

# Una Revisión de Técnicas de Optimización Heurística para el Diseño de Trayectorias Interplanetarias en Misiones Espaciales

F. Alonso Zotes<sup>a</sup>, M. Santos Peñas<sup>b,\*</sup>

<sup>a</sup>Flight Dynamics Software Consultant, Terma GmbH, Europaplatz 5, 64293, Darmstadt, Alemania.

<sup>b</sup>Departamento de Arquitectura de Computadores y Automática, Universidad Complutense de Madrid, Profesor García Santesteban 9, 28040, Madrid, España.

## Resumen

En este trabajo se presenta la optimización heurística como una metodología que permite automatizar el diseño de las rutas interplanetarias con asistencias gravitacionales para conseguir una mayor rentabilidad, en términos científicos, de las exploraciones espaciales. Se trata de un problema de optimización multiobjetivo donde se busca un compromiso entre la minimización de la masa destinada a combustible y la maximización de la carga útil y científica de la misión aeroespacial. Las técnicas de optimización evolutiva han sido aplicadas con éxito a estos problemas de diseño de trayectorias complejas. Se incluye una revisión de algunas de las principales técnicas de optimización heurística que se han utilizado en el ámbito aeroespacial: GA (*Genetic Algorithms*), PSO (*Particle Swarm Optimization*) y MOPSO (*Multiobjective particle swarm optimization*), en concreto para el diseño de misiones de exploración interplanetaria con asistencias gravitacionales, realizadas por numerosos autores. Finalmente se presenta a modo de ejemplo una aplicación concreta de optimización multiobjetivo mediante MOPSO para determinar una trayectoria interplanetaria desde la Tierra con asistencias al cinturón de Kuiper.

## Palabras Clave:

Optimización heurística; trayectorias interplanetarias; asistencias gravitacionales; aplicaciones aeroespaciales, GA; PSO; MOPSO.

## 1. Introducción

La exploración del espacio requiere el empleo de naves espaciales y la realización de una serie de misiones en cuyo diseño debe alcanzarse un equilibrio entre la lejanía de la misión y el objetivo científico que se persigue con ese experimento. Es importante optimizar los recursos para avalar la rentabilidad de la inversión en este ámbito.

En concreto, debido a la limitación en masa (peso) de estas naves, es necesario encontrar un compromiso entre la carga útil o *payload*, y la cantidad de movimiento que se puede alcanzar o delta-V, que permitirá alcanzar objetivos lejanos. Es decir maximizar la distancia pero minimizando el combustible para que la carga útil sea lo mayor posible.

La carga útil consiste en sensores, antenas y demás elementos que permiten tomar datos en el punto o puntos de destino de la misión espacial. El delta-V necesario para propulsar la aeronave en el espacio depende del sistema de propulsión. Dada la limitación de masa, cada aeronave debe ser diseñada según el propósito de la misión y, en particular, las misiones más lejanas

verán reducida su carga útil (y con ello, la capacidad de aprovechamiento de su misión) debido a la necesidad de más combustible.

Estas restricciones podrían paliarse o evitarse utilizando sistemas de propulsión que consuman poco o ningún combustible. Tal es el caso de motores de plasma o velas solares que, aun teniendo un delta-V muy bajo para cortos espacios de tiempo, poseen un empuje específico  $I_{sp}$  muy alto (o sin gasto de combustible en el caso de las velas), lo que se traduce en un empuje relativamente alto en comparación con la masa de combustible utilizada. Esto es, pueden llevar las misiones a lugares lejanos sin necesidad de grandes gastos de combustible, pudiéndose aprovechar la masa ahorrada en incrementar la carga útil y científica de la misión. Mientras que los sistemas de baja propulsión están comenzando a utilizarse en algunas misiones (Goce), las velas solares sólo se han empleado hasta ahora en alguna misión de demostración (Ikaros).

Otro aspecto fundamental a la hora de diseñar misiones (en adelante Análisis de Misión o *Mission Analysis*, en terminología aeroespacial), es elegir cuidadosamente la ruta u órbitas a seguir desde que se abandona la Tierra hasta que se alcanza el punto de destino. Así, un resultado ampliamente conocido es la posibilidad de alcanzar planetas como Júpiter o Saturno a través de *fly-by* o asistencias gravitacionales (a menudo también llamados *swing-by*) en otros planetas aparentemente no relacionados, como la propia Tierra o Venus.

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: Fernando.Alonso.Zotes@sa.int (F. Alonso), msantos@cm.es (M. Santos)

El objetivo de estas asistencias consiste en hacer que la aeronave sobrevuelo un planeta a una distancia relativamente corta y con una órbita adecuadamente elegida, con el fin de aprovechar la fuerza de la gravedad de ese cuerpo para modificar la trayectoria de la aeronave, normalmente para incrementar su velocidad. Así la misión Galileo de la NASA realizó un *fly-by* en Venus y dos en la Tierra antes de partir definitivamente hacia su objetivo Júpiter; estas maniobras permitieron reducir la cantidad de combustible utilizado, incrementando por consiguiente la carga útil e mejorando la explotación científica de la misión. Y éste no es el único ejemplo: *Voyager 1* (NASA; Júpiter-Saturno para salir del Sistema Solar), *Voyager 2* (NASA; Júpiter-Saturno-Uranio-Neptuno, con el mismo objetivo), *NewHorizons* (NASA; Júpiter para llegar a Plutón), *Cassini* (ESA; Venus-Venus-Tierra-Júpiter para llegar a Saturno), *Rosetta* (ESA; Júpiter para visitar el asteroide 67P, entre otros), y un largo etcétera. El programa *BepiColombo* (ESA) realizará asistencias en la Tierra y Venus para frenar su velocidad y alcanzar Mercurio (ESA, 2016). También se utilizaron asistencias gravitacionales para disminuir la velocidad de *Messenger* (NASA; Tierra, Venus y Venus una segunda vez, para llegar a Mercurio), y *Mariner 10* (NASA; Venus para llegar a Mercurio).

En análisis de misión, pues, existe un amplio consenso sobre la necesidad de realizar *fly-bys* (atendiendo a los ejemplos y referencias citados) que, ante las limitaciones básicas inherentes a toda misión espacial, permitan no obstante alcanzar objetivos lejanos renunciando lo menos posible al retorno científico de la exploración. Pero si bien la necesidad de realizar asistencias gravitacionales es clara, bastante más difícil es diseñar estas misiones de manera sistemática. Tradicionalmente se viene utilizando la experiencia recogida de misiones anteriores o, a lo sumo, se aplican métodos que intentan mejorar diseños de rutas ya probadas, que el equipo de análisis de misión se encarga de encontrar no sin un notable trabajo (Wallace et al., 2011).

Es cierto que a lo largo de las últimas dos décadas se han realizado avances importantes en el diseño automatizado de las “rutas-semilla” (*first guess*) (Pessina, Campagnola, & Vasile, 2003). Así se elabora un primer esbozo funcional de qué camino debería tomar una nueva misión para llegar a su objetivo (lo que se conoce como conocimiento experto). Estas rutas iniciales son posteriormente refinadas de manera convencional (gradientes, propagaciones en paralelo, variaciones pequeñas de los parámetros de diseño). Las técnicas utilizadas pueden servir para converger hacia una ruta localmente óptima, pero no necesariamente la mejor posible.

En este trabajo se presenta la optimización heurística como una alternativa que permite automatizar el diseño de las rutas interplanetarias con asistencias gravitacionales. Tomando en consideración los espacios algebraicos de variables de entrada y salida, se busca un punto de optimización en el espacio de salida, eligiendo los valores adecuados de los parámetros del sistema, para así encontrar un diseño globalmente óptimo de la trayectoria interplanetaria. Se trata además de un problema de optimización multiobjetivo, donde se busca un compromiso entre varios factores que intervienen en la misión espacial (combustible, tiempo). Estos avances no han sido sólo debidos al aumento de la capacidad computacional de los ordenadores sino, sobre todo, al desarrollo de la algoritmia correspondiente y, en particular, a la inteligencia artificial. Los métodos heurísticos de optimización buscan fundamentalmente el obtener una “ruta semilla” de la misión, tarea altamente compleja que suele requerir el conocimiento experto de un equipo humano, pero de forma

automática, con la ventaja añadida de emplear la potencia computacional de los ordenadores para los cálculos de las efemérides de los planetas, de la propia ruta a optimizar, de los efectos no keplerianos sobre la trayectoria de la aeronave, etcétera. Esta automatización de la tarea de optimización permite un ahorro considerable de tiempo en el análisis de misión, si bien sus resultados no terminan en la “ruta semilla” obtenida sino que pueden aplicarse optimizaciones sucesivas hasta diseñar la misión casi al completo. No obstante la intervención humana no es del todo prescindible.

En este artículo se recoge además una revisión de algunas de las técnicas de optimización heurística que se han aplicado en el ámbito aeroespacial, en concreto para el diseño de misiones de exploración interplanetaria con asistencias gravitacionales.

La estructura es la siguiente. Tras esta introducción, en la sección 2 se describe el problema a optimizar, es decir, el diseño de una determinada misión interplanetaria. Como parte de esta descripción se hablará de las asistencias gravitacionales, y de los distintos tipos de propulsión o empuje existentes (impulsivo y continuo). En la sección 3 se presentan las técnicas heurísticas de optimización que se han aplicado en este campo. En particular, por el interés que presentan en la literatura consultada y en el estado del arte actual, se analizarán las técnicas siguientes: Algoritmos Genéticos (AG), Evolución Diferencial (ED), Enjambre de Partículas o *Particle Swarm Optimization* (PSO) y el caso multiobjetivo, *Multi-Objective Particle Swarm Optimization* (MOPSO). La sección 4 trata de la optimización heurística de trayectorias interplanetarias con asistencias gravitacionales con las técnicas anteriores. En la sección 5 se muestra un ejemplo detallado de optimización multiobjetivo de una misión al cinturón de Kuiper mediante MOPSO. El artículo termina con las conclusiones.

## 2. Descripción del problema

Cuando se diseña una misión espacial interplanetaria, uno de los principales retos a los que se enfrenta el equipo de Análisis de Misión es determinar la masa total que los lanzadores pueden situar en la trayectoria de escape de la Tierra. En efecto, la capacidad de lanzar aeronaves depende del lanzador utilizado (Ariane, Soyuz, Vega,..., por citar los más conocidos), y de la trayectoria que se pretende alcanzar. Así, una órbita a baja altura requiere menos energía específica (por unidad de masa) que otra a gran altura, y en todo caso una trayectoria de escape requiere más energía que una órbita alrededor de nuestro planeta. Esta mayor energía se consigue mediante el consumo de combustible. Pero cuanto más combustible se gaste, menos masa quedará disponible para la aeronave en sí, dada la limitación total de masa durante el lanzamiento.

Con posterioridad al lanzamiento es necesario realizar maniobras adicionales con los cohetes de la propia aeronave, lo que limita aún más la carga útil de la misma. Esas maniobras tienen por finalidad tanto corregir la trayectoria para que la misión no se desvíe de los objetivos científicos marcados, como el dar a la trayectoria una forma determinada, que no se podría conseguir utilizando la inercia natural obtenida por el lanzador (Alonso and Santos, 2010a), cuando la trayectoria deseada no se reduce a una simple trayectoria cónica respecto a la Tierra o al Sol. Un ejemplo reciente de esto es la misión Rosetta (ESA, 2014), que visitó los asteroides Lutetia y Steins antes de aproximarse al cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko.

## 2.1. Asistencias gravitacionales

En este contexto, dada la gran importancia de maximizar la carga útil en una misión espacial, conviene desarrollar todas las estrategias posibles que permitan reducir la carga de combustible. En ese sentido la mayor aportación para el diseño de trayectorias interplanetarias procede de las asistencias gravitacionales.

Una asistencia gravitacional o *fly-by* (Minovitch, 1961) consiste en aproximar la aeronave a un planeta para acelerarlo con su fuerza gravitacional, y a continuación abandonar sus proximidades con una energía cinética diferente (normalmente mayor).

Esta aproximación o encuentro puede modelarse como un evento puntual en el que la velocidad cambia instantáneamente. La energía potencial de la aeronave respecto al Sol no habrá cambiado. En cambio, como se puede ver al analizar las velocidades relativas del planeta y de la aeronave (Figura 1), la velocidad de la nave espacial sí cambiará.

La aeronave describe una trayectoria hiperbólica respecto al planeta, por lo que el módulo de las velocidades relativas en el acercamiento y en el alejamiento es prácticamente idéntico. Pero la dirección de la velocidad de la aeronave respecto al Sol habrá cambiado, lo cual, combinado con la velocidad del planeta da lugar a una variación de la velocidad de la aeronave respecto al Sol también en módulo (Alonso and Santos, 2010b).

Es decir, como se muestra en la Figura 1, la nave se aproxima al planeta con velocidad  $v_a$  respecto al sistema de referencia heliocéntrico, y con velocidad  $v_{\infty,a}$  respecto al planeta donde se va realizar la asistencia (en la figura, Marte). Cuando parte del planeta, la velocidad de la nave aeroespacial es ahora  $v_b$ , y con respecto al planeta,  $v_{\infty,b}$ . Como la trayectoria de la nave respecto al planeta es hiperbólica, los módulos de  $v_{\infty,a}$  y  $v_{\infty,b}$  deberían ser iguales, con valor  $v_\infty$ .

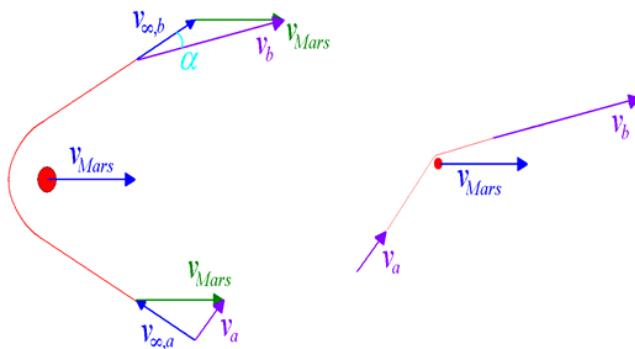


Figura 1: Esquema de *fly-by* o asistencia gravitacional.

Puede explicarse el cambio de la energía cinética de la aeronave como un intercambio con la energía cinética del planeta, cuya trayectoria también cambia pero imperceptiblemente como consecuencia de su enorme masa en relación a la nave.

En la mayoría de los casos los *fly-bys* se utilizan para acelerar las aeronaves pero también pueden utilizarse para frenar, como en el caso de la misión Bepi-Colombo (ESA, 2016).

Al acelerar o frenar aeronaves sin consumir energía mediante estas asistencias gravitacionales, el ahorro de combustible es considerable y puede equivaler a varias decenas de metros por segundo en términos de delta-V.

## 2.2. Sistemas de propulsión

Al margen de los *fly-bys* conviene considerar en el diseño de trayectorias la importancia de los sistemas de propulsión.

La propulsión más tradicional consiste en emplear cohetes de gran empuje (Hill and Peterson, 1992) que, encendidos en ciertos puntos de la trayectoria espacial, producen un cambio en la misma. En comparación con la longitud de la trayectoria y con la duración de la misión se puede considerar que estos sistemas de propulsión proporcionan maniobras impulsivas y que, por lo tanto, pueden ser modelados como cambios instantáneos de la velocidad. Esta aproximación es válida dado que la duración típica de una de estas maniobras casi nunca supera los 30-100 minutos de duración. No sorprende, pues, que más que de fuerza se hable de impulsos o delta-V, y que estas maniobras se midan normalmente en unidades de velocidad (m/s, según lo habitual) en vez de aceleración. Los combustibles tradicionalmente empleados para esta clase de propulsión utilizan una reacción con oxidante (Schneider *et al.*, 2008), siendo la hidracina el combustible principalmente usado para este fin.

En los últimos años, no obstante, se han desarrollado nuevos sistemas de propulsión en los que se produce un empuje mucho más bajo que en los sistemas impulsivos pero durante un tiempo mucho mayor, a veces durante la mayor parte de la misión (Choueiri, 2009). Tal es el caso de los sistemas de propulsión eléctrica, en los que el empuje se produce por un flujo de radiación continuado. La masa del plasma expulsado es prácticamente nula, siendo esta menor masa una gran ventaja por permitir incrementar la carga útil de la misión.

El impulso específico  $I_{sp}$  de un sistema de propulsión se define como el delta-V que es capaz de proporcionar por unidad de peso de combustible utilizado (definiendo el peso de dicho combustible como si se midiera en la superficie terrestre). Los sistemas impulsivos consumen una cierta masa de combustible para producir un gran empuje. Los sistemas de propulsión continuos, si bien proporcionan un empuje menor por unidad de tiempo, lo hacen a costa de una masa de combustible prácticamente nula, y además su empuje específico total es mayor.

Por lo tanto, hay un amplio interés en la comunidad científica en el análisis y optimización de trayectorias interplanetarias obtenidas a partir de sistemas de propulsión *low-thrust*, así llamadas porque la propulsión o empuje de los cohetes es muy bajo, pero con la ventaja de un  $I_{sp}$  alto, por lo que la masa de combustible es pequeña o casi inexistente.

Aunque el empleo de los sistemas de propulsión continua ha sido escaso hasta la fecha, su utilización se está incrementando en aquellas misiones donde es factible. Se trata, fundamentalmente, de sistemas basados en un flujo de plasma ionizado que, expulsado a velocidades casi lumínicas, permiten un empuje continuado durante largos períodos de tiempo a un coste bajo o nulo en términos de masa (obviamente la masa de los iones expulsados es irrelevante). Un ejemplo paradigmático de esta clase de misiones es GOCE, de la ESA (Wallace *et al.*, 2011), que ostentando el récord de ser el satélite artificial en la órbita más baja de la historia (al menos para una misión científica), conseguía mantener su trayectoria circular a unos doscientos kilómetros de altura gracias al tenue empuje de sus motores eléctricos (otro nombre, algo ambiguo, para la propulsión iónica). Estos proporcionaron durante casi dos años un empuje similar al peso de una hoja de papel, suficiente para compensar el *drag* o rozamiento con el aire a esa altura. Pero aunque prometedor, este

enfoque *low-thrust* está todavía en un estado incipiente en cuanto a su aplicación a trayectorias interplanetarias.

En el mismo grupo de la propulsión continua se pueden incluir las hipotéticas misiones basadas en velas solares, en las que se aprovecha la presión lumínica de la radiación solar sobre una superficie de grandes dimensiones (la vela propiamente dicha) con el fin de conseguir un cierto empuje. Esta clase de misiones, aunque estudiadas sobre el papel (Johnson *et al.*, 2010), se han llevado a la práctica en muy contadas ocasiones, de la que es un ejemplo la misión Ikaros (JAXA, 2016).

Las ventajas de la propulsión continua son grandes pero su empleo obliga a diseñar trayectorias que eviten las maniobras impulsivas. Tales trayectorias, sin embargo, permiten cambios rápidos de velocidad si se utilizan asistencias gravitacionales, lo que sí ocurre con las trayectorias de los más habituales sistemas impulsivos de propulsión, que siguen siendo los más utilizados en las misiones interplanetarias.

### 3. Técnicas de optimización heurística en aplicaciones aeroespaciales

En este artículo nos centraremos en algunas de las técnicas heurísticas evolutivas más utilizadas: algoritmos genéticos (AG), evolución diferencial (ED), y en optimización por enjambres de partículas (*Particle Swarm Optimization*, PSO). De ésta última existen además algunos trabajos interesantes aplicados a la resolución de problemas multiobjetivo (*Multi-Objective Particle Swarm Optimization*, MOPSO) (Reyes-Sierra and Coello, 2006).

Dado un problema a optimizar, con unas variables de entrada y una o más variables de salida, el objetivo sería combinar aquellos valores de las variables de entrada que permiten optimizar (ya sea maximizar o minimizar) la variable o variables de salida. En cualquier caso la optimización heurística requiere un cierto conocimiento del sistema a tratar.

Para explicar esto mejor veamos un ejemplo. Supongamos que queremos optimizar el diseño de una misión interplanetaria como en Alonso and Santos (2010b). La masa de combustible y el momento del lanzamiento son las dos variables de entrada. La variable de salida es el tiempo de la misión. El objetivo es encontrar los valores de cantidad de combustible y el instante temporal del lanzamiento más adecuado para minimizar el tiempo de la misión. En este caso el éxito de la misión se asocia a la menor duración de la trayectoria para alcanzar el destino (mayor velocidad).

Este concepto de éxito se vuelve un tanto menos intuitivo si se utiliza optimización multiobjetivo, en cuyo caso se generan los llamados frentes de Pareto (*Pareto-fronts*) que permiten analizar distintas soluciones de compromiso. Es decir, estas soluciones satisfacen más de un requerimiento, pero una mejora en un aspecto de la solución repercutirá negativamente en otro. Un ejemplo de frentes de Pareto puede encontrarse en Alonso and Santos (2010d), donde las mejores combinaciones de las variables de salida (delta-V y tiempo de misión) tienen por objetivo maximizar aquélla y minimizar ésta simultáneamente.

Las técnicas heurísticas mencionadas tienen en común la codificación de las variables de entrada y salida en lo que se denominan individuos, formados por cromosomas o coordenadas (cada una de las variables), que a su vez están formados por genes (valores de la solución). Un individuo o posible solución puede representarse como un vector  $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (1)$$

donde  $x_i$  representa el valor de la variable  $i$ . Cada uno de los valores  $x_i$  sería un cromosoma de ese individuo (caso de los AGs o DEs), o una de las coordenadas de posición del individuo (caso de los PSOs y MOPSOs, donde los individuos también se denominan partículas). La variable o variables de salida dependen de los valores de entrada, lo que en el caso de problemas de salida univariable puede expresarse como:

$$y = f(\bar{x}) \quad (2)$$

Es decir, el valor  $y$  es el resultado de aplicar el vector  $\bar{x}$  de entrada. Esta variable  $y$  se utiliza (directa o indirectamente a través de alguna función o transformación) como una medida del éxito de cada individuo (función *fitness* o de bondad), de manera que los individuos mejores en cuanto a esa función criterio se cruzan entre sí (AG), o se convierten en líderes del resto de individuos (PSO), o se convierten en vectores objetivo (DE).

Volviendo al ejemplo anterior, dada una masa de combustible, digamos, de 100 kg, y una época de lanzamiento igual a 1000 en MJD2000 (definido como número de días desde el 1 de enero del 2000 a las 00:00:00 horas), ese individuo sería la combinación o vector (100,1000), donde el 100 y el 1000 son los valores iniciales de las variables de entrada (cromosomas o coordenadas de posición), o podrían ser (150,1200) o (125,1300), etc. A estas entradas les corresponde una cierta variable de salida. Así se conformaría una población inicial de individuos con los que el optimizador realizará una serie de operaciones, encaminadas a mejorar los individuos de esa población a lo largo de su evolución durante generaciones.

En el caso de que haya más de una variable de salida, cada una de estas variables,  $y_i$ , dependerán del vector  $\bar{x}$ . Considerando las variables de salida como un vector, podemos escribir:

$$\bar{y} = [f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x})] \quad (3)$$

En el caso de problemas de optimización simultánea de varias variables de salida, es habitual combinar éstas en una única función, por ejemplo mediante una combinación lineal de las mismas, y optimizar como si se tratara de un problema de una sola variable. Otra opción, formalmente más correcta y útil, aunque conceptual y computacionalmente más compleja, es utilizar frentes de Pareto (Fonseca and Fleming, 1998). Un frente de Pareto puede definirse como un conjunto de soluciones tal que, tomada una solución cualquiera del frente de Pareto, sus correspondientes salidas no pueden ser mejoradas todas ellas simultáneamente por ninguna otra solución. O, expresado en forma matemática, los frentes de Pareto cumplen la condición de que, elegido el vector de salida  $\bar{y}_P$  de una solución  $P$  perteneciente al frente de Pareto, y dado un vector de salida  $\bar{y}_A$  de cualquier otra solución  $A$  perteneciente o no al frente de Pareto, se cumple para al menos una de las componentes de  $\bar{y}_A$  e  $\bar{y}_P$  que:

$$y_{A,i} \leq y_{P,i} \quad \forall i \quad (4)$$

Es decir, la solución  $P$  mejora a cualquier otra solución en al menos una de sus cualidades. Cabe hacerse notar que el empleo de la desigualdad y la igualdad estricta debe utilizarse con propiedad y sin perder de vista el significado conceptual de lo que es un frente de Pareto, y en particular se consideraría que  $P$  está en el frente de Pareto sólo si la desigualdad se cumple para al menos alguna de las componentes del vector  $\bar{y}_P$ , pues en caso contrario (si no se cumpliera nunca la desigualdad),  $P$  no estaría en el frente.

Una definición “negativa”, equivalente a la anterior, es que una solución  $Q$  no pertenece al frente de Pareto si y sólo si, para alguna otra solución  $A$ , se cumple para todas las componentes de  $\bar{y}_A$  y  $\bar{y}_Q$  que:

$$y_{A,i} \geq y_{Q,i} \quad \forall i \quad (5)$$

Es decir, la solución  $Q$  no mejora ninguna de las cualidades de alguna otra solución posible, donde el símbolo de la desigualdad e igualdad se utilizan ahora de manera formalmente correcta. Un ejemplo de frente de Pareto en dos dimensiones se muestra en la Figura 2, para un problema de maximización de dos variables de salida, donde las soluciones del frente (círculos rojos) superan a todas las demás soluciones (cuadrados azules) en al menos una de las dos variables consideradas.

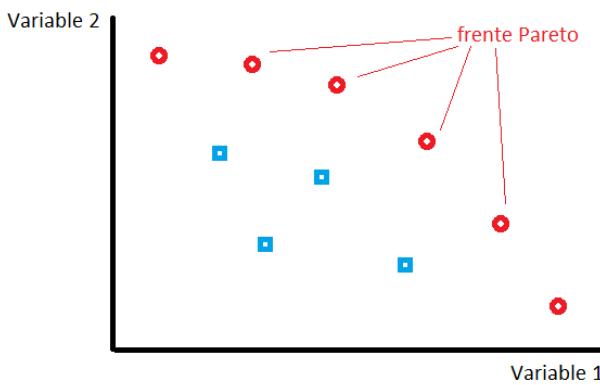


Figura 2: Ejemplo de frente de Pareto en dos dimensiones.

Estas fórmulas referidas a problemas de maximización se pueden aplicar, sin pérdida de generalidad, para minimizar una o más variables de salida (incluso unas variables podrían ser maximizadas y otras minimizadas, adaptándose la definición concreta del frente de Pareto para cada problema). Para más información sobre frentes de Pareto, los artículos de Zitzler, Thiele and Deb (2010), Li (2004) y más recientemente Deb (2014) aportan recopilaciones de la literatura especializada.

Para mantener la población de individuos en números razonables hay diversidad de técnicas que permiten eliminar soluciones e incorporar otras nuevas. Por su propia naturaleza esto no suele ser un problema en el caso de PSO y MOPSO. Para AG y DE, por lo general, se suelen descartar las peores soluciones y mantener las mejores, con el riesgo de perder diversidad en la población de posibles soluciones, especialmente si se trata de problemas con gran número de extremos locales (Goldberg, 1989).

Cabe señalar que en los problemas de optimización la manera de operar sobre cada individuo  $\bar{x}$  no depende directamente tanto de la naturaleza del problema (que no obstante puede influir a la

hora de elegir un método de optimización u otro) como del tipo de algoritmo de optimización heurística seleccionado o de las condiciones de contorno. Estas suelen ser restricciones del tipo de límites impuestos a los valores de las variables de entrada y salida, como el valor máximo de la masa de combustible, o cierto valor mínimo ya que la masa es necesariamente positiva, etc.

A continuación se presentan brevemente estos métodos heurísticos de optimización.

### 3.1. Algoritmos genéticos

Esta conocida técnica evolutiva parte de la codificación de las posibles soluciones de un problema como una combinación de números, normalmente en binario (aunque existen codificaciones distintas) (Goldberg, 1989; Marín, García, and Sandoval, 1992). Estas cadenas de bits representan a los individuos, que engloban cromosomas o sub-cadenas de bits correspondientes a cada variable. Es también común hablar de genes refiriéndose a cada valor (o mínima unidad de información) de la cadena que codifica al individuo. Una vez codificadas las posibles soluciones se inicializan de forma aleatoria para generar la población inicial.

En general, en un algoritmo genético se va generando una población  $P(i)=\{x_1, \dots, x_N\}^i$  de  $N$  individuos cada iteración  $i$ . Estos individuos  $x_n^i$ , que representan posibles soluciones del problema, son evaluados mediante la función criterio o *fitness*, para generar una nueva población  $P(i+1)$ , seleccionando de entre ellos los mejores. Algunos de los individuos sufren transformaciones mediante la aplicación de operadores genéticos, para obtener nuevos individuos. Las más habituales son transformaciones unarias, como la mutación,  $m_j$ , que crea nuevos genotipos introduciendo pequeños cambios en un individuo,  $m_j: S \rightarrow S$ , y otras de orden más alto, como el cruce,  $c_k$ , que crea nuevos individuos combinando partes de varios genotipos, es decir,  $c_k: S \times \dots \times S \rightarrow S$ . Tras un número suficientemente alto de iteraciones y/o de ejecuciones con distintas semillas el algoritmo, si está bien configurado y con parámetros adecuados, suele converger y los mejores individuos obtenidos representan una solución razonablemente cercana al óptimo.

Las dos operaciones comentadas (cruce y mutación) se ilustran en Figura 3. Mediante el cruce se combinan sectores de individuos (Figura 3, izquierda, dos individuos en amarillo y verde) para formas nuevas soluciones con partes de los dos progenitores. Este operador tiende a beneficiar la generación de individuos con buenos resultados, y a discriminar aquellos otros peores según la función criterio. De la nueva población generada por los cruces se seleccionan los mejores individuos, para intentar conseguir la convergencia hacia una solución cercana a la óptima.

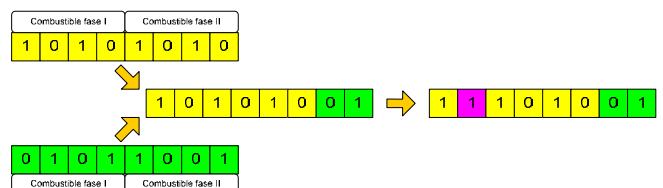


Figura 3: Operadores en algoritmos genéticos.

Para mejorar la eficiencia del algoritmo es necesaria una cierta aleatoriedad que se provee con el operador mutación, y que consiste en cambiar aleatoriamente un valor o gen de algunos individuos. En la figura 3 se muestra un ejemplo de una mutación

de un bit binario que pasa de 0 a 1 (en magenta). En Alonso and Santos (2008) se utiliza una mutación variable, cuyo valor se reduce para favorecer los cruces cuando la diversificación de los individuos es amplia, y se incrementa para aumentar la aleatoriedad cuando la homogeneidad de las soluciones es grande.

### 3.2. Enjambre de Partículas o Particle Swarm Optimisation

Esta técnica (Eberhart and Shi, 1998; Hu and Eberhart, 2002; Kennedy and Eberhart, 2001) considera las variables de entrada como individuos o partículas de un enjambre. Sus valores se interpretan como si fueran coordenadas de posición en un espacio de múltiples dimensiones. Según los resultados aportados por los individuos, y a veces según ciertas agrupaciones o subgrupos dentro del enjambre, se elige un líder, al cual seguirán los demás individuos (Figura 4). En cada iteración del algoritmo, las coordenadas de posición de las partículas se acercan a las del líder; este cambio de posición se denomina velocidad. En la práctica se traduce en un muestreo y análisis bastante exhaustivo de los caminos entre cada partícula y el líder. Ésta es la idea básica de los algoritmos PSO, si bien hay multitud de variantes.

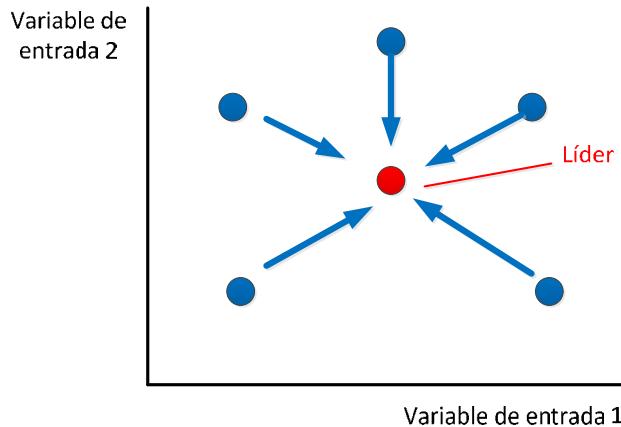


Figura 4: Ejemplo básico de PSO para dos variables de entrada.

Es habitual definir más de un líder, por ejemplo, el mejor individuo de cada cierta zona del espacio de entradas, o según unos ciertos grupos definidos de antemano. La posición de cada líder se pondera según unos criterios. De la selección de estas peculiaridades y estrategias depende la eficiencia y el resultado final de la optimización. Puede haber versiones de esta técnica en las que no haya un líder propiamente dicho, sino un líder virtual resultado de ponderar algunos individuos notables. Como en el caso de los AGs, también es conveniente trabajar con un cierto grado de aleatoriedad, que esta técnica incorpora mediante lo que se denomina turbulencia, cuyo objetivo es cambiar aleatoriamente la posición o la velocidad de algunas partículas.

### 3.3. Evolución diferencial

Dada la gran variedad de algoritmos agrupados bajo esta denominación (Das and Suganthan, 2011), es difícil realizar una descripción genérica de lo que es la evolución diferencial (ED). En general, en la evolución diferencial propiamente dicha se consideran tres de los individuos que componen una población,  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$ , y  $\bar{x}_3$ , elegidos aleatoriamente en el espacio de variables de entrada. Se calcula el vector diferencia entre  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$ , y se re-

escala, obteniéndose  $\bar{x}_d = F(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$ , donde F toma normalmente valores entre 0.4 y 1. Finalmente se toma el vector  $\bar{x}_3$ , habitualmente conocido como vector donante, y se suma al vector  $\bar{x}_d$ , resultando un nuevo vector  $\bar{x}_g = \bar{x}_3 + F(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$ , llamado vector objetivo (Figura 5).

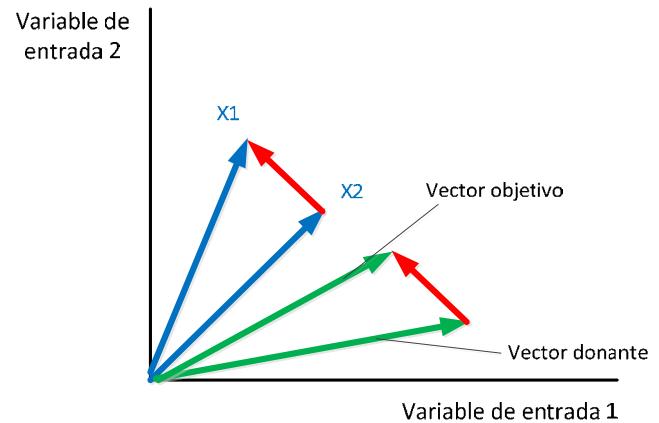


Figura 5: Ejemplo básico de evolución diferencial.

En este caso, al igual que con los AG, para favorecer la diversidad de la población de individuos se puede añadir un elemento de aleatoriedad, o combinar las componentes del vector donante con las del vector objetivo, creándose un nuevo donante por medio del cruce correspondiente. Este cruce consiste en intercambiar componentes entre los mencionados vectores, y a veces también se pueden intercambiar cadenas de bits, como en AGs, lo que sin embargo es mucho menos frecuente en DE.

El nuevo vector donante se convierte en el vector objetivo de la siguiente iteración. Por supuesto en cada iteración este proceso de selección de tres vectores se realiza varias veces.

## 4. Optimización heurística de trayectorias interplanetarias

La utilización de los distintos sistemas de propulsión en trayectorias interplanetarias y su optimización está todavía en estado incipiente de desarrollo, donde resulta prematuro juzgar la influencia o importancia de un trabajo en relación al resto de la comunidad científica del ámbito aeroespacial. Por abordar de una manera sistemática y completa el estado del arte de la aplicación de las técnicas heurísticas de optimización a las misiones interplanetarias, se han agrupado según el tipo de propulsión de las naves espaciales, presentado en la sección 2.2.

Como se comentó, se puede distinguir entre propulsión continua e impulsiva. Esta última ha sido, y todavía sigue siendo, objeto de importantes análisis. Sin embargo, desde hace algo más de una década, los trabajos de optimización parecen centrarse más en los sistemas de propulsión continua, donde la eficiencia podría superar con creces la de la impulsiva, al tiempo que su optimización es un reto mayor al resultar más compleja. Por ello, y por su relativa novedad, ha habido quizás más avances que en la más consolidada optimización de trayectorias con maniobras impulsivas. Sin embargo, unas y otras son importantes y su aplicación depende del tipo de misión.

En la mayoría de los estudios analizados cada problema de optimización se modela como una función objetivo relativamente compleja y, normalmente, con partes numéricas propagadas (esto es, la ejecución de la función requiere una simulación, y no sólo

una evaluación numérica). Esto es lógico teniendo en cuenta la naturaleza de los problemas que se tratan, donde no se conocen fórmulas analíticas que resuelvan la dinámica de más de tres cuerpos en un sistema sometido a un potencial gravitatorio.

#### 4.1. Optimización de maniobras de propulsión continua

Aunque en numerosos casos en el ámbito aeroespacial el problema de Lambert puede resolverse según órbitas keplerianas (aproximación válida cuando la mayor parte de la trayectoria está sometida al potencial gravitatorio de un único cuerpo central), y en algún caso incluso con propulsión continua bajo ciertas condiciones (Izzo *et al.*, 2007), lo normal es tener situaciones sin solución analítica conocida. Esto ocurre, particularmente, cuando la activación de los sistemas de propulsión de manera continua (*low thrust*), así como la activación de cohetes más potentes durante cortos espacios de tiempo (los llamados delta-Vs), obliga a abandonar la asunción de órbitas keplerianas, debiéndose realizar una propagación de la posición y velocidad de la aeronave. No obstante, entre los puntos de aplicación de delta-Vs (DSMs o *Deep Space Manoeuvres*), y en ausencia de empujes continuados en el tiempo, los segmentos entre maniobras pueden considerarse como trayectorias keplerianas, lo que evita la pesada tarea de propagar la órbita, y permite una mayor eficiencia en los algoritmos al poderse resolver los distintos segmentos con el problema de Lambert.

Así, en Vinko and Izzo (2008) se presenta una de dichas funciones a optimizar. El vector de entrada, o vector de decisión, tiene longitud variable y representa la ejecución de maniobras tanto continuas como impulsivas. El valor de salida es el delta-V total empleado durante la misión. Las trayectorias empleadas se inspiran en problemas reales, como *Cassini*, *Rossetta* y *Messenger*, dejándose además abierta la posibilidad de extender su aplicación a otras futuras misiones. Los algoritmos utilizados para las distintas optimizaciones consisten en evolución diferencial, *swarm*, algoritmos genéticos, y *annealing* (Fonseca and Fleming, 1998; Reyes-Sierra and Coello, 2006). El efecto del *annealing* es similar a la variación producida por el operador de mutación en un algoritmo genético: aumentar o disminuir la estabilidad de las soluciones. En el caso de Alonso and Santos (2008), la mutación se utilizaba para reducir la incertidumbre a medida que avanzaba el algoritmo. En Vinko and Izzo (2008), en cambio, se aplica el *simulated annealing* para reducir la volatilidad. Una de las conclusiones extraídas del artículo es que la cooperación entre diferentes algoritmos puede servir para mejorar las soluciones encontradas.

Aunque las técnicas de Análisis de Misión para las exploraciones con *flybys* están relativamente consolidadas para la propulsión química (maniobras impulsivas con alto empuje y bajo Isp), misiones como *Deep Space 1* (NASA, 1998) permiten intuir (y sugieren analizar más en profundidad) el potencial del *low-thrust*, que permitiría aumentar la eficiencia de la propulsión (menor masa destinada a combustible) y reducir el tiempo de vuelo (TOF, *time of flight*). La combinación, pues, de sistemas de propulsión *low-thrust* y asistencias gravitacionales abre muchas posibilidades al campo de la exploración espacial.

En McConaghay *et al.* (2003) se presenta un interesante trabajo centrado en la optimización de trayectorias con asistencias gravitacionales planetarias con el objetivo de incrementar la eficiencia de tales misiones, compensando así el bajo delta-V intrínseco de los sistemas *low-thrust*. Se describe una optimización en dos fases. En la primera se analizan las posibles

trayectorias dentro de un amplio espectro de posibilidades, filtrando el espacio de búsqueda según la forma de las trayectorias, lo que aumenta considerablemente la eficiencia computacional de la segunda fase de la optimización. En ésta las mejores trayectorias ya obtenidas heurísticamente se optimizan de forma más fina con un método basado en gradientes. La idea de la optimización en dos pasos (con un refinamiento posterior a una búsqueda simple) no es nueva, pero los resultados de esta estrategia son bastante prometedores, presentándose misiones que incluyen viajes a Vesta, Tempel 1, Ceres, Júpiter y Plutón. El método descrito permite analizar familias de trayectorias dispares y al mismo tiempo reducir los tiempos de computación para así completar los estudios de manera rápida y eficiente.

Análogamente, en Dachwald (2005.) se presenta un método para buscar el óptimo global a la hora de diseñar trayectorias asumiendo un sistema de propulsión de alto Isp y bajo empuje. Utiliza el software InTrance (*Intelligent Trajectory*), desarrollado por Ohndorf and Dachwald (2010) para analizar trayectorias a un asteroide cercano a la Tierra y a Marte, empleando para ello un regulador neuronal que implementa satisfactoriamente la ley de control de la aeronave. Los parámetros de configuración de este neurocontrolador se optimizan, a su vez, con un algoritmo evolutivo. En su trabajo, para una misión *rendez-vous* a un asteroide cercano, se logra una reducción del 74 % del tiempo de llegada respecto al ejemplo presentado en Whitley *et al.* (1994), lo que constituye, por cierto, una relativa rareza ya que, por lo general, el objetivo a optimizar de una misión científica no es tanto el tiempo como la capacidad científica de la misión, es decir, la minimización del combustible. No es tan extraño, sin embargo, que éste sea el objetivo a optimizar teniendo en cuenta que al utilizar un sistema de propulsión continuo, el alto valor del Isp pero bajo delta-V obliga a realizar un empuje o *thrust* prácticamente sin interrupciones durante toda la vida de la misión, a cambio de la muy notable ventaja de gastar poca masa de combustible (como es la inapreciable masa de los iones expulsados, en el caso de un motor de plasma ionizado). En estas condiciones la optimización del combustible, más allá de la elección del sistema de propulsión, carece de relevancia.

El software InTrance puede ejecutarse sin necesidad de “rutas-semilla”, por lo que las rutas calculadas podrían utilizarse como punto de partida de otros métodos de optimización.

No menos interesantes que los anteriores, aunque quizás más novedosos, son los estudios sobre velas solares como la empleada en la misión de demostración Ikaros (JAXA, 2016). No se trata de un sistema de propulsión propiamente dicho, o al menos, no de un sistema activo. La propulsión se consigue mediante una gran superficie en la que la luz solar ejerce una presión lumínica. Este momento lineal de inercia puede aprovecharse para ejercer un empuje continuo. En el estado del arte de la optimización de sistemas de propulsión continua, los estudios sobre velas solares son lo más vanguardista. Trabajos relacionados con esta materia, presentados en Glasgow en el Third International Symposium on Solar Sailing, junio de 2013, pueden encontrarse en el recopilatorio de Macdonald (2014), con contribuciones de autores de NASA, JAXA, ESA y DLR.

A pesar de la limitación obvia de los sistemas de propulsión continua en cuanto a cambios de dirección, los resultados de Izzo (2010) e Izzo (2006), y las conclusiones del mencionado simposio, sugieren la viabilidad de esta clase de misiones en ciertas circunstancias como las que se describen en los artículos. Teniendo en cuenta la muy baja propulsión que puede ofrecer una vela solar, los resultados son muy interesantes y prometedores,

aunque por supuesto su combinación con los sistemas activos de propulsión continua e impulsiva será siempre inevitable.

#### 4.1.1. Propulsión continua y asistencias gravitacionales

A la vista de los resultados obtenidos cabe esperar amplios beneficios de la combinación del *low-thrust* con las asistencias gravitacionales. En Petropoulos and Loguski (2004) encontramos otro método de optimización orientado a la identificación de trayectorias potencialmente útiles (más que a maniobras concretas). Como en McConaghy *et al.* (2003), citado anteriormente, se emplean métodos que analizan la forma de las trayectorias o, más concretamente, los arcos de trayectorias entre planetas. Se utiliza un programa llamado STOUR, basado a su vez en el software GALLOP. Las asistencias gravitacionales se modelan como discontinuidades en la velocidad (impulsiones, o delta-Vs), y los arcos de trayectorias se unen en los planetas visitados, que se asumen puntuales en otros estudios pero no en éste, por lo que el operador puede encontrarse con soluciones bastante sofisticadas y refinadas (aunque posteriores refinamientos son, por supuesto, aconsejables).

Efectivamente, las asunciones de órbitas keplerianas sin maniobras y, sobre todo, planetas puntuales donde el *fly-by* se modela como un delta-V puntual, son habituales en Análisis de Misión, y su abandono requiere mayor coste computacional. Ésta es, de hecho, la mayor dificultad mostrada en Zhu *et al.* (2012) a la hora de optimizar maniobras continuas, que no se pueden modelar como delta-Vs puntuales. Es decir, en el caso de *low-thrust*, a diferencia de la propulsión química, los arcos de trayectoria rara vez son keplerianos debido al empuje iónico continuo (o en su caso, debido a la presión lumínica del Sol sobre las velas solares), forzándose el abandono de cualquier técnica basada en el problema de Lambert. Por lo tanto tiene un gran mérito el estudio realizado por el algoritmo incluido en STOUR, que permite analizar un área amplia del espacio de variables de entrada, descartando trayectorias rápidamente si su forma no se ajusta a ciertos modelos definidos en base a la experiencia del operador humano. La definición de la trayectoria semilla inicial de STOUR puede omitirse (como en InTrace), de manera que ésta es propuesta por el algoritmo, que habitualmente está orientado a trayectorias sinusoidales exponenciales. Este tipo de trayectorias a menudo se identifica con el ejemplo típico de una aeronave sometida a la presión de una vela solar (esto es, un empuje radial respecto al cuerpo central origen del potencial gravitatorio).

En Izzo (2011) se propone una descripción formal de los problemas de optimización de trayectorias interplanetarias utilizando varias asistencias gravitacionales. En concreto se presenta un algoritmo determinista que, fundamentalmente, descarta automáticamente un amplio número de potenciales soluciones, reduciendo de manera drástica la complejidad de optimizaciones posteriores y facilitando la convergencia hacia el óptimo global. Dada la naturaleza de este algoritmo no es posible utilizarlo en solitario para obtener óptimos, sino para aumentar la eficiencia de otros algoritmos. La formalización analizada lleva a plantear los problemas de múltiples asistencias gravitacionales como si el espacio de variables de entrada consistiera en dos espacios bidimensionales en cascada, de ahí la posibilidad de reducir el área de análisis en varios órdenes de magnitud.

Comparando Izzo *et al.* (2007) con el ya comentado Petropoulos and Loguski (2004) se llega al mismo tipo de trayectoria sinusoidal exponencial con una propulsión tangencial,

por tanto verdaderamente *low-thrust* (entendiéndose verdadera en el sentido de que contiene un sistema de propulsión activo, frente a la pasividad de una vela, ofreciéndose un cierto margen de maniobra). Las trayectorias presentadas, Tierra-Marte-Ceres y Tierra-Venus-Tierra-Marte-Júpiter, pueden refinarse posteriormente utilizando métodos directos como los de gradientes. Uno de los inconvenientes de esta estrategia es la determinación posterior del empuje a utilizar, que obliga a una definición de los sistemas iónicos de propulsión, lo que no tiene por qué ser un problema insalvable con el estado de arte actual, siempre y cuando los perfiles de propulsión se mantengan dentro de límites razonables, como se hace en el citado artículo.

Inevitablemente, una optimización posterior es necesaria en estos casos ya que no se obtiene una solución realmente óptima desde el punto de vista de la cantidad de empuje, sino una asignación de un perfil de empuje basada en una estimación inicial. Las trayectorias óptimas se obtienen de manera enteramente automática, salvo refinamientos posteriores, que pueden ser automáticos también. El refinamiento sucesivo, no obstante, parte de una posición muy elaborada y ventajosa ya que el algoritmo de optimización, en un segundo paso, tiene en cuenta el problema de los dos cuerpos al unir los arcos de trayectoria de manera kepleriana, lo que abre la puerta a mejoras posteriores en no menos de un tercer paso susceptible de ser también automatizado (posibles fricciones, no esfericidad, terceros cuerpos...).

En Schütze *et al.* (2009) se realiza un análisis exhaustivo de los problemas de asistencias gravitacionales múltiples, tanto para misiones interplanetarias como para transferencia entre órbitas varias, basados en *low-thrust* y trayectorias sinusoidales exponenciales, lográndose una mayor eficiencia computacional al reducirse el espacio de variables de entrada de la manera descrita en Izzo *et al.* (2007). Se utilizan frentes de Pareto que permiten la categorización de distintos subespacios de entrada y su segmentación en áreas totalmente desconectadas e independientes entre sí. El algoritmo posee complejidad de orden quíntuple respecto al número de *flybys* realizados durante la misión, en línea con otros algoritmos, lo que puede ser un problema no tan grande gracias a la reducción del espacio de entrada, tal y como se analiza con varios ejemplos numéricos presentados en el artículo: Tierra-Venus-Mercurio (no existen en la literatura demasiados ejemplos de esta trayectoria), y Tierra-Venus-Tierra-Júpiter.

Entre los investigadores que analizan trayectorias con múltiples asistencias gravitacionales, como en general en cualquier otro campo relacionado con la optimización de trayectorias, existe un cierto consenso sobre la necesidad de alcanzar un equilibrio entre modelos realistas no excesivamente complejos, y a la vez suficientemente funcionales como para poder ser objeto de optimización por parte de algoritmos heurísticos. Una excesiva simplificación puede llevar a la exclusión de soluciones interesantes y, en ese sentido, en Pascale and Vasile (2006) y en Vasile and Pascale (2006) se realiza un gran esfuerzo en la dirección correcta.

Continuando con estos dos trabajos, en ellos se presenta un análisis global de las soluciones posibles, mostrándose un fuerte carácter modal en su estructura no convexa, lo que puede utilizarse para encontrar soluciones de una manera más eficiente. El algoritmo empleado es original y se basa en un algoritmo evolutivo que ramifica la estrategia de búsqueda de soluciones en el espacio algebraico de parámetros de entrada. Es decir, el espacio inicial de búsqueda se explora con el algoritmo evolutivo y, tras un primer análisis, este espacio se divide según los

resultados ya encontrados de forma determinista. Los subespacios que contienen mejores resultados se analizan de nuevo con el algoritmo evolutivo, y el proceso se repite hasta lograr la convergencia a una solución óptima que se asume como la mejor posible, esto es, un óptimo global.

Este algoritmo híbrido, en parte determinista y en parte heurístico, presenta el inconveniente de no analizar en profundidad todo el espacio de variables de entrada, lo que sin embargo es una ventaja en términos de tiempo computacional si se asume que, tras la primera exploración del algoritmo evolutivo, ya es posible conocer *grossos* modo dónde podrían encontrarse las soluciones óptimas (tal asunción, aunque razonable, no tiene por qué ser cierta siempre).

Este método se ha aplicado a problemas de Análisis de Misión de gran complejidad, y los resultados obtenidos son muy buenos. Por ejemplo, la trayectoria de la misión *Cassini* se ha podido diseñar prácticamente desde cero, a pesar de una cierta laxitud en las restricciones en las variables de entrada. Lo mismo ha ocurrido con la misión *Rosetta*, obteniéndose consumos de delta-V satisfactoriamente equiparables a la misión de referencia. También se presentan los resultados de un problema imaginario en el que, dada la libertad de escoger varias asistencias gravitacionales en distintos planetas, se encuentran soluciones bastante interesantes, alguna de ellas sorprendente. Estos resultados parecen sugerir que el algoritmo propuesto permite optimizar trayectorias con múltiples asistencias gravitacionales, evitando caer en mínimos locales, a un coste computacional relativamente bajo.

En un análisis posterior de Vasile, Minisci, and Locatelli (2010), se analiza la efectividad de varios algoritmos para una serie de problemas de optimización de trayectorias, presentándose además una formalización de la estimación de la eficiencia de los distintos algoritmos utilizados, sugiriéndose una cierta estructura en las soluciones. Los resultados se utilizan para definir un nuevo algoritmo, también basado en heurística evolutiva, esta vez Evolución Diferencial discreta, combinado con la selección determinista de soluciones, cuya convergencia se analiza en detalle.

#### 4.2. Propulsión impulsiva y asistencias gravitacionales

El estudio de maniobras impulsivas y asistencias gravitacionales está declinando en favor del análisis de otras técnicas más modernas, como las velas solares o los sistemas *low thrusts* ya comentados anteriormente. No obstante siguen apareciendo regularmente interesantes estudios sobre el tema. El modelado de las trayectorias, en el caso de maniobras impulsivas, es relativamente sencillo pues en este caso el objeto en movimiento se mueve según un arco de órbita kepleriana, por tanto susceptible de computarse como tal por medio de la resolución del problema de Lambert. Una explicación más detallada sobre la aplicación de Lambert a los arcos de trayectorias en maniobras interplanetarias puede encontrarse en Alonso and Santos (2010c).

Una forma de afrontar el problema es por medio de los modelos de Taylor explicados en Makino (1998). Un ejemplo de su utilización se muestra en Armellin *et al.* (2012) donde, en concreto, se realiza una búsqueda de soluciones al problema de optimizar las transferencias entre planetas utilizando órbitas keplerianas y maniobras impulsivas. La solución se encuentra de manera determinista y no estocástica, a diferencia de otras técnicas más comúnmente utilizadas. Se utiliza la conocida

efemérides del JPL DE405 para evaluar las posiciones y velocidades de los planetas. El consumo, que es la variable a minimizar mediante la optimización, se estima por medio de la solución del problema de Lambert a lo largo de todas las transferencias interplanetarias. Se presentan como ejemplos las trayectorias Tierra-Marte y Tierra-Venus, quizás echándose de menos algún desarrollo para trayectorias un tanto más ambiciosas con múltiples transferencias y *fly-bys*. No obstante los desarrollos de estos autores y los modelos Taylor pueden resultar de interés para resolver cada arco de trayectoria entre planetas.

Otros ejemplos de resolución heurística en la optimización de trayectorias interplanetarias con maniobras impulsivas pueden encontrarse en los trabajos de F. Alonso y M. Santos, algunos ya mencionados en este artículo. En Alonso and Santos (2010c) se utilizan algoritmos genéticos para optimizar la trayectoria de una aeronave minimizando el consumo de combustible, dada la imposibilidad de optimizar trayectorias de manera analítica para esta clase de problemas. El algoritmo evolutivo utilizado incluye una mutación variable que ensancha el espacio de búsqueda cuando disminuye la diversificación de las soluciones. La trayectoria utilizada es Tierra-Marte-Júpiter. En Alonso and Santos (2010b) se muestran resultados utilizando esta técnica de optimización en una misión hasta Saturno partiendo de una órbita baja alrededor de la Tierra (LEO) y con un *fly-by* en Marte, y se comparan los resultados con una maniobra Hohmann directa. En Alonso and Santos (2012) se muestran trayectorias EMS (Tierra-Marte-Saturno) y EVVJS (Tierra-Venus-Venus-Júpiter-Saturno), esta vez optimizadas con algoritmos enjambre o *swarm* (PSO), comparándose con resultados de misiones reales. En Alonso and Santos (2010d) se analiza una hipotética misión al cinturón de Kuiper, optimizada por medio de técnicas multiobjetivo (MOPSO), utilizando frentes de Pareto para reducir el tiempo de vuelo o misión total, y el consumo requerido. Esta misión se analiza en este artículo, a modo de ejemplo, en la sección 5. La estrategia seguida se basa en maniobras impulsivas que se convierten posteriormente en maniobras continuas. Se consiguen interesantes combinaciones que reducen el tiempo de vuelo considerablemente.

En Kloster, Petropoulos, and Longuski (2011) se presenta una misión en las cercanías de Europa, que incluye asistencias gravitacionales en varios satélites de Júpiter. El interés de Europa reside fundamentalmente en el océano de agua encontrado durante la misión Galileo al final de los años 90. El tamaño de Júpiter y la multitud de satélites de este planeta permite realizar una cierta analogía entre el llamado sistema “joviano” y el sistema solar. Según el estudio presentado en el artículo, la gravedad de Io se podría emplear para capturar la aeronave alrededor de Júpiter, lográndose un ahorro de delta-V de unos 300 m/s respecto a otras estrategias basadas en Ganimedes, y que suelen ser más habituales. Se utilizan diagramas de Tisserand con el fin de analizar la acumulación de radiación. El tiempo final conseguido es mayor de lo habitual en esta clase de misiones, si bien este tiempo puede emplearse en observaciones científicas, y en todo caso el consumo, que es lo más importante, se reduce drásticamente, siendo una opción muy atractiva para un futuro “Europa Orbiter”.

Un artículo algo más académico, pero también relacionado con los satélites de Júpiter, puede encontrarse en Izzo *et al.* (2013), basado en una competición y con resultados factibles. Más en la línea del análisis joviano mostrado en Kloster, Petropoulos, and Longuski (2011) encontramos en Campagnola, Buffington, and Petropoulos (2014) un trabajo similar, en el cual se analizan con

gran detalle los resultados de otros estudios alrededor de Júpiter, presentándose una propuesta propia. Se presentan más trayectorias jovianas en Lynam (2014a), incluyendo triples asistencias para capturar aeronaves alrededor de Júpiter, o para modificar órbitas ya existentes. No existe resonancia de Laplace entre Calisto y las otras tres lunas jovianas (Calisto, Ganimedes e Io), por lo que es necesario realizar un análisis que computacionalmente puede ser caro. En Lynam (2015) se propone disminuir el coste computacional acotando el número de soluciones de Lambert a analizar mediante un algoritmo heurístico, que consigue reducir el espacio de búsqueda en un 99%. Para ello realiza un análisis de la fase o posición en la órbita, utilizando además ciertas restricciones geométricas para plantear ecuaciones analíticas que modelarían las asistencias gravitacionales cuando ocurren en rápida sucesión. Aunque el artículo de Lynam se centra en Calisto, Ganimedes e Io, el método se puede aplicar para cualquier otra combinación de satélites jovianos, o incluso en los menos masivos satélites Titania, Oberon, Umbriel y Ariel, alrededor de Urano; esta masa inferior, no obstante, dificultaría el diseño de la misión correspondiente. Urano y sus satélites, obviamente, no tienen las condiciones de Júpiter y el sistema joviano.

En Lynam (2014b) se continúa el estudio de posibles *flybys* en los satélites de Júpiter, llegándose a interesantes conclusiones sobre cómo modificar las órbitas alrededor de este planeta, o cómo realizar múltiples aproximaciones a los tres satélites mencionados con fines científicos. Se utiliza el método de Chebyshev para buscar soluciones de Lambert y, al mismo tiempo, se emplea el método de Newton-Raphson para ajustar los arcos de trayectoria en sus extremos. De todas las trayectorias posibles halladas se eliminan aquellas que por sus características no resulten realistas, y se analizan y refinan aquellas que incluyen tres asistencias gravitacionales. Nada impediría reutilizar los métodos descritos para diseñar maniobras en el sistema solar con múltiples trayectorias interplanetarias. En el análisis de Lynam (2014b) también encontramos el diseño completo de una de las misiones a Júpiter, partiendo de la Tierra y llegando a Marte para realizar una asistencia gravitacional, antes de dirigir la aeronave a los satélites de Júpiter donde la misión continuaría con el mencionado triple *flyby*. Estos resultados son muy relevantes, si bien sería posible mejorar la carga útil de la aeronave utilizando la tradicional y conocida estrategia de múltiples asistencias en la Tierra y Venus para alcanzar los planetas exteriores, a costa de penalizar el tiempo total de la misión.

Es posible establecer sinergias entre el problema de los tres cuerpos y las misiones basadas en *flybys*, y las maniobras impulsivas. Por este motivo, al tiempo que crece el interés en órbitas periódicas en el contexto de este problema, encontramos artículos como el de Wang, Shang, and Wu (2013), que analiza esta clase de sincronizaciones orbitales en puntos de Lagrange del sistema Tierra-Sol. Se propone un método novedoso que utiliza invariantes, mapas de Poincaré y asistencias gravitacionales. El algoritmo utilizado se basa en el método *simplex*, así como en correcciones diferenciales posteriores para refinar la solución encontrada. Se calculan los impulsos al comienzo y final de cada arco de trayectoria con la ayuda de hipérbolas, cuyos parámetros se ajustan a las direcciones del movimiento al entrar o salir de la zona de influencia de cada planeta, calculándose así los periapsis de captura y escape con relativa sencillez. Se concluye que los períodos orbitales alrededor del punto de Langrage L1 son más adecuados para avanzar a planetas exteriores y para regresar de planetas interiores, mientras que las órbitas en torno a L2 serían

más beneficiosas para capturar aeronaves procedentes de planetas exteriores y para viajar a planetas interiores.

Por último, comentar también el trabajo de Vasile, Summerer, and Pascale (2005) donde se presenta la optimización de misiones a Marte mediante una combinación de las características de los algoritmos evolutivos y la búsqueda sistemática, mediante técnicas de poda. Se consideran viajes directos o asistencias gravitacionales en Venus, con distinta duración de la estancia de exploración en ese planeta, y un amplio rango de momentos de salida. A nuestro parecer lo más interesante es el estudio que hacen de propulsión eléctrica usando los puntos de Lagrange de Marte para capturas de bajo coste.

## 5. Ejemplo de optimización mediante enjambre de una misión de la Tierra al Cinturón de Kuiper

En esta sección se muestra un ejemplo de aplicación de optimización heurística de una trayectoria interplanetaria. De cada una de las técnicas heurísticas anteriormente expuestas se pueden encontrar ejemplos en la literatura donde se han aplicado al problema descrito. Como ejemplo detallado de la utilización de GA se puede consultar el trabajo de Alonso y Santos (2010b), donde se alcanza Saturno con asistencias en Marte, minimizando el combustible y teniendo en cuenta una serie de restricciones. La optimización de rutas interplanetarias se realiza mediante PSO en Alonso and Santos (2012), para trayectorias que partiendo de la Tierra llegan a Júpiter con asistencia gravitacional en Marte.

Aquí se describe la aplicación de un algoritmo de enjambre MOPSO con el fin de minimizar el consumo de combustible y la duración total de una misión simultáneamente desde la Tierra hasta el cinturón de Kuiper. En lugar de combinar estas variables en una única función criterio, se ha obtenido un frente de Pareto de soluciones no dominantes (es decir, no hay una solución mejor para las dos variables de salida de forma simultánea). El algoritmo de enjambre multiobjetivo MOPSO proporciona una visión global de las mejores soluciones posibles y permite seleccionar las combinaciones más adecuadas de delta-V y la duración de la misión.

Además se ha implementado para un sistema de bajo empuje, en lugar de un sistema impulsivo, desarrollando un algoritmo que convierte las maniobras impulsivas en de bajo empuje para luego aplicarles el algoritmo MOPSO.

### 5.1. Modelo de trayectorias interplanetarias

El modelo del sistema solar se ha desarrollado en base de las efemérides de los planetas, a partir de las tablas y fórmulas correspondientes proporcionadas por Standish and Williams (2010). Como una primera aproximación, se pueden suponer maniobras impulsivas a la salida de la Tierra y durante los *fly-by* en cada planeta. Bajo este supuesto, la trayectoria de la Tierra a cualquier otro planeta, después de un cierto tiempo, se puede calcular resolviendo el problema de Lambert (Bate, Mueller, and White, 1971). Esta trayectoria es el arco de una órbita alrededor del Sol, definida por las velocidades heliocéntricas a la salida de la Tierra y a la llegada a Marte. Este planeta ha sido elegido como el primer planeta para un *fly-by* después de la salida de la Tierra. Sin embargo, podría probarse cualquier otra combinación de planetas para realizar las asistencias gravitacionales (de particular interés son los *fly-by* en Venus y en la Tierra para alcanzar a otros planetas).

Por lo tanto, a partir de las velocidades de salida y de llegada se puede calcular el delta-V requerido para la maniobra impulsiva de salida proporcionada por el lanzador. El proceso se repite para la segunda trayectoria, del segundo al tercer planeta, y así sucesivamente. Esto permite calcular el delta-V de la trayectoria final en un tiempo de vuelo.

Con el fin de simplificar el problema, se puede considerar que la aeronave parte de una órbita cercana a la Tierra, LEO (*Low Earth Orbit*), siendo la velocidad inicial de la nave respecto a la Tierra casi insignificante en comparación con la velocidad de la Tierra alrededor del Sol. Podemos entonces suponer que la nave se mueve respecto al Sol a la misma velocidad que la Tierra. A la llegada a un determinado planeta, la asistencia gravitatoria consiste en acelerar la aeronave, aprovechando el campo de gravedad del planeta y su velocidad heliocéntrica. Por lo tanto la nave espacial cambia la magnitud y dirección de su velocidad de forma instantánea (Figura 1). Cada planeta es considerado una masa puntual adimensional.

Pero las maniobras impulsivas (aplicación instantánea del delta-V) son difíciles de implementar y darían lugar a singularidades en su resolución. Además, los motores no pueden proporcionar los altos niveles de empuje requeridos. Por lo tanto, se ha convertido el modelo de maniobras impulsivas en uno de bajo empuje (continuo). Aunque la siguiente hipótesis puede no ser siempre cierta, pueden considerarse razonable en la mayoría de los casos, justificada por la experiencia, y válida para encontrar una primera aproximación al aplicar un algoritmo MOPSO con maniobras de bajo empuje.

Se define un cierto tiempo de vuelo entre los planetas, para el cual se calcula una trayectoria que cumple con esa duración. Se requerirá una maniobra impulsiva a la salida (después del lanzamiento o después de un *fly-by*), a fin de lograr una trayectoria que cumpla ese tiempo de vuelo. Si, por cualquier motivo, la maniobra no se aplica a la salida sino después de un cierto tiempo, aun así el tiempo total de vuelo debe cumplirse. En ese caso la nave deberá cubrir la misma distancia pero ahora el tiempo disponible será menor ya que la maniobra no se aplicó a la salida sino un poco más tarde. Esto lleva a la conclusión de que la maniobra impulsiva debe ser mayor, y quizás su valor es demasiado alto para los motores reales. Entonces se podría aplicar una maniobra menos potente (pero realizable) en la misma dirección, repitiendo este proceso. Es decir, se aplica un continuo de pequeñas maniobras impulsivas.

Cuando se requiere una maniobra impulsiva para corregir la trayectoria durante un *fly-by*, se aplica generalmente en periapsis, con el propósito de maximizar sus efectos (principio Orbeth). Esto no es posible con maniobras de bajo empuje ya que la maniobra continua puede durar días o incluso meses, mientras que el *fly-by* dura sólo unas horas. Por lo tanto, con sistemas de bajo empuje, la maniobra impulsiva deseada se calcula como si se aplicara después de la asistencia en el planeta.

De acuerdo con las hipótesis presentadas, se ha diseñado el siguiente algoritmo para trasformar las maniobras impulsivas en bajo empuje (Figura 6) (Alonso and Santos, 2010d).

1) Dado un cierto planeta (típicamente, salida del planeta Tierra o después de un *fly-by*, otro planeta cualquiera), calcular la trayectoria al siguiente planeta resolviendo el problema de Lambert. Esa trayectoria requiere una maniobra impulsiva inicial, es decir, un delta-V.

2) Este delta-V se calcula como la diferencia entre la velocidad real de la nave (teniendo en cuenta la velocidad del planeta) y la

velocidad calculada por la resolución del problema del paso anterior.

3) Se calcula el delta-V generado por el sistema de propulsión mediante su empuje nominal  $F$ , aplicado durante un corto espacio de tiempo,  $dt$ , cuyo valor es típicamente un paso de integración. Si al cabo de este  $dt$  se ha logrado una trayectoria según se deseaba, entonces se interrumpe el algoritmo.

4) En caso contrario, la aeronave se encontrará al cabo de ese tiempo  $dt$  en una cierta posición y con una cierta velocidad. Partiendo de ese nuevo estado, se repite el algoritmo, tratando de alcanzar el punto de destino mediante la resolución del problema de Lambert. Nótese que el destino, de ser un planeta, se habrá desplazado durante ese tiempo  $dt$ .

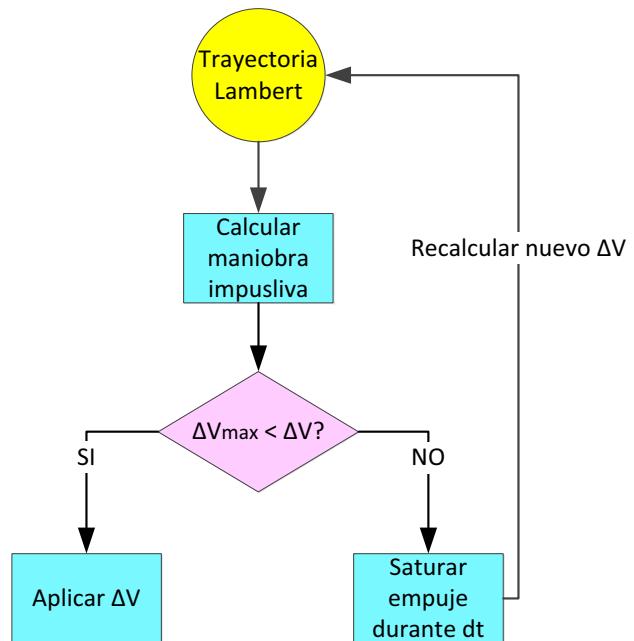


Figura 6: Algoritmo para el cálculo de la trayectoria de bajo empuje entre dos planetas.

Además cada iteración se está simulando es la saturación del empuje del sistema de propulsión de manera continuada, al resolver el problema de Lambert cada paso de integración. El delta V obtenido en cada iteración durante el tiempo  $dt$  puede calcularse mediante la ecuación (6), que tendrá la misma dirección que el delta-V deseado calculado a partir de Lambert.

$$\bar{\Delta V}_{actual} = \frac{\Delta V_{max}}{\Delta V} \bar{\Delta V} \quad (6)$$

donde  $\bar{\Delta V}_{actual}$  es el delta-V aplicado;  $\bar{\Delta V}$  es el delta deseado, y  $\Delta V_{max}$  es el máximo delta factible proporcionado por los motores de bajo empuje. En el caso de propulsión convencional (esto es, con un consumo de masa no despreciable), el cálculo se realiza mediante la ecuación (7a),

$$\Delta V_{max} = I_{sp} g \ln\left(\frac{m}{m + \dot{m}\Delta t}\right) \quad (7a)$$

donde:

- $I_{sp}$  es el impulso específico del sistema de propulsión,
- $g$  es la aceleración del campo gravitatorio terrestre,
- $m$  es la masa de la nave,

- $\dot{m}$  es el flujo de masa debido al sistema de propulsión.

Si se trata de un sistema de propulsión continua con gasto despreciable o nulo de masa, lo habitual es conocer el valor del empuje  $F$ , empleándose por tanto la ecuación (7b):

$$\Delta \bar{V}_{actual} = Fdt \quad (7b)$$

Después de cada *fly-by* se ejecuta de nuevo el algoritmo, esta vez con las nuevas condiciones del siguiente arco de trayectoria. No se busca un punto final concreto en el cinturón de Kuiper, siendo un cálculo más de la optimización.

### 5.2. Aplicación del algoritmo MOPSO a la trayectoria interplanetaria Tierra – cinturón de Kuiper

El problema propuesto como ejemplo de aplicación es la optimización de una trayectoria interplanetaria entre la Tierra y el cinturón de Kuiper, de bajo empuje continuo (*low thrust*) y con asistencias gravitatorias según sea necesario. El objetivo es reducir al mínimo la duración de la misión (tiempo) y el consumo de combustible (delta-V). Obviamente, cuanto mayor sea el consumo de combustible, más corta será la misión, y viceversa. Por lo tanto, la optimización simultánea de ambas variables es compleja y hay que alcanzar un compromiso. Además no hay una única solución. La falta de soluciones analíticas conduce a modelos que requieren simulaciones numéricas, y la exploración exhaustiva del espacio de variables es inasequible. La existencia de mínimos locales, la débil atracción de la cuenca de los mínimos globales, y la presencia de fuertes discontinuidades son dificultades importantes en este problema de optimización. De hecho, se hace necesario el uso de algún algoritmo basado en la exploración inteligente del espacio de variables como son las estrategias heurísticas.

El cinturón de Kuiper es enorme, se encuentra entre 30 y 100 UA unidades astronómicas (UA) en todas las direcciones del Sol. En este ejemplo se busca alcanzar el cinturón, no un punto concreto. El valor utilizado en este artículo es unos 40 UA donde se encuentra el objeto transneptuniano más conocido, que quizás sea Plutón.

Las características de la nave espacial son: peso de carga útil de 500 kg; sistema de propulsión que alcanza un impulso específico  $I_{sp}$  de 2,500 s, y un empuje (*thrust*) máximo de 0,05 N. El lanzador puede proporcionar una velocidad heliocéntrica de escape de 3 km/s respecto a la Tierra en cualquier dirección deseada.

La función general a minimizar corresponde a la presentada en la ecuación (3), que no puede ser resuelta analíticamente, donde  $\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  es el vector de variables de decisión e  $\bar{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]$  es el vector de salidas.

Dadas dos soluciones diferentes, representadas por los vectores  $\bar{y}_A$  y  $\bar{y}_B$ , la primera sería dominante respecto a la segunda si se verifica la ecuación (8):

$$y_{A,i} \leq y_{B,i} \quad \forall i, i = 1 \dots n \quad (8)$$

Si la desigualdad se cumple estrictamente, entonces  $\bar{y}_B$  es la solución dominada, por lo que no sería interesante considerarla ya

que  $\bar{y}_A$  es mejor que  $\bar{y}_B$  y, por lo tanto, esta última puede ser descartada. Sin embargo,  $\bar{y}_A$  puede ser mejor que  $\bar{y}_B$  sólo en algunos aspectos, y no en otros, es decir, puede ser dominante respecto a algunas características, y por lo tanto deberían considerarse las dos.

El objetivo del MOPSO es encontrar un conjunto de soluciones no dominadas (frente de Pareto), que deben almacenarse en una estructura de datos durante la ejecución del algoritmo. El tamaño de esta estructura puede crecer muy rápidamente, ya que a cada paso del algoritmo iterativo de optimización se encuentran soluciones no dominadas. Después de cada paso, la nueva posición de los individuos de la población debe ser comparada con todas las otras soluciones del frente, para realizar alguna sustitución en caso necesario. Esto aumenta la complejidad y el tiempo de cálculo en cada paso, al hacerse el frente de Pareto más grande.

Los parámetros del algoritmo de enjambre son: tiempo de salida (tiempo despegue) de la nave aeroespacial desde la Tierra; los tiempos de vuelo entre los planetas; la anomalía heliocéntrica orbital de la nave al llegar al cinturón de Kuiper; y el tiempo final del vuelo desde el planeta visitado (última asistencia gravitatoria). El algoritmo de enjambre proporciona un frente de Pareto de soluciones dominantes, de forma que el usuario puede decidir qué solución o conjunto de soluciones son las más apropiados para diseñar la misión Tierra-Kuiper. Esta decisión se basa en la delta-V obtenida y el tiempo total de vuelo de la misión.

Por lo tanto en esta aplicación las variables de decisión son:

- $x_1$  = tiempos de vuelo,
- $x_2$  = la anomalía heliocéntrica orbital final,

y el vector de salida es,

- $y_1$  = delta-V (m/s)
- $y_2$  = tiempo total de vuelo (días).

Para cada individuo se consideran dos vectores: la mejor solución personal, y la mejor solución global. La mejor solución personal es particular para cada individuo y coincide con la última solución conseguida no dominada por ningún otro vector anterior de ese individuo. El mejor líder global está claramente definido para los PSOs, pero no para MOPSO. En nuestro algoritmo, el papel del líder global ha sido sustituido por un líder del frente de Pareto, ajustado a cada individuo de la población como el elemento más cercano del frente. Ambos líderes (mejor líder personal, y el mejor líder del frente de Pareto) se combinan para definir una cierta "velocidad" (es decir, un cambio en el vector de decisión) para cada individuo, de acuerdo con (9).

$$\bar{v}_{i,k} = \bar{v}_{i,k-1} + c_1(\bar{x}_{i,leader} - \bar{x}_{i,k-1}) + c_2(\bar{x}_{i,pbest} - \bar{x}_{i,k-1}) \quad (9)$$

En la siguiente iteración, la nueva "posición" individual, es decir, el vector de decisión se actualizará según la ecuación (10),

$$\bar{x}_{i,k} = \bar{x}_{i,k-1} + \bar{v}_{i,k} \quad (10)$$

donde:

- $\bar{v}_{i,k}$  es el vector de velocidad del individuo  $i$ -ésimo en la transición de la etapa  $k-1$  al paso  $k$ .
- $c_1$  y  $c_2$  son números aleatorios, seleccionados de una distribución uniforme entre 0 y 1.

- $\bar{x}_{i,leader}$  es la solución más cercana del frente de Pareto al individuo  $i$ -ésimo.
- $\bar{x}_{i,pbest}$  es la solución más reciente, históricamente no dominada, del individuo  $i$ -ésimo.
- $\bar{x}_{i,k}$  es la posición (vector de decisión) del individuo  $i$ -ésimo en el paso  $k$ .

En la simulación se han realizado hasta 1.000 iteraciones. El algoritmo se interrumpe si no hay cambios en el frente de Pareto de soluciones no dominadas después de 50 etapas consecutivas (Alonso and Santos, 2010d).

En este ejemplo, atendiendo a las posibles asistencias gravitacionales del sistema solar, se han considerado los siguientes casos: *fly-by* en Marte; en Marte y Júpiter; en Marte y Saturno; y por último, asistencias gravitacionales en Marte, Júpiter y Saturno. La Figura 7 muestra varios frentes de Pareto para la misión Tierra-Kuiper para estas asistencias gravitacionales en diferentes conjuntos de planetas.

El frente de Pareto en negro representa las soluciones no dominadas en la misión Tierra-Kuiper cuando se realiza un *fly-by* en Marte. El delta-V obtenido es bastante alto, si bien los tiempos de vuelo (TOF) son bajos, pero no tanto como considerando asistencias gravitatorias en Júpiter y Saturno. De hecho, la solución del frente de Pareto representada en negro (Marte) está dominada por la azul (Marte y Júpiter) y la verde (Marte y Saturno). El frente de Pareto representado en rojo (asistencias gravitatorias en Marte, Júpiter y Saturno) proporciona una solución peor que sólo un *fly-by* en Marte o en sólo dos planetas. Los frentes rojos y negros podrían ser parte del mismo frente de Pareto ya que ninguno de ellos es dominante.

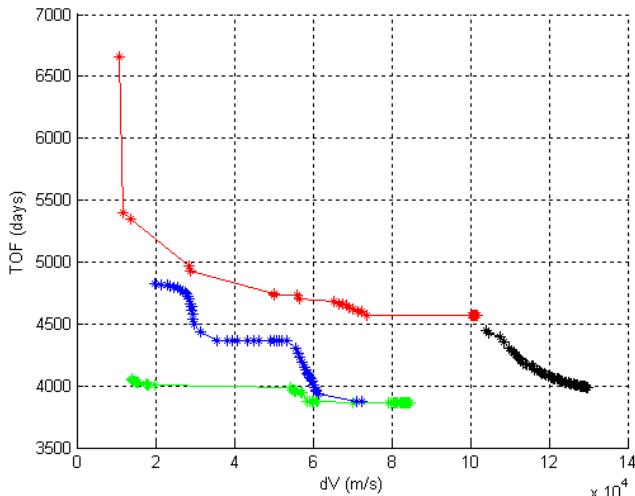


Figura 7: Frentes de Pareto (TOF vs. delta-V) para una misión de la Tierra a cualquier posición en el cinturón de Kuiper, con asistencias gravitacionales en Marte (negro); Marte y Júpiter (azul); Marte y Saturno (verde); y Marte, Júpiter y Saturno (rojo).

Se pueden extraer algunas conclusiones del análisis de este problema. El *fly-by* sólo en Marte no es una buena solución, ya que requiere un mayor delta-Vs que otras opciones, incluso si el tiempo total de vuelo es bastante razonable. Asistencias gravitacionales en Marte, Júpiter y Saturno conducen a configuraciones espaciales inapropiadas que no son útiles. Tal

vez, en diferentes períodos de tiempo, las posiciones de estos tres planetas fueran más adecuadas para proporcionar una buena trayectoria, pero durante el periodo de tiempo analizado la imposición de un tercer *fly-by* impide al MOPSO encontrar buenas soluciones.

A pesar de las pocas soluciones que minimizan el delta-V para la asistencia gravitatoria triple, la mayoría de las soluciones de los frentes de Pareto son proporcionadas por dos *fly-by*, en Marte y luego en Júpiter o Saturno. En general Saturno proporciona los mejores resultados, ya que el frente de Pareto verde domina casi todas las otras soluciones (Figura 7).

El mejor delta-V se logra con esta trayectoria de Marte-Júpiter-Saturno (final del frente de Pareto rojo, arriba a la izquierda, Figura 7). La trayectoria para esta solución de mínimo delta-V se muestra en la Figura 8, donde la mayoría de los planetas, y también el cinturón de Kuiper, se alcanzan después de una órbita de casi 180 grados desde los planetas anteriores (tipo transferencia de Hohmann). La parte interior del sistema solar se muestra mucho más pequeña que el cinturón de Kuiper. Cabe destacar el extremadamente corto periodo de bajo empuje después de Saturno, ya que parece que el *fly-by* es suficiente para alcanzar la trayectoria correcta al cinturón de Kuiper.

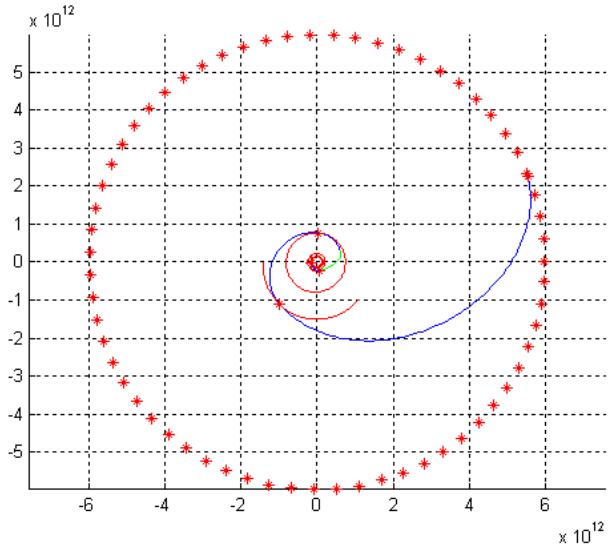


Figura 8: Trayectoria de una misión Tierra-Kuiper con asistencias gravitacionales en Marte, Júpiter y Saturno. Los segmentos de bajo empuje están representados por arcos verdes no keplerianos. Las unidades de los ejes son metros, asumiendo una distancia del cinturón de Kuiper de unos 40 UA (~ 6 mil millones de kilómetros).

La visualización de los frentes de Pareto nos permite tener una visión global de las diferentes soluciones para una misión. Por ejemplo, como se ha dicho, el menor delta-V se consigue con *fly-by* en Marte, Júpiter y Saturno a costa de un TOF mayor. Pero con sólo un delta-V un poco más alto, el TOF podría reducirse drásticamente si se omite esa asistencia gravitacional en Júpiter. Dependiendo del periodo considerado, una misión Marte-Júpiter-Kuiper puede requerir un TOF total de más tiempo para el mismo delta-V que una misión Marte-Saturno-Kuiper.

## 6. Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado la aplicación de técnicas de optimización heurísticas en el ámbito de aplicaciones

aeroespaciales, particularmente para misiones de exploración espacial con asistencias gravitacionales.

En concreto se ha realizado una revisión del estado del arte, avalada por numerosos artículos científicos, de algunas estrategias evolutivas (algoritmos genéticos, evolución diferencial) y otras como los enjambres de partículas, que se han utilizado para intentar determinar trayectorias interplanetarias óptimas realizando asistencias gravitacionales en diversos planetas. Esta revisión bibliográfica se ha estructurado en atención a los distintos métodos de propulsión de las naves (impulsivo o continuo). Esto ha permitido ver su evolución a lo largo de las dos últimas décadas, y las nuevas tendencias.

Además se ha presentado con detalle un ejemplo ilustrativo de una optimización multiobjetivo mediante un algoritmo de enjambre de partículas (MOPSO) de una misión Tierra-cinturón de Kuiper con asistencias gravitacionales en Marte, Júpiter y Saturno.

## English Summary

### Heuristic Optimization of Interplanetary Trajectories in Aerospace Missions

#### Abstract

In this paper, heuristic optimization of interplanetary trajectories is presented. These techniques have been applied over the last two decades to the successful design of space missions in order to increase the scientific results. The multi-objective optimization problem has been solved finding a trade-off between minimizing the fuel and maximizing the useful payload of the scientific mission. A review of the literature related to the application of some evolutive strategies such as Genetic Algorithms and Differential Evolution, and Particle Swarm Optimization methods, to aerospace applications is included, in particular for the design of interplanetary exploration missions with gravity assistances. A detailed example is included to show the application of multiobjective optimization (MOPSO) to determine the interplanetary trajectory from the Earth to the Kuiper Belt with flybys in Mars, Jupiter and Saturn.

#### Keywords:

Heuristic optimization; interplanetary trajectories; gravity assistance; fly-by; aerospace mission; GA; PSO; MOPSO.

## Referencias

- Alonso F., Santos M., 2008. GA Optimization of the height of a low earth orbit, En: Computational Intelligence in Decision and Control, World Scientific, 719–724.
- Alonso F., Santos M., 2010a. Multi-criteria Genetic Optimisation of the Manoeuvres of a Two-Stage Launcher. *Information Sciences* 180(6), 896–910. doi:10.1016/j.ins.2009.11.001
- Alonso F., Santos M., 2010b. Delta-V genetic optimisation of a trajectory from Earth to Saturn with fly-by in Mars. En: Evolutionary Computation (CEC), 2010 IEEE Congress on (pp. 1–6).
- Alonso F., Santos M., 2010c. Genetic Optimization of an Interplanetary Trajectory from Earth to Jupiter. En: Computational Intelligence Foundations and Applications: Proc. 9th Int. FLINS Conf, Chengdu, China, 2-4 August 2010 (Vol. 4). Ruan, D., Li, T., Xu, Y. (Eds). World Scientific.
- Alonso-Zotes, F., Santos-Peñas, M., 2010d. From Earth to Kuiper belt: swarm optimisation algorithm applied to interplanetary missions. En: Proceedings of the WPP-308, 4th International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques ICATT, Madrid, Spain (pp. 3–6).
- Alonso Zotes, F., Santos Peñas, M., 2012. Particle swarm optimisation of interplanetary trajectories from Earth to Jupiter and Saturn. *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 25(1), 189–199. doi:10.1016/j.engappai.2011.09.005
- Armellin, R., Di Lizia, P., Makino, K., Berz, M., 2012. Rigorous global optimization of impulsive planet-to-planet transfers in the patched-conics approximation. *Engineering Optimization* 44(2), 133–155. DOI: 10.1080/0305215X.2011.570757
- Bate, R. R., Mueller, D. D., White, J. E., 1971. Fundamentals Astrodynamics, Dover Publications, New York, NY.
- Campagnola, S., Buffington, B. B., Petropoulos, A. E., 2014. Jovian tour design for orbiter and lander missions to Europa. *Acta Astronautica* 100, 68–81. doi:10.1016/j.actaastro.2014.02.005
- Choueiri, E.Y., 2009. New Dawn for Electric Rockets. *Scientific American* 300, 58–65. doi:10.1038/scientificamerican0209-58
- Dachwald, B., 2005. Optimization of very-low-thrust trajectories using evolutionary neurocontrol. *Acta Astronautica* 57(2), 175–185. doi:10.1016/j.actaastro.2005.03.004
- Das, S., Suganthan, P. N., 2011. Differential evolution: a survey of the state-of-the-art. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on* 15(1), 4–31. DOI: 10.1109/TEVC.2010.2059031
- Deb, K., 2014. Multi-objective optimization. In *Search methodologies* (pp. 403–449). Springer US.
- Eberhart, R. C., Shi, Y., 1998. Comparison between genetic algorithms and particle swarm optimization. En: *Evolutionary Programming VII* (pp. 611–616). Springer Berlin Heidelberg.
- ESA, 2014. Rosetta. <http://sci.esa.int/rosetta>
- ESA, 2016. BepiColombo. <http://sci.esa.int/bepicolombo>
- Fonseca, C. M., Fleming, P. J., 1998. Multiobjective optimization and multiple constraints handling with evolutionary algorithms-part I: A unified formulation. *Systems, Man and Cybernetics, Part A, IEEE Transactions on* 28(1), 26–37. doi:10.1109/3468.650319
- Goldberg, D.E., 1989. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. Addison-Wesley, MA.
- Hill, P.G., Peterson, C.R., 1992. Mechanics and thermodynamics of propulsion (2nd edition). Reading, MA, Addison-Wesley Publishing Co.
- Hu, X., Eberhart, R.C., 2002. Multiobjective Optimization using Dynamic Neighborhood Particle Swarm Optimization. En: *WCCI, Congress on Evolutionary Computation, IEEE*, 1677–1681.
- Izzo, D., 2006. Lambert's problem for exponential sinusoids. *Journal of guidance, control, and dynamics* 29(5), 1242–1245. DOI: 10.2514/1.21796
- Izzo, D., Becerra, V. M., Myatt, D. R., Nasuto, S. J., and Bishop, J. M. 2007. Search space pruning and global optimisation of multiple gravity assist spacecraft trajectories. *Journal of Global Optimization*, 38(2), 283–296. Doi: 10.1007/s10898-006-9106-0
- Izzo, D., Simões, L. F., Märtens, M., de Croon, G. C., Heritier, A., Yam, C. H., 2013. Search for a grand tour of the Jupiter Galilean moons. In *Proc. 15th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation* (pp. 1301–1308). ACM.
- Izzo, D., 2010. Global optimization and space pruning for spacecraft trajectory design. In: *Spacecraft Trajectory Optimization 1*, 178–200. Conway, B.A. (ed.) Cambridge University Press, Cambridge.
- JAXA, 2016. Japan Aerospace Exploration Agency. <http://global.jaxa.jp/projects/sat/ikaros/>
- Johnson, L., Young, R., Alhorn, D., Heaton, A., Vansant, T., Campbell, B., Pappa, R., Keats, W., Liewer, P.C., Alexander, D., Ayon, J., Wawrzyniak, G., Burton, R., Carroll, D., Matloff, G., Kzerashvili, R.Y., 2010. Solar Sail Propulsion: Enabling New Capabilities for Heliophysics. arXiv:1012.5250.
- Kennedy, J., Eberhart, R. C., 2001. Swarm Intelligence. Academic Press, San Diego.
- Kloster, K. W., Petropoulos, A. E., Longuski, J. M., 2011. Europa Orbiter tour design with Io gravity assists. *Acta Astronautica* 68(7), 931–946. doi:10.1016/j.actaastro.2010.08.041
- Li, X., 2004. Better spread and convergence: Particle swarm multiobjective optimization using the maximin fitness function. En: *Genetic and*

- Evolutionary Computation—GECCO 2004 (pp. 117–128). Springer Berlin Heidelberg.
- Lynam, A. E., 2014a. Broad-search algorithms for the spacecraft trajectory design of Callisto–Ganymede–Io triple flyby sequences from 2024 to 2040. Part I: Heuristic pruning of the search space. *Acta Astronautica* 94(1), 246–252.
- Lynam, A. E., 2014b. Broad-search algorithms for the spacecraft trajectory design of Callisto–Ganymede–Io triple flyby sequences from 2024 to 2040. Part II: Lambert pathfinding and trajectory solutions. *Acta Astronautica* 94(1), 253–261. doi:10.1016/j.actaastro.2013.07.018
- Lynam, A. E., 2015. Broad-search algorithms for finding triple-and quadrupole-satellite-aided captures at Jupiter from 2020 to 2080. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 121(4), 347–363. DOI: 10.1016/j.actaastro.2013.07.020
- Macdonald, M. (Ed.), 2014. Advances in Solar Sailing. Springer Praxis, Chichester.
- Marín Martín, F.J., García Lagos F., Sandoval Hernández, F., 1992. Algoritmos Genéticos: una estrategia para la búsqueda y la optimización. *Informática y Automática* 25(3), 5–15.
- Makino, K., 1998. Rigorous analysis of nonlinear motion in particle accelerators. Doctoral dissertation, Michigan State University, East Lansing, Michigan, USA.
- McConaghy, T. T., Debban, T. J., Petropoulos, A. E., Longuski, J. M. 2003. Design and optimization of low-thrust trajectories with gravity assists. *Journal of spacecraft and rockets* 40(3), 380–387. doi: 10.2514/2.3973
- Minovitch, M., 1961. A method for determining interplanetary free-fall reconnaissance trajectories, Jet Propulsion Laboratory Technical Memo TM-312-130, pages 38–44.
- NASA, 1998. Deep Space 1. National Aeronautics and Space Administration. <http://science.nasa.gov/missions/deep-space-1/>
- Ohndorf, A. Dachwald, B., 2010. InTrace - A Tool for Multi-Objective Multi-Phase Low-Thrust Trajectory Optimization. Proceedings of the WPP-308, 4th International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques ICATT, Madrid, Spain.
- Pascale, P. D., Vasile, M., 2006. Preliminary design of low-thrust multiple gravity-assist trajectories. *Journal of Spacecraft and Rockets* 43(5), 1065–1076. DOI: 10.2514/1.19646
- Pessina, S. M., Campagnola, S., & Vasile, M., 2003. Preliminary analysis of interplanetary trajectories with aerogravity and gravity assist manoeuvres. In Proceedings of 54th International Astronautical Congress, 1–11, Bremen, Germany.
- Petropoulos, A. E., Longuski, J. M., 2004. Shape-Based algorithm for automated design of low-thrust, gravity-assist trajectories. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 41(5) 787–796. Doi: 10.2514/1.13095
- Reyes-Sierra, M., Coello, C.A., 2006. Multi-objective particle swarm optimizers: A survey of the state-of-the-art. *International Journal of Computational Intelligence Research*, 287–308. doi=10.1.1.138.1829
- Schneider, S., Hawkins, T., Rosander, M., Vaghjiani, G., Chambreau, S., Drake, G., 2008. Ionic Liquids as Hypergolic Fuels. *Energy Fuels* 22 (4), 2871–2872. DOI: 10.1021/ef800286b
- Schütze, O., Vasile, M., Junge, O., Dellnitz, M., Izzo, D., 2009. Designing optimal low-thrust gravity-assist trajectories using space pruning and a multi-objective approach. *Engineering Optimization* 41(2), 155–181. DOI: 10.1080/03052150802391734
- Standish, E. M., Williams, J. C., 2010. Orbital ephemerides of the sun, moon and planets (PDF). *Int Astron Union Comm*, 4.
- Vasile, M., Minisci, E., Locatelli, M., 2010. Analysis of some global optimization algorithms for space trajectory design. *Journal of Spacecraft and Rockets* 47(2), 334–344. DOI: 10.2514/1.45742
- Vasile, M., Pascale, P. D., 2006. Preliminary design of multiple gravity-assist trajectories. *Journal of Spacecraft and Rockets* 43(4), 794–805. doi: 10.2514/1.17413
- Vasile, M., Summerer, L., Pascale, P. D., 2005. Design of Earth–Mars transfer trajectories using evolutionary-branching technique. *Acta Astronautica* 56, 705–720. doi:10.1016/j.actaastro.2004.12.002
- Vinko, T., Izzo, D., 2008. Global optimisation heuristics and test problems for preliminary spacecraft trajectory design. Technical report, European Space Agency, the Advanced Concepts Team.
- Wang, S., Shang, H., Wu, W., 2013. Interplanetary transfers employing invariant manifolds and gravity assist between periodic orbits. *Science China Technological Sciences* 56(3), 786–794. Doi: 10.1007/s11431-013-5133-5
- Wallace, N., Jameson, P., Saunders, C., Fehringer, M., Edwards, C., Floberghagen, R., 2011. The GOCE Ion Propulsion Assembly – Lessons Learnt from the First 22 Months of Flight Operations. En: Proc of the 32nd International Electric Propulsion Conf, Wiesbaden (Germany), pp. 1–21.
- Whitley, D., Dominic, S., Das, R., Anderson, C. W. 1994. Genetic reinforcement learning for neurocontrol problems (pp. 103–128). Springer US. Doi: 10.1007/978-1-4615-2740-4\_5
- Zhu, K., Zhang, R., Xu, D., Wang, J., Li, S., 2012. Venus round trip using solar sail. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 55(8), 1485–1499. Doi: 10.1007/s11433-012-4792-8
- Zitzler, E., Thiele, L., Deb, K., 2000. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. *Evolutionary Computation* 8(2), 173–195. doi:10.1162/106365600568202.