t_r$  y/o  $t_s$ ) para diferentes valores de  $\zeta$  y  $\omega_n$ . En la práctica, las características de respuesta a interpolar para cada una de las funciones indicadas serán,

- El tiempo de subida y el tiempo de asentamiento sobre la función escalón (1), cuando se trabaja con especificaciones de seguimiento de límite superior o inferior.
- El tiempo de subida y/o el tiempo de asentamiento sobre la función impulso (2), cuando se trabaja con especificaciones de sensibilidad genéricas o específicas.

Por otro lado, puede aducirse que en herramientas como Matlab existen funciones potentes que permiten resolver ecuaciones trascendentes como las propuestas. Por ejemplo, con “solve” y “fsolve” realmente es así. En particular “solve” busca soluciones analíticas (exactas), mientras que “fsolve” resuelve ecuaciones no lineales mediante el método de Gauss-Newton de mínimos cuadrados, utilizando una aproximación mezcla de funciones potenciales cuadrática y cúbica. Sin embargo, en este último caso, no se trata de un procedimiento de interpolación, sino de un método alternativo de ajuste paramétrico no lineal (Mateos-Aparicio, 2010); es decir, “fsolve” permite resolver ecuaciones trascendentes como las propuestas, pero al utilizar un método de ajuste, aproxima a los datos de la función, no a la propia función, como se hace con los métodos de interpolación; también, la aproximación es en un único sentido, mientras la técnica de diferencias que vamos a usar aquí, decide en cada punto si interesa más el caso progresivo (ascendente) o el regresivo (descendente), optimizando así el acercamiento a cada punto y, obteniendo una función final con un error mínimo respecto de la inicial buscada. Además, resulta importante resaltar que en el método propuesto de diferencias se va a seleccionar un intervalo de interpolación específico para cada ecuación a tratar, en cada situación particular, mientras que “solve” y “fsolve” utilizan criterios genéricos aplicables a cualquier función. Esto

hace que estas funciones no sean capaces de encontrar los tiempos buscados en algunas situaciones, en particular el de asentamiento, sobre la función escalón/impulso considerada; concretamente, para  $t_s$  es necesario buscar por intervalos (entre pico-valle o pico-pico) y, “solve/fsolve” trabajan con toda la función directamente. Por otro lado, “solve” proporciona soluciones en el plano complejo (al requerir una solución exacta), que en el caso de las funciones escalón/impulso no interesan; en la búsqueda de características de respuesta temporal por interpolación sólo son válidas las soluciones positivas reales que, ‘solve’ no da en muchos casos.

En conclusión, se van a desarrollar de manera específica técnicas independientes para interpolación de características de respuesta temporal sobre la función escalón y sobre la función impulso, adaptadas y optimizadas al tipo de especificación que se pretende trasladar. Además, se realizará una comparativa de resultados entre las técnicas de interpolación presentadas y la resolución de los mismos problemas ejemplo con funciones ‘solve’ y ‘fsolve’.

### 3. Técnica de interpolación inversa sobre la función escalón

Se va a utilizar una técnica de interpolación inversa sobre la función escalón (1), para el traslado de especificaciones de seguimiento al dominio de la frecuencia, tanto para el límite superior, como el inferior. Se trata de encontrar el conjunto de posibles pares  $(\omega_n, \zeta)$  asociados a las funciones de segundo orden subamortiguadas que cumplen con todos los requerimientos temporales para seguimiento exigidos.

La técnica descrita en esta sección es un esquema de la técnica de interpolación inversa sobre la función escalón, que se puede encontrar desarrollada con más detalle en (Joglar-Alcubilla, 2015) y (Joglar-Alcubilla, 2016).

Se utiliza un proceso de iteración automática, dentro del rango de amortiguamiento subcrítico y limitado por el sobreimpulso máximo impuesto (es decir,  $1 > \zeta > \zeta_{min}$ , con  $\zeta_{min}$  correspondiente a  $Mp$ ), de manera que por cada coeficiente de amortiguación se busca:

1. Por un lado, el tiempo de subida  $t_r$  especificado, asociado al par  $(\omega_n, \zeta)$ . Para ello, usar la relación siguiente, demostrada en (Joglar-Alcubilla, 2016):

$$\frac{tr_1}{t_r} = \omega_n \quad (3)$$

Es decir, dada la especificación temporal inicial  $t_r$  y, calculado mediante interpolación  $tr_1$  asociado al par  $(\omega_n = 1, \zeta)$ , se obtiene de (3) el valor  $\omega_n$ , relacionado con  $t_r$  para el coeficiente  $\zeta$ .

2. Por otro lado, se busca también el tiempo de asentamiento  $t_s$  requerido, a partir del cual la respuesta se adapta a un determinado canal de asentamiento y, al que le corresponde otro par  $(\omega_{ns}, \zeta)$ . Para ello, utilizar la relación a continuación obtenida en (Joglar-Alcubilla, 2016):

$$\frac{ts_1}{t_s} = \omega_{ns} \quad (4)$$

Esto es, con la especificación temporal  $t_s$ , se calcula por interpolación  $ts_1$  asociado al par  $(\omega_n = 1, \zeta)$ , y se puede conseguir despejando en (4) el parámetro  $\omega_{ns}$ , relacionado con  $t_s$  para el coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$ .

3. Escoger como posible par válido  $(\omega_n, \zeta)$  aquel que represente la condición más restrictiva para la imposición temporal conjunta  $(t_r, t_s)$ : para la especificación del límite inferior en frecuencia,  $\omega_n$  será el valor mayor de entre  $\omega_{nr}$  y  $\omega_{ns}$ ; para la especificación del límite superior en frecuencia,  $\omega_n$  será el valor menor entre ambos.
4. Determinar los tiempos  $tr_{final}$  y  $ts_{final}$  asociados a cada posible par  $(\omega_n, \zeta)$  encontrado, utilizando de nuevo sobre (1) interpolación inversa; si ambos  $tr_{final}$  y  $ts_{final}$  cumplen con los requerimientos iniciales dados para  $t_r$  y  $t_s$ , el par  $(\omega_n, \zeta)$  asociado servirá para generar una función de transferencia de segundo orden, posible solución en frecuencia.

Observar que, en cualquier caso de interpolación, la frecuencia natural es un parámetro dado: inicialmente  $\omega_n = 1$  o  $\omega_n$  encontrada posteriormente para verificar la posible validez del par  $(\omega_n, \zeta)$ .

Se detalla en (Joglar-Alcubilla, 2016) la obtención de las ecuaciones (3) y (4), y el sentido de los pasos esquematizados anteriormente, cuando se pretende trasladar especificaciones temporales asociadas a respuestas tipo escalón.

#### 3.1. Interpolación inversa del tiempo de subida $t_r(\omega_n, \zeta)$ sobre la función escalón

El tiempo de subida  $t_r$  de una respuesta escalón subamortiguada, es habitual definirlo entre el 10 y el 90%, el 5 al 95% o del 0 al 100%, de su valor final (Ogata, 1993). Aquí, se utilizará el primer intervalo (10 al 90%) por ser más complejo, aunque para sistemas subamortiguados es más normal el caso del intervalo 0 al 100%. Por tanto, utilizando  $Alc$  como parámetro de porcentaje de alcance del valor estacionario final, se define  $t_r$  asociado al par  $(\omega_n, \zeta)$  como,

$$t_r(\omega_n, \zeta) = tr_{90}(\omega_n, \zeta, Alc = 90\%) - tr_{10}(\omega_n, \zeta, Alc = 10\%) \quad (5)$$

Así, en este caso, el planteamiento se reduce a desarrollar una técnica para interpolación de parámetros del tipo  $tr_{Alc}(\omega_n, \zeta, Alc)$ , sobre la función escalón  $f(t)$  de segundo orden con amortiguamiento subcrítico. Teniendo en cuenta que para cualquier instante de tiempo  $t$ , la función  $f(t)$  se describe como en (1), entonces,

$$f(t) = f_{step}(t), \quad \text{con } 0 < \zeta < 1 \quad (6)$$

Para  $tr_{Alc}$ , la ecuación (6) toma el valor,

$$f(tr_{Alc}) = \frac{Alc}{100} = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n tr_{Alc}}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} tr_{Alc} + a \cos \zeta) \quad (7)$$

Si se utiliza para interpolación sobre  $f(t)$  el método por diferencias de Newton, con precisión de 5º orden, las fórmulas genéricas a aplicar son las siguientes (Bonnas et al., 2006):

- Para el caso de “Diferencias Descendentes”:

$$f(t_0 + \theta h) = f(t_0) + \delta_d^{1^\circ} \theta + \frac{\delta_d^{2^\circ}}{2} \theta(\theta-1) + \frac{\delta_d^{3^\circ}}{3!} \theta(\theta-1)(\theta-2) + \frac{\delta_d^{4^\circ}}{4!} \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3) + \frac{\delta_d^{5^\circ}}{5!} \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3)(\theta-4) \quad (8)$$



- Para el caso de “Diferencias Ascendentes”:

$$f(t_0 + \theta h) = f(t_0) + \delta_d^{1^\circ} \theta + \frac{\delta_d^{2^\circ}}{2} \theta(\theta+1) + \frac{\delta_d^{3^\circ}}{3!} \theta(\theta+1)(\theta+2) + \frac{\delta_d^{4^\circ}}{4!} \theta(\theta+1)(\theta+2)(\theta+3) + \frac{\delta_d^{5^\circ}}{5!} \theta(\theta+1)(\theta+2)(\theta+3)(\theta+4) \quad (9)$$

Donde  $h$  es el intervalo de tiempos elegido para las diferencias  $\delta^i$  de orden  $i$  ( $1^\circ, 2^\circ, \dots$ ). El procedimiento general consiste en calcular el parámetro  $\theta$  por iteración. Para ello, se despeja  $\theta = F(\theta)$  y se asigna un valor inicial  $F(\theta_0) = \theta_0$ .

Si  $\theta_1$  es adecuado, se termina el proceso. En caso contrario, se siguen asignando valores  $F(\theta_1) = \theta_2$ ,  $F(\theta_2) = \theta_3$ , ..., hasta que se obtenga un resultado tal que,  $|\theta_i - \theta_{i-1}| < |\theta_{i-1} - \theta_{i-2}|$ , con  $i = 1, 2, \dots$

Entonces, despejando  $\theta$  en la ecuación (8) o (9), por ejemplo, en la de *diferencias descendentes* (8) y, sustituyendo, se tiene,

$$\theta = \frac{f(t_0 + \theta h) - f(t_0)}{\delta_d^{1^\circ}} - \frac{\delta_d^{2^\circ}}{2\delta_d^{1^\circ}} \theta(\theta-1) + \frac{\delta_d^{3^\circ}}{3!\delta_d^{1^\circ}} \theta(\theta-1)(\theta-2) + \frac{\delta_d^{4^\circ}}{4!\delta_d^{1^\circ}} \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3) + \frac{\delta_d^{5^\circ}}{5!\delta_d^{1^\circ}} \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3)(\theta-4) \quad (10)$$

Para empezar la iteración, se escoge,

$$\theta_0 = \frac{f(t_0 + \theta h) - f(t_0)}{\delta_d^{1^\circ}} \quad (11)$$

Para la función genérica (6) que nos ocupa, la secuencia concreta de pasos a realizar sería:

1. Definir el intervalo temporal  $h$ . Dado que el sobreimpulso máximo  $M_p$  se alcanza en el tiempo  $t_{Mp}$ , un valor práctico válido de intervalo es  $1/10$  del mismo. Es decir,

$$t_{Mp} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \Rightarrow h = \frac{\pi}{10 \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (12)$$

Y utilizar como tiempos discretos los siguientes,

$$t_i = \{t_1 = 0; t_2 = t_1 + h; \dots; t_n = t_{n-1} + h\}, \text{ con } i = 1, \dots, n \quad (13)$$

Más adelante veremos que la elección del intervalo  $h$  del 10% de  $t_{Mp}$  no es aleatoria. De momento, considerar que para cubrir con intervalos  $h$  el tiempo comprendido entre  $\theta(t_1)$  y  $t_{Mp}(t_{11})$  son necesarios 11 instantes de tiempo, es decir,  $n = 11$ .

2. Sustituir los valores de los tiempos anteriores (13) en la función  $f(t)$  (6), teniendo en cuenta el valor conocido de  $\omega_n$ .
3. Obtener las diferencias  $\delta$  de  $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$  y  $5^\circ$  orden, a partir de las relaciones expresadas en una tabla de diferencias, como la construida en la Tabla 1. Observar cómo para una tabla de diferencias de  $5^\circ$  orden es necesario muestrear 11 instantes de tiempo. Ésta es la razón de ser del valor  $h$  elegido en (12). El usuario puede aumentar la precisión de la interpolación utilizando intervalos de interpolación  $h$  más pequeños, por ejemplo,  $1/20$  o  $1/30$  veces el tiempo  $t_{Mp}$ .
4. Buscar el parámetro  $t_0$  para definir el parámetro inicial  $\theta_0$  (11), eligiendo el procedimiento de diferencias más adecuado

(descendentes o ascendentes), a partir del siguiente criterio (para el ejemplo de la Tabla 1 anterior, de 11 instantes de tiempo muestreados),

Si  $f(t_i) > \frac{Alc}{100}$ , con  $i = 1, 2, \dots, 6$ , Entonces usar,

- *Diferencias Descendentes* y,

$$f(t_0) = f(t_{i-1}) < f(t), \text{ con } t_i < t < t_{i+1} \quad (14)$$

Es decir, se trata del “punto” más cercano con valor inferior al buscado.

Si  $f(t_i) > \frac{Alc}{100}$ , con  $i = 7, 8, \dots, 11$ . Entonces utilizar,

- *Diferencias Ascendentes* y,

$$f(t_0) = f(t_i) > f(t), \text{ con } t_{i-1} \leq t < t_i \quad (15)$$

Esto es, el “punto” más cercano con valor superior al buscado.

(Siendo  $t$  el tiempo a encontrar, en este caso definido como,  $tr_{Alc}$ )

5. Calcular  $\theta_0$  inicial, usando las expresiones:

$$f(t_0 + \theta h) = \frac{Alc}{100} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\frac{Alc}{100} - f(t_0)}{\delta_{t_i}} \quad (16)$$

6. Calcular valores  $\theta_i$  (con  $i = 1, 2, \dots$ ) y el error cometido en cada iteración ( $Error_{i-1} = |\theta_{i-1} - \theta_i|$ ), usado para controlar la salida correcta o no del bucle, además de la precisión de la aproximación.

Tabla 1: Diferencias  $\delta$  para funciones  $f(t)$  de  $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$  y  $5^\circ$  orden

$f(t)$	1º Orden	2º Orden	3º Orden	4º Orden	5º Orden
$f(t_1)$	$\delta_{11} = f(t_2) - f(t_1)$	$\delta_{21} = \delta_{12} - \delta_{11}$	$\delta_{31} = \delta_{22} - \delta_{21}$	$\delta_{41} = \delta_{32} - \delta_{31}$	$\delta_{51} = \delta_{42} - \delta_{41}$
$f(t_2)$	$\delta_{12} = f(t_3) - f(t_2)$	$\delta_{22} = \delta_{13} - \delta_{12}$	$\delta_{32} = \delta_{23} - \delta_{22}$	$\delta_{42} = \delta_{33} - \delta_{32}$	$\delta_{52} = \delta_{43} - \delta_{42}$
$f(t_3)$	$\delta_{13} = f(t_4) - f(t_3)$	$\delta_{23} = \delta_{14} - \delta_{13}$	$\delta_{33} = \delta_{24} - \delta_{23}$	$\delta_{43} = \delta_{34} - \delta_{33}$	$\delta_{53} = \delta_{44} - \delta_{43}$
$f(t_4)$	$\delta_{14} = f(t_5) - f(t_4)$	$\delta_{24} = \delta_{15} - \delta_{14}$	$\delta_{34} = \delta_{25} - \delta_{24}$	$\delta_{44} = \delta_{35} - \delta_{34}$	$\delta_{54} = \delta_{45} - \delta_{44}$
$f(t_5)$	$\delta_{15} = f(t_6) - f(t_5)$	$\delta_{25} = \delta_{16} - \delta_{15}$	$\delta_{35} = \delta_{26} - \delta_{25}$	$\delta_{45} = \delta_{36} - \delta_{35}$	$\delta_{55} = \delta_{46} - \delta_{45}$
$f(t_6)$	$\delta_{16} = f(t_7) - f(t_6)$	$\delta_{26} = \delta_{17} - \delta_{16}$	$\delta_{36} = \delta_{27} - \delta_{26}$	$\delta_{46} = \delta_{37} - \delta_{36}$	$\delta_{56} = \delta_{47} - \delta_{46}$
$f(t_7)$	$\delta_{17} = f(t_8) - f(t_7)$	$\delta_{27} = \delta_{18} - \delta_{17}$	$\delta_{37} = \delta_{28} - \delta_{27}$	$\delta_{47} = \delta_{38} - \delta_{37}$	
$f(t_8)$	$\delta_{18} = f(t_9) - f(t_8)$	$\delta_{28} = \delta_{19} - \delta_{18}$	$\delta_{38} = \delta_{29} - \delta_{28}$		
$f(t_9)$	$\delta_{19} = f(t_{10}) - f(t_9)$	$\delta_{29} = \delta_{110} - \delta_{19}$			
$f(t_{10})$	$\delta_{110} = f(t_{11}) - f(t_{10})$				
$f(t_{11})$					

Diferencias descendentes: Comienza en el último valor  $f(t_{11})$

Diferencias ascendentes: Comienza en el primer valor  $f(t_1)$

En caso de Diferencias Descendentes, utilizar:

$$\theta_1 = \theta_0 - \frac{\delta_d^{2^\circ}}{2\delta_d^{1^\circ}} \theta_0(\theta_0 - 1) - \frac{\delta_d^{3^\circ}}{3!\delta_d^{1^\circ}} \theta_0(\theta_0 - 1)(\theta_0 - 2) - \frac{\delta_d^{4^\circ}}{4!\delta_d^{1^\circ}} \theta_0(\theta_0 - 1)(\theta_0 - 2)(\theta_0 - 3) - \frac{\delta_d^{5^\circ}}{5!\delta_d^{1^\circ}} \theta_0(\theta_0 - 1)(\theta_0 - 2)(\theta_0 - 3)(\theta_0 - 4) \quad (17)$$

$$Error_0 = |\theta_0 - \theta_1| \quad (18)$$

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{\delta_d^{2^\circ}}{2\delta_d^{1^\circ}} \theta_1(\theta_1 - 1) - \frac{\delta_d^{3^\circ}}{3!\delta_d^{1^\circ}} \theta_1(\theta_1 - 1)(\theta_1 - 2) - \frac{\delta_d^{4^\circ}}{4!\delta_d^{1^\circ}} \theta_1(\theta_1 - 1)(\theta_1 - 2)(\theta_1 - 3) - \frac{\delta_d^{5^\circ}}{5!\delta_d^{1^\circ}} \theta_1(\theta_1 - 1)(\theta_1 - 2)(\theta_1 - 3)(\theta_1 - 4) \quad (19)$$

$$Error_1 = |\theta_1 - \theta_2| \quad (20)$$

Aplicar el siguiente proceso:

$$\begin{cases} \text{Si } Error_1 < Eps, \text{ Entonces } \theta = \theta_2 \text{ y } t = t_0 + \theta h \\ \text{Si } Error_1 \geq Eps, \text{ Entonces continuar iteración.} \end{cases}$$

**Nota1:** La precisión obtenida depende del parámetro ‘Eps’ definido por el usuario, que te indica el error máximo permitido en la iteración de búsqueda aplicada.

En caso de Diferencias Ascendentes, usar:

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_0 - \frac{\delta_a^{2^\circ}}{2\delta_a^{3^\circ}} \theta_0(\theta_0+1) - \frac{\delta_a^{3^\circ}}{3\delta_a^{4^\circ}} \theta_0(\theta_0+1)(\theta_0+2) - \\ \quad - \frac{\delta_a^{4^\circ}}{4\delta_a^{5^\circ}} \theta_0(\theta_0+1)(\theta_0+2)(\theta_0+3) - \frac{\delta_a^{5^\circ}}{5\delta_a^{6^\circ}} \theta_0(\theta_0+1)(\theta_0+2)(\theta_0+3)(\theta_0+4) \\ Error_0 = |\theta_0 - \theta_1| \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta_1 - \frac{\delta_a^{2^\circ}}{2\delta_a^{3^\circ}} \theta_1(\theta_1+1) - \frac{\delta_a^{3^\circ}}{3\delta_a^{4^\circ}} \theta_1(\theta_1+1)(\theta_1+2) - \\ \quad - \frac{\delta_a^{4^\circ}}{4\delta_a^{5^\circ}} \theta_1(\theta_1+1)(\theta_1+2)(\theta_1+3) - \frac{\delta_a^{5^\circ}}{5\delta_a^{6^\circ}} \theta_1(\theta_1+1)(\theta_1+2)(\theta_1+3)(\theta_1+4) \\ Error_1 = |\theta_1 - \theta_2| \end{cases} \quad (22)$$

Aplicar el siguiente proceso:

$$\begin{cases} \text{Si } Error_1 < Eps, \text{ Entonces } \theta = \theta_2 \text{ y } t = t_0 + \theta h \\ \text{Si } Error_1 \geq Eps, \text{ Entonces continuar iteración.} \end{cases}$$

**Nota2:** Para cada  $\theta_i$  (con  $i=1,2,\dots$ ),  $\delta^{\circ} = \delta_{1i}^{\circ}$ ,  $\delta^{\circ} = \delta_{2i}^{\circ}$ , ..

### 3.2. Interpolación inversa del tiempo $t_s(\omega_n, \zeta, desv)$ sobre la función escalón

El procedimiento de búsqueda para el tiempo de asentamiento  $t_s$  requerido es, en principio, el mismo que el descrito para el tiempo de subida  $t_r$  anterior, salvo por las siguientes consideraciones particulares:

- Con el parámetro *desv* se define el canal de asentamiento con valores en tanto por uno dentro del intervalo dado por,

$$1 \pm \frac{desv}{100} \quad (25)$$

- Para la obtención del tiempo de asentamiento, se trata de ir observando el comportamiento de cada uno de los semiciclos de la señal en el intervalo cero-pico máximo, para el primero y, pico\_máximo-pico\_mínimo, para los demás:
  - Si el primer pico máximo está dentro del canal de asentamiento, el tiempo de asentamiento estará en el primer semiciclo, en el intervalo de ascenso (subida), antes de dicho pico.
  - Si no es así, cuando se encuentre un semiciclo completo (pico\_máximo-pico\_mínimo) dentro del canal de asentamiento, el tiempo buscado estará dentro del anterior semiciclo; en caso contrario, el tiempo de asentamiento será este tiempo más la suma de los tiempos de cada semiciclo  $\pi/\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ , hasta alcanzar el que esté dentro del canal.

La interpolación inversa de  $t_s$  se realiza entre  $\theta$  y  $t_1$  (primer semiciclo),  $t_1$  y  $t_2$  (segundo semiciclo) y, así sucesivamente hasta encontrar el valor adecuado (Ver Figura 3).

Es cierto que para la determinación de tiempos de establecimiento se puede utilizar la envolvente de la función descrita en (1), sin perder demasiada precisión y, por tanto, no sería necesario ningún método numérico para encontrar estos parámetros. Sin embargo, el método de interpolación planteado se ha desarrollado para la búsqueda de tiempos de subida, imposibles de determinar con precisión a través de dicha envolvente y, ya se aprovecha su uso para la determinación más precisa de  $t_s$  o combinaciones de tipo  $t_r-t_r$ , como las que se van a proponer en la sección 4 sobre la función impulso.

### 3.3. Ejemplo aplicación de la interpolación inversa sobre la función escalón

En el ejemplo de la Figura 3 se ha utilizado la aplicación TD2WD.M, tal como se indica en la sección 5, para la obtención del límite inferior en frecuencia para seguimiento. Se resuelve (6) aplicando diferentes procedimientos,

- La técnica de interpolación inversa descrita en la sección 3.
- La función ‘solve’ sobre ecuaciones independientes de una sola incógnita ( $\zeta$  y  $\omega_n$  conocidas), combinada con el procedimiento asociado a las ecuaciones (3) y (4).
- La función ‘fsolve’ con ecuaciones de una sola incógnita, combinada con el procedimiento asociado a (3) y (4).
- La función ‘solve’ sobre un sistema de cuatro ecuaciones con incógnitas,  $tr_{10}(\omega_n, \zeta, Alc=10\%)$ ,  $tr_{90}(\omega_n, \zeta, Alc=90\%)$ ,  $\omega_n$  y  $t_s(\omega_n, \zeta)$ . El tiempo  $t_s$ , en este caso, se describe a partir de la ecuación de la envolvente a la función escalón, es decir con,

$$f(t_s) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (26)$$

- La función ‘fsolve’ sobre un sistema de cuatro ecuaciones con las incógnitas indicadas en el párrafo 4 anterior.

Un resumen de los resultados conseguidos se describe en la comparativa entre procedimientos de la Tabla 2, donde se ve la desviación obtenida con cada uno de ellos, en cuanto al tiempo de subida ( $f(t_r)-f(t)$ ) y el tiempo de asentamiento ( $f(t_s)-f(t)$ ).

Tabla 2: Resultados y desviaciones obtenidas con los 5 procedimientos propuestos, para el ejemplo de la sección 3.3

Método	$f(t)=0.9$			$f(t)=0.1$			$f(t)=0.95$		
	$t_r(s)$	$f(t_r)$	$f(t_r)-f(t)$	$t_r(s)$	$f(t_r)$	$f(t_r)-f(t)$	$t_s(s)$	$f(t_s)$	$f(t_s)-f(t)$
1	12.27	0.90008	0.00008	2.27	0.0964	0.0036	13.57	0.94989	0.0001
2	19.58	0.29784	0.60216	9.86	0.0999	0.00001	19.99	0.30708	0.64292
3	9	0.99964	-0.09964	0.39	0.06024	0.03977	20	1	-0.05
4	No posible	-	-	No posible	-	-	No posible	-	-
5	11.65	0.9	0	1.65	0.09999	0.00001	14.12	0.95066	-0.0007

- Interpolación inversa método de Newton 5º orden
- Función ‘solve’ sobre ecuaciones independientes
- Función ‘fsolve’ sobre ecuaciones independientes
- Función ‘solve’ sobre sistema de ecuaciones
- Función ‘fsolve’ sobre sistema de ecuaciones

- Las especificaciones temporales requeridas han sido: 15% de sobreimpulso máximo; tiempos de subida y asentamiento máximos de 10s y 20s, respectivamente, sobre un canal de asentamiento de  $\pm 5\%$ .
- Respuesta por interpolación inversa, método de Newton. Ofrece los siguientes resultados, representados en la Figura 3:

- Parámetros en frecuencia: Frecuencia natural de  $0.219\text{rad/s}$  y coeficiente de amortiguamiento  $0.72$ .
- Características de respuesta temporal máximas:
  - $M_p$  final del  $3.95\%$ .
  - Tiempo de subida calculado de  $10\text{s}$ . Desviaciones buenas y resultado de acercamiento al  $t_r$  exigido perfecto.
  - Tiempo de asentamiento calculado de  $13.57\text{s}$ . Desviaciones de aproximación muy buenas.

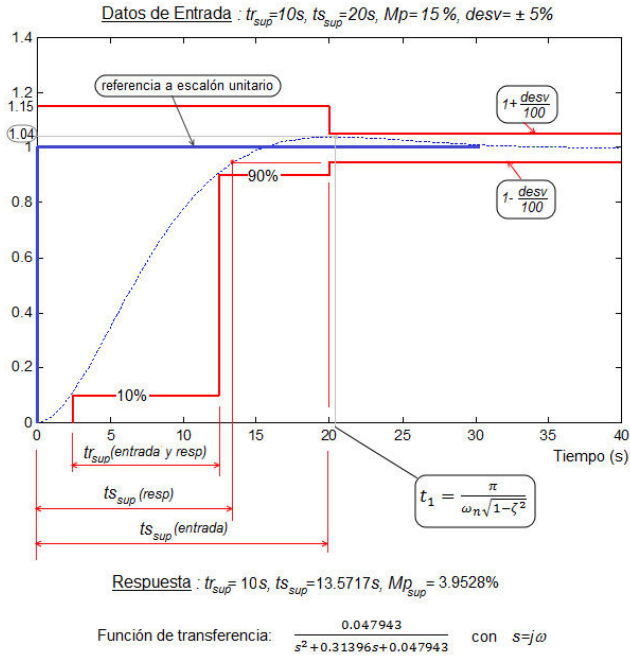


Figura 3: Ejemplo de especificación de seguimiento con características de respuesta temporal máximas, aproximada por interpolación inversa

- c) Los resultados obtenidos con los otros cuatro métodos comparativos propuestos son los siguientes:
- Respuesta aplicando 'solve' con ecuaciones independientes, representada en la Figura 4:
    - Parámetros en frecuencia: Frecuencia natural de  $0.0522\text{rad/s}$  y coeficiente de amortiguamiento  $0.82$ .
    - Características de respuesta temporal máximas:
      - $M_p$  final del  $1.17\%$ .
      - Tiempo de subida calculado de  $9.72\text{s}$ . Pero debido a la enorme desviación obtenida para  $f(t)=0.9$  ( $90\%$ ), el  $t_r(\text{resp})$  es de casi  $50\text{s}$ .
      - Tiempo de asentamiento calculado de  $19.99\text{s}$ . Con la gran desviación obtenida para una  $f(t)=0.95$ , el  $t_s(\text{resp})$  es de más de  $65\text{s}$ .
  - Respuesta aplicando 'fsolve' con ecuaciones independientes, representada en la Figura 5:
    - Parámetros en frecuencia: Frecuencia natural de  $1\text{rad/s}$  y coeficiente de amortiguamiento  $0.97$ .
    - Características de respuesta temporal máximas:
      - $M_p$  final del  $0.0007\%$ .
      - Tiempo de subida calculado de  $8.47\text{s}$ . Pero debido a la desviaciones obtenidas, el  $t_r(\text{resp})$  es de sólo unos  $4\text{s}$ .
      - Tiempo de asentamiento calculado de  $20\text{s}$ . Con la desviación obtenida para una  $f(t)=0.95$ , el  $t_s(\text{resp})$  es de unos  $5\text{s}$ .

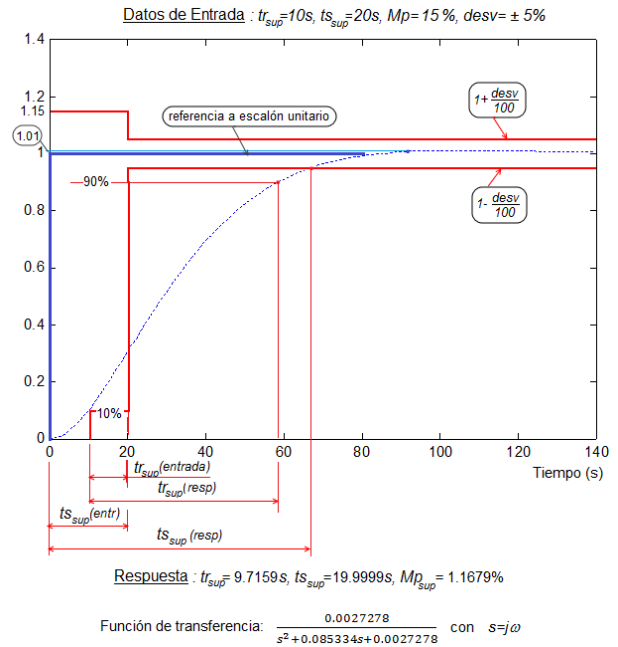


Figura 4: Ejemplo de especificación de seguimiento con características de respuesta temporal máximas, aproximada aplicando 'solve' con ecuaciones independientes

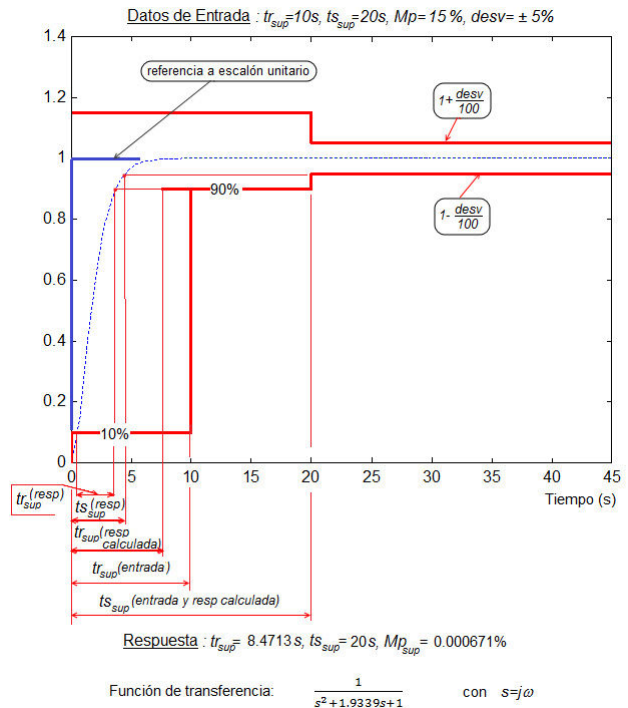


Figura 5: Ejemplo de especificación de seguimiento con características de respuesta temporal máximas, aproximada aplicando 'fsolve' con ecuaciones independientes

- Respuesta aplicando 'solve' con sistema de ecuaciones: para este ejemplo, no hay solución posible.
- Respuesta aplicando 'fsolve' con sistema de ecuaciones, representada en la Figura 6:
  - Parámetros en frecuencia: Frecuencia natural de  $0.3196\text{rad/s}$  y coeficiente de amortiguamiento  $0.97$ .

○ Características de respuesta temporal máximas:

- $Mp$  final del 0.0007%.
- Tiempo de subida calculado de 10s. Resultado muy bueno que coincide con la  $t_r$  exigida.
- Tiempo de asentamiento calculado de 14.12s. Resultado muy bueno, parecido al del método de interpolación.

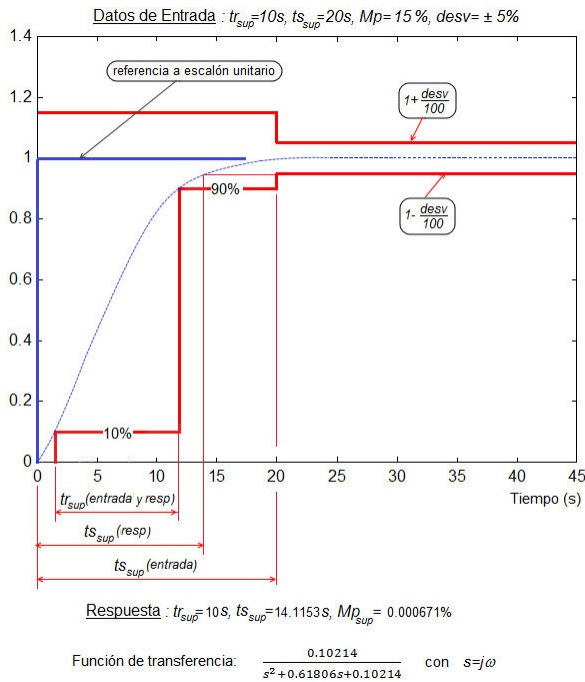


Figura 6: Ejemplo de especificación de seguimiento con características de respuesta temporal máximas, aproximada aplicando 'fsolve' con sistema de ecuaciones

- d) El único procedimiento comparable con el propuesto de interpolación inversa es el de aplicación de 'fsolve' mediante sistema de ecuaciones. Sin embargo, observar que en ambos casos las características de  $t_r$  y  $t_s$  son muy parecidas y correctas, pero el  $Mp$  se acerca mejor al exigido con interpolación inversa. En los demás casos, los resultados no son prácticos.

#### 4. Técnica de interpolación inversa sobre la función impulso

Para el traslado de especificaciones de sensibilidad en el dominio de la frecuencia, tanto genérica, como específica, tal y como se han definido en la sección 2, se va a aplicar una técnica de interpolación inversa sobre la función impulso (2). Se trata de encontrar el conjunto de posibles pares  $(\omega_n, \zeta)$  representativos de las funciones de segundo orden, que cumplen con todos los requerimientos temporales para regulación exigidos. Al igual que ocurre en la sección 3, la técnica aquí descrita es un esquema de la técnica de interpolación inversa sobre la función impulso, desarrollada con detalle en (Joglar-Alcubilla, 2015).

Se utiliza un proceso de iteración automática, dentro del rango de amortiguamiento subcrítico; es decir,  $1 > \zeta > 0$ , de modo que por cada coeficiente de amortiguación y dependiendo del tipo de sensibilidad considerada, se busca:

1. Para sensibilidad genérica, sólo es necesario trabajar con el tiempo de asentamiento  $t_s$ , que no debe exceder del

especificado  $T$ , asociado al par  $(\omega_n, \zeta)$ . Para ello, usar la relación:

$$\frac{t_{s1}}{t_s} = \omega_n \quad (27)$$

O sea, dado  $t_s = T$  como especificación temporal y, calculado mediante interpolación  $t_{s1}$  asociado al par  $(\omega_n = 1, \zeta)$ , se obtiene de (27) el parámetro  $\omega_n$ , relacionado con  $t_s$  para el coeficiente de amortiguación  $\zeta$ . La validez del par  $(\omega_n, \zeta)$  se comprueba, aplicando de nuevo interpolación inversa sobre la función (2) para obtener  $t_{sfinal}$ , tal que:

- Si  $t_{sfinal}(\omega_n, \zeta) \leq T$  y no se supera la amplitud máxima exigida, el par  $(\omega_n, \zeta)$  será una posible solución de segundo orden en frecuencia.
2. Para sensibilidad específica, es necesario usar interpolación inversa tanto sobre el tiempo de asentamiento  $t_s$ , como para el tiempo de subida  $t_r$ , aunque asociados en ambos casos a la misma amplitud sobre la función impulso (2). Para ello, utilizar la relación descrita por:

$$\frac{t_{s1} - t_{r1}}{t_s} = \omega_n \quad (28)$$

Esto es, dada la especificación temporal  $t_s = T$ , se calcula por interpolación  $(t_{s1} - t_{r1})$ , diferencia de tiempos asociada al mismo par  $(\omega_n = 1, \zeta)$ , y se puede obtener despejando en (28)  $\omega_n$ , relacionado con  $t_s$  para el coeficiente  $\zeta$ . Observar que hace falta encontrar por separado  $t_{s1}$  y  $t_{r1}$ , por lo que se utiliza la interpolación dos veces. El par  $(\omega_n, \zeta)$  obtenido se verifica aplicando otra vez interpolación inversa sobre la función (2) para conseguir  $(t_s - t_r)_{final}$ , tal que:

- Si  $(t_s - t_r)_{final}(\omega_n, \zeta) \leq T$  y no se excede la amplitud máxima requerida, el par  $(\omega_n, \zeta)$  puede ser una posible solución.

En (Joglar-Alcubilla, 2015) se detalla la obtención de las ecuaciones (27) y (28) y, el sentido de los pasos esquematizados anteriormente, cuando se pretende trasladar especificaciones temporales asociadas a respuestas tipo impulso. Aunque, por otro lado, el planteamiento es equivalente al definido en la sección 3, al trabajar con las funciones escalón.

##### 4.1. Interpolación inversa del tiempo de subida $t_r(\omega_n, \zeta, Alc)$ sobre la función impulso

Se trata de encontrar el tiempo de subida  $t_r$  sobre la señal impulso  $f(t)$ , cuando ésta toma el valor de alcance "Alc" y, viene definida por los parámetros  $\omega_n$  y  $\zeta$ . Es decir, el planteamiento se reduce al desarrollo de una técnica para interpolación de parámetros del tipo  $tr_{Alc}(\omega_n, \zeta, Alc)$ , sobre la función impulso  $f(t)$  de segundo orden con amortiguamiento subcrítico.

Se define la función  $f(t)$ , para cada instante de tiempo  $t$ , como en (2), esto es:

$$f(t) = f_{pulse}(t) \quad , \quad \text{con } 0 < \zeta < 1 \quad (29)$$

Para  $tr_{Alc}$ , la ecuación (29) toma el valor,

$$f(tr_{Alc}) = \frac{Alc}{100} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n tr_{Alc}} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} tr_{Alc}) \quad (30)$$



El procedimiento de interpolación por diferencias de Newton de 5º orden sobre  $f(tr_{Alc})$  es el mismo que el descrito en la sección 3.1, con las siguientes salvedades:

- Intervalo temporal  $h$  de interpolación de diferencias. Teniendo en cuenta que el valor de pico máximo  $f_{max}$  se alcanza en el instante de tiempo  $t_{max}$  dado por,

$$t_{max} = \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (31)$$

Un valor práctico válido de intervalo  $h$  es 1/10 parte del tiempo  $t_{max}$  por la misma razón que para definir el intervalo de interpolación utilizado en la sección 3.1. Es decir,

$$h = \frac{t_{max}}{10} \quad (32)$$

Y usar como tiempos discretos los dados en (13).

- Sustituir los valores de los tiempos anteriores (13) en la función de interpolación  $f(t)$  (29), teniendo en cuenta el valor conocido de  $\omega_n$ .

A partir de aquí, la técnica de interpolación sigue los mismos pasos que en la sección 3.1, es decir:

- Obtener los valores  $\delta$  de 1º, 2º, 3º, 4º y 5º orden, usando la Tabla 1 de diferencias.
- Buscar el parámetro  $t_0$ , utilizando el criterio descrito en la sección 3.1 a partir de las ecuaciones (14) y (15).
- Calcular  $\theta_0$  inicial, usando (16) y el valor  $h$  de (32).
- Calcular valores  $\theta_i$  (con  $i=1,2,\dots$ ) y el error cometido en cada iteración ( $Error_{i-1}=|\theta_{i-1}-\theta_i|$ ), mediante un procedimiento como el indicado entre las ecuaciones (17) y (24).

#### 4.2. Interpolación inversa del tiempo $t_s(\omega_n, \zeta, As)$ sobre la función impulso

El procedimiento de búsqueda para el tiempo de asentamiento  $t_s$  requerido, respecto de la función impulso, es parecido al descrito para el tiempo de subida  $t_r$  anterior, en la sección 4.1, excepto por las siguientes consideraciones particulares (Ver Figura 4):

- El parámetro “ $As$ ” define el canal de asentamiento de la respuesta impulso con valores en tanto por uno dentro del intervalo dado por,

$$\pm \frac{As}{100} \quad (33)$$

- El tiempo de asentamiento se obtiene observando el comportamiento de cada uno de los semiciclos de la señal en el intervalo, pico (máximo positivo) y valle (mínimo negativo) o valle-pico:
  - Si el primer pico está dentro del canal de asentamiento, no existe entonces tiempo de asentamiento  $t_s$  distinto de cero.
  - Si no es así, cuando se localice un semiciclo completo (pico-valle o valle-pico) dentro del canal de asentamiento, distinto del primero, el tiempo  $t_s$  se encontrará asociado al anterior semiciclo; en caso contrario, el tiempo de asentamiento será este tiempo, más la suma de los tiempos

de cada semiciclo  $\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$ , hasta que el pico o valle de la función esté dentro del canal.

- El intervalo temporal  $h$  de interpolación, siempre está comprendido entre un pico o valle y el cero siguiente de la función, localizados temporalmente en  $t_p$  y  $t_c$ , respectivamente. Donde,

$$t_p = \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) + n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (34)$$

$$t_c = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (35)$$

Ambos con,  $n=0, 1, \dots$ . Observar que  $t_p(n=0)=t_{max}$

La interpolación inversa de  $t_s$  dentro del intervalo  $h$  ( $t_p$  a  $t_c$ ) se realiza entre  $t_p$  y  $t_1$ ,  $t_1$  y  $t_2$ , y así sucesivamente hasta finalizar en  $t_c$  ( $t_1, t_2, \dots$ , son los tiempos discretos dados en (13)).

#### 4.3. Ejemplo aplicación de la interpolación inversa sobre la función impulso

En el ejemplo de la Figura 7 se ha utilizado la aplicación ESENSIB.M, accesible desde la sección 5, para la obtención del límite inferior en frecuencia para sensibilidad específica. Se resuelve (29) aplicando los siguientes procedimientos:

- La técnica de interpolación inversa descrita en la sección 4.
- La función ‘solve’ sobre ecuaciones independientes de una sola incógnita ( $\zeta$  y  $\omega_n$  conocidas), combinada con el procedimiento asociado a la ecuación (28).
- La función ‘fsolve’ con ecuaciones de una sola incógnita, combinada con el procedimiento asociado a (28).
- La función ‘solve’ sobre un sistema de tres ecuaciones con incógnitas,  $tr_{Alc}(\omega_n, \zeta, Alc=Out)$ ,  $t_s(\omega_n, \zeta)$  y  $\omega_n$ . El tiempo  $t_s$ , en este caso, se describe a partir de la ecuación de la envolvente a la función impulso, es decir con,

$$f(ts) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n ts} \quad (36)$$

- La función ‘fsolve’ sobre un sistema de tres ecuaciones con las incógnitas indicadas en el párrafo anterior.

Un resumen de los resultados conseguidos se describe en la comparativa entre procedimientos de la Tabla 3, donde se ve la desviación obtenida con cada uno de ellos, en cuanto al tiempo de subida ( $f(t_r)-f(t)$ ) y el tiempo de asentamiento ( $f(t_s)-f(t)$ ).

- Las especificaciones temporales requeridas han sido: una amplitud de la respuesta tipo impulso comprendida entre 1.5 y 4.35, durante no más de 10s. Por tanto, el canal de asentamiento está comprendido en el intervalo  $\pm 1.5$ .
- Respuesta por interpolación inversa, método de Newton. Ofrece los siguientes resultados, representados en la Figura 7:
  - Parámetros en frecuencia:  $\omega_n = 0.8371 \text{ rad/s}$  y  $\zeta = 0.13$ .
  - Características de respuesta temporal máximas:
    - $f_{max}$  de 4.153 que no excede el valor impuesto de 4.35

- Tiempo de subida calculado de respuesta, 0.38s. Para una  $f(t)=1.5$  ( $Out$  o  $Out/In=0.25$ ) se obtiene el  $tr_{out}$  indicado, en el primer semiciclo, entre 0 y  $t_{c1}$ .
- Tiempo de asentamiento calculado de respuesta, 10.05s. Para una  $f(t)=\pm 1.5$  (canal de asentamiento) el  $ts_{out}$  obtenido produce un  $T_{out}=ts_{out}-tr_{out}=9.67s \leq 10s$ . El primer semiciclo en entrar completo dentro del canal de asentamiento es el número 4.

Tabla 3: Resultados y desviaciones obtenidas con los 5 procedimientos propuestos, para el ejemplo de la sección 4.3

Método	$f(t)=0.25$			$f(t)=\pm 0.25$		
	$t_s(s)$	$f(t_s)$	$f(t_s)-f(t)$	$t_s(s)$	$f(t_s)$	$f(t_s)-f(t)$
1	0.38	0.2498	-0.0002	10.05	0.2501	0.0001
2	0.45	0.25	0	6.31	-0.3399	-0.0899
3	$8.9 \cdot 10^{-3}$	$5.4 \cdot 10^{-3}$	-0.2500	5.91	-0.3562	-0.1062
4	0.37	0.25	0	10.37	0.1613	-0.0887
5	0.54	0.2490	-0.0010	10.54	0.2090	-0.0411

- 1, Interpolación inversa método de Newton 5º orden
- 2, Función 'solve' sobre ecuaciones independientes
- 3, Función 'fsolve' sobre ecuaciones independientes
- 4, Función 'solve' sobre sistema de ecuaciones
- 5, Función 'fsolve' sobre sistema de ecuaciones

**Nota:** En la Tabla 3 se está utilizando  $f(t)=Out/In$

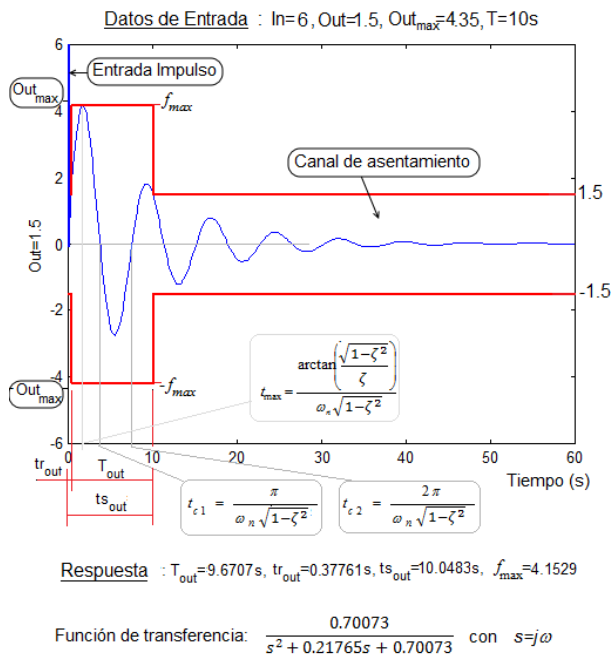


Figura 7: Ejemplo de especificación de sensibilidad con características de respuesta máximas, aproximada por interpolación inversa

- c) Los resultados obtenidos con los otros cuatro métodos comparativos propuestos son los siguientes:
- Respuesta aplicando 'solve' con ecuaciones independientes, representada en la Figura 8:
    - Parámetros en frecuencia:  $\omega_n=0.7797rad/s$  y  $\zeta=0.17$ .
    - Características de respuesta temporal máximas:
      - $f_{max}$  de 3.674 que no excede el valor impuesto de 4.35
      - Tiempo de subida calculado de respuesta, 0.45s, para  $f(t)=1.5$ . Desviación nula.

- Tiempo de asentamiento calculado de respuesta, 6.31s. Para una  $f(t)=\pm 1.5$  se tiene  $T_{out}=ts_{out}-tr_{out}=5.86s \leq 10s$ . Desviación elevada, por lo que el  $T_{out}$  real no coincide.
- Respuesta aplicando 'fsolve' con ecuaciones independientes, representada en la Figura 9:
  - Parámetros en frecuencia:  $\omega_n=0.7797rad/s$  y  $\zeta=0.17$ .
  - Características de respuesta temporal máximas:
    - $f_{max}$  de 3.674 que no excede el valor impuesto de 4.35
    - Tiempo de subida calculado de respuesta,  $9 \cdot 10^{-3}s$ , para  $f(t)=1.5$ . Desviación muy elevada, por lo que el  $tr_{out}$  no coincide con el real.
    - Tiempo de asentamiento calculado de respuesta, 5.91s. Para una  $f(t)=\pm 1.5$  se tiene  $T_{out}=ts_{out}-tr_{out}=6.91s \leq 10s$ . Desviación elevada, por lo que el  $T_{out}$  difiere del real.

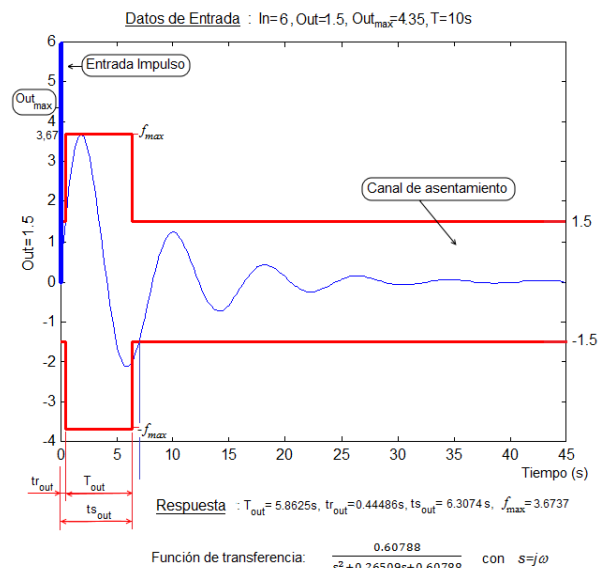


Figura 8: Ejemplo de especificación de sensibilidad con características de respuesta temporal máximas, aproximada aplicando 'solve' con ecuaciones independientes

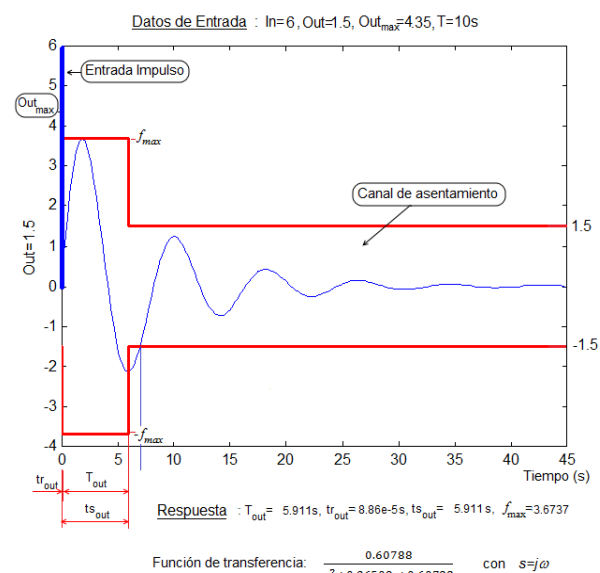


Figura 9: Ejemplo de especificación de sensibilidad con características de respuesta temporal máximas, aproximada aplicando 'fsolve' con ecuaciones independientes

- Respuesta aplicando ‘solve’ con sistema de ecuaciones representada en la Figura 10:
  - Parámetros en frecuencia:  $\omega_h = 0.8498 \text{ rad/s}$  y  $\zeta = 0.14$ .
  - Características de respuesta temporal máximas:
    - $f_{\max}$  de 4.161 que no excede el valor impuesto de 4.35
    - Tiempo de subida calculado de respuesta, 0.3675s, para  $f(t) = 1.5$ . Desviación nula.
    - Tiempo de asentamiento de respuesta, 10.3675s. Para una  $f(t) = \pm 1.5$  se tiene  $T_{\text{out}} = t_{s_{\text{out}}} - t_{r_{\text{out}}} = 10 \text{ s} \leq 10 \text{ s}$ . Desviación elevada, por lo que el  $T_{\text{out}}$  real no coincide.
- Respuesta aplicando ‘fsolve’ con sistema de ecuaciones, representada en la Figura 11:
  - Parámetros en frecuencia:  $\omega_h = 0.7093 \text{ rad/s}$  y  $\zeta = 0.15$ .
  - Características de respuesta temporal máximas:
    - $f_{\max}$  de 3.428 que no excede el valor impuesto de 4.35
    - Tiempo de subida calculado de respuesta, 0.5367s, para  $f(t) = 1.5$ . Desviación correcta.
    - Tiempo de asentamiento calculado de respuesta, 10.5363s. Para una  $f(t) = \pm 1.5$  (canal de asentamiento) el  $t_{s_{\text{out}}}$  obtenido produce un  $T_{\text{out}} = t_{s_{\text{out}}} - t_{r_{\text{out}}} = 9.9996 \text{ s} \leq 10 \text{ s}$ . Desviación media, por lo que el  $T_{\text{out}}$  difiere del real.

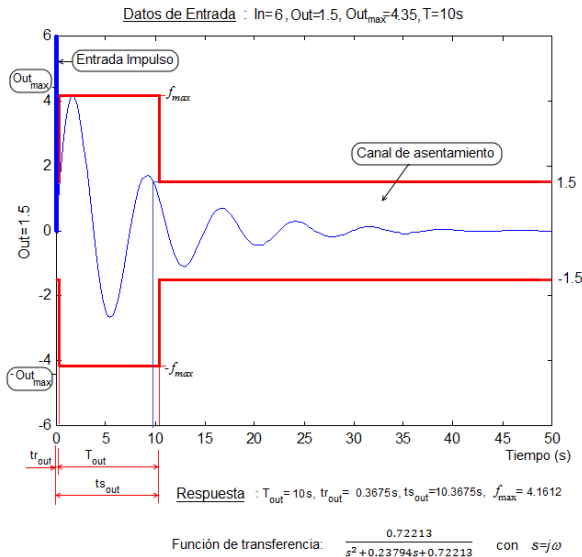


Figura 10: Ejemplo de especificación de sensibilidad con características de respuesta temporal máximas, aproximada aplicando ‘solve’ con sistema de ecuaciones

- d) Observar que con los resultados obtenidos la máxima precisión y resultados finales la da la interpolación inversa, frente a la aplicación de ‘solve’ y ‘fsolve’: comparar las desviaciones indicadas en la Tabla 3 y gráficamente en las Figuras 7 a 11.

## 5. Desarrollo de aplicaciones

El autor ha desarrollado en Matlab (Borghesani et al., 2003) aplicaciones con las que se pueden verificar todos los ejemplos planteados en este artículo y que sirven, además, para el traslado de las principales especificaciones temporales al dominio de la frecuencia ya nombradas.

La carpeta “Specifications Translation” contiene las diferentes técnicas descritas a continuación y, se puede descargar desde la dirección (Translation, 2016).

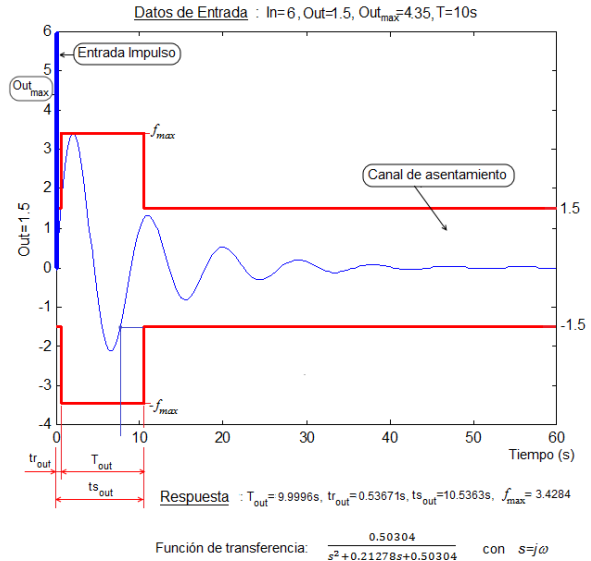


Figura 11: Ejemplo de especificación de sensibilidad con características de respuesta temporal máximas, aproximada aplicando ‘fsolve’ con sistema de ecuaciones

Esta URL proporciona acceso a los programas que hacen referencia a:

- *Seguimiento Límite Superior*. Desde “Temporary Tracking Specifications Conversion to Obtain the Upper Frequency Limit” (aplicación STEPTRAC.M) o desde “Transferencia de especificaciones de seguimiento temporales mediante hipótesis clásicas” (aplicación TD2WD2.M)
- *Seguimiento Límite Inferior*. “Tracking specifications translation from time domain to frequency domain” (Joglar-Alcubilla, 2016)(aplicación TD2WD.M)
- *Sensibilidad genérica*. “Generic Sensitivity Specifications Transfer from Time Domain to Frequency Domain”: la aplicación comienza con el programa ESEN.M
- *Sensibilidad específica*. “Temporary sensitivity specifications conversion to define the specific frequency limit”: la aplicación comienza con el programa ESENSIB.M

## 6. Conclusión

Se han discutido y presentado argumentos suficientes para justificar la importancia de contar con una metodología de traslado de especificaciones temporales al dominio de la frecuencia de carácter preciso, automático y específico para cada tipo de requerimiento. Para ello, una solución es utilizar aproximaciones sucesivas hacia la característica de respuesta temporal buscada (tiempo de subida y/o tiempo de asentamiento), aplicando algún método de interpolación inversa.

Las técnicas específicas para traslado de especificaciones presentadas van a estar basadas en el “método de Newton por diferencias ascendentes y descendentes de 5º orden”, ventajoso en la práctica frente a otros tradicionales para interpolación, como puede ser la polinómica de Lagrange.

Justificada la necesidad de utilizar aproximaciones sucesivas por interpolación en el traslado de especificaciones, lo siguiente es considerar el tipo de función y las características de respuesta temporal a interpolar. La función está relacionada directamente con el tipo de especificación a tratar. Así, para las

especificaciones basadas en respuestas para seguimiento de entradas escalón, como es el caso de los límites de seguimiento inferior y/o superior, la función es del tipo escalón. Para las especificaciones de sensibilidad, tanto genérica como específica, están basadas en respuestas tipo impulso subamortiguado. En cualquier caso, la función será aquella descriptiva de la señal escalón o de la señal impulso, con amortiguamiento subcrítico ( $0 < \zeta < 1$ ) y aproximadas por un sistema de segundo orden.

Se han desarrollado en este manuscrito técnicas independientes, para interpolación de características de respuesta temporal sobre la función escalón y sobre la función impulso, adaptadas al tipo de especificación que se pretende trasladar.

La bondad de cada una de ellas se demuestra con los ejemplos prácticos propuestos y la comparativa de resultados planteada, respecto de la aplicación de las funciones para resolución directa de ecuaciones ‘solve’ y ‘fsolve’ de Matlab.

Por otro lado, las aplicaciones desarrolladas para cada tipo de especificación son ofrecidas con acceso libre por el autor, desde la dirección URL indicada en la sección anterior.

## English Summary

**Inverse interpolation applied to temporal transient response characteristics to parameters of the typical second order transfer function.**

## Abstract

In order to obtain a method of temporary specification translation to the frequency domain, which minimizes overdesign and manual iteration in the process of searching for a controller in frequency, it is proposed to use successive approximations automatically, applying any inverse interpolation. In this regard, specific techniques are recommended to obtain specification translation for each type of requirement, based on the “ascending and descending differences Newton method of 5<sup>th</sup> order” due to its practice advantages, compared to other interpolation procedures. For this, it will be used as interpolation functions those describing step signal or pulse signal, with subcritical damping and approached with a second order model.

## Keywords:

Specifications translation, frequency domain, inverse interpolation, quantitative feedback theory, tracking, sensitivity.

## Referencias

Alexandre V., Dormido S., Mellado M., Peran J.R., Perez J.M., Sanz E., 1989. Automática I. Primera edición, ISBN 8436224663, UNED, Madrid, Spain

- Bonnans, J.F., Gilbert, J.C., Lemaréchal, C., Sagastizábal, C.A., 2006. Numerical optimization: Theoretical and practical aspects. Universitext. Berlin: Springer-Verlag. pp. xiv+490. DOI:10.1007/978-3-540-35447-5. ISBN 3-540-35445-X. MR 2265882
- Borghesani, C., Chait, Y., Yaniv, O., 2003. The QFT control desing Toolbox - for use with MATLAB. Terasoft Inc.
- D’Azzo J., Houpis C., 1995. Linear control systems analysis and design: conventional and modern. New York, USA: McGraw-Hill, 4<sup>th</sup> Ed, Cap18.
- Franchek, M.A., Herman, P.A., 1998. Direct connection between time-domain performance and frequency-domain characteristics. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 8(12), pp. 1021-1042.
- Franchek, M.A., Herman, P.A., Nwokah, O.D.I., 1997, “Robust nondiagonal controllers design for uncertain multivariable regulating systems”, J. Dyn Syst-T ASME, 119, pp. 80-85.
- Franchek, M.A., Nwokah, O.D.I., 1995. Robust multivariable control of distillation columns using nondiagonal controller matrix. IMECE, ASME Journal of Dynamic Systems and Control, 57-1, pp. 257-274.
- GARTEUR Action Group FM(AG08), 1997. Robust flight control design challenge. Problem formulation and manual: the research civil aircraft model (RCAM), GARTEUR/TP-088-3.
- Gil-Martínez M., 2008. Síntesis de controladores robustos mediante el análisis de la compatibilidad de especificaciones e incertidumbre. Ph.D. thesis, Universidad de la Rioja, Spain.
- Horowitz, I. M., Sidi, M., 1972. Synthesis of feedback systems with large plant ignorance for prescribed time domain tolerances. International Journal of Control, 16, pp. 287-309
- Houpis, C. H., Rasmussen, S. J., 1999. Quantitative Feedback Theory: fundamentals and applications. Marcel Dekker Inc, New York.
- Iyengar S.R.K., 2008. Numerical methods and computation. Interpolation and approximation. Lecture N° 28. Dep. of Mathematics, Indian Institute of Technology, Delhi.
- Jayasuriya, S., Franchek, M.A., 1991. Frequency domain design for maximal rejection of persistent bounded disturbances. J. Dyn Syst-T ASME, 113(2), pp. 195-205.
- Joglar, J., Aranda, J., 2014. QFT multivariable control for the longitudinal dynamics of an air vehicle. The 9<sup>th</sup> International Conference on Electrical and Control Technologies, ECT2014, Lithuania, pp. 30-35.
- Joglar-Alcubilla J., 2015. Contribución al estudio de diseño de sistemas de control mediante QFT: aplicaciones al diseño de sistemas de control de vuelo y navegación. Ph.D. thesis, ETSI Informática, UNED. Spain.
- Joglar-Alcubilla J., 2016. Generic tracking specifications translation from time domain to frequency domain. *ArXiv:1601.00346 [cs.SY]*.
- Krishnan, K.R., Cruickshanks, A., 1977. Frequency-domain design of feedback systems for specified insensitivity of time-domain response to parameter variation. International Journal of Control, 25(4), pp. 609-620.
- Kobylarz T., Horowitz I.M., Houpis C.H., 1992. Flight controller design for uncertain and nonlinear plants with pilot compensation. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2(3), pp. 183-209.
- Mateos-Aparicio Morales G., 2010. Métodos de interpolación y ajuste. Elementos de matemática actuarial. UCM, ISBN 9788493811204, Madrid. [www.ucm.es/info/sevipres/P4/01/ANEXOS01.php](http://www.ucm.es/info/sevipres/P4/01/ANEXOS01.php)
- Nataraj, P.S.V., 2002. Computation of QFT bounds for robust tracking specifications. Automática 38, pp 327-334.
- Ogata, K., 1993. Ingeniería de control moderna. Prentice Hall.
- Translation, 2016. <http://es.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/59068-specifications-translation>
- Wu S.F., Grimble M.J., Breslin S.G., 1998. Introduction to quantitative feedback theory for lateral robust flight control systems design. Control Engineering Practice 6, pp. 805-828
- Yaniv O., 1999. Quantitative feedback design of linear and nonlinear control systems. Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts.