

Modelado Matemático de un Sistema de Concentración de Fondos y Desembolsos

Carlos Antonio Herrera-Cáceres ^{a, b, *}, Asier Ibeas ^b

^a Departamento de Ingeniería Informática. Universidad Nacional Experimental del Táchira. Avenida Universidad, Sector Paramillo. San Cristóbal, Venezuela.

^b Departament de Telecomunicació i d'Enginyeria de Sistemes. Universitat Autònoma de Barcelona. 08193 Bellaterra. Barcelona. Spain.

Resumen

Este trabajo presenta un modelo de simulación para un sistema de concentración de fondos y desembolsos (SCFD) visto como un sistema de gestión de inventario, basado en ecuaciones en diferencias y técnicas de ingeniería de sistemas. El modelo asume la existencia de retardos por trámite o traslado bancario y analiza la aplicación del concepto de operación con cuentas de saldo cero. Se plantea el caso de una empresa genérica cuyas agencias o distribuidores geográficamente están dispersos en diferentes regiones. El modelo supone la existencia de una cuenta principal operada centralizadamente y política de saldo mínimo. Esta cuenta recibe las transferencias de los ingresos depositados en las cuentas de ingresos de cada agencia y, también, desde la cuenta principal son transferidos los fondos para cubrir los sobregiros ocasionados en las cuentas de egresos de las agencias. Existe una cuenta de inversión a la cual se transfiere el superávit de efectivo en la cuenta principal y una línea de crédito que cubre los déficits de saldo en esa cuenta. Se definen las reglas de operación del SCFD y se consideran los ingresos y costos involucrados. El modelo representa el flujo del dinero entre los elementos identificados del sistema y el flujo de requerimientos u órdenes de transferencia. Se deriva un modelo equivalente representado por ecuaciones algebraicas utilizando la transformada z con el fin de abrir perspectivas al uso riguroso de técnicas de control en el campo de las finanzas. Copyright © 2015 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

Palabras Clave:

Simulación; Concentración de caja y desembolsos; Control de inventarios; Transferencia de dinero; Transformada z .

1. Introducción

La administración del efectivo generalmente se refiere a la planificación, uso y control de los recursos financieros de una organización. Incluye todas aquellas actividades de la gerencia financiera orientadas a garantizar la disponibilidad de dinero en efectivo para las operaciones ordinarias, evitando el riesgo de insolvencia; lo cual está enmarcado dentro de la planificación financiera corporativa de corto plazo. La administración del efectivo normalmente comprende funciones como recolección, concentración, manejo y desembolso del dinero en efectivo. Debido a su importancia, los investigadores han aportado diversas herramientas teóricas y prácticas para el mejoramiento de las decisiones determinantes que afectan los resultados globalmente. En este sentido, el propósito de esta investigación es proponer un modelo de simulación para un sistema de concentración de fondos y desembolsos (SCFD). Este esquema se usa en empresas cuya estructura está dispersa nacionalmente en diferentes regiones, en forma de agencias o distribuidores, como parte de la administración de su efectivo y la planificación y control del activo circulante. A través de las agencias o distribuidores se realiza la cobranza y se canalizan los pagos de insumos o servicios

requeridos para su operación. El objetivo del sistema es concentrar el efectivo en una sola cuenta bancaria, llamada cuenta principal o maestra. Según corresponda, en cada región se designan cuentas bancarias de ingresos donde es depositado todo el efectivo producto de la cobranza, y cuentas de egresos contra las cuales se extienden los cheques relativos a los pagos realizados a los proveedores y otros compromisos. De acuerdo con una política preestablecida, el efectivo disponible en las cuentas de ingresos es transferido periódicamente a la cuenta principal, y desde ésta se transfieren los montos necesarios para cubrir la demanda de efectivo en las cuentas de egresos.

El tema de los SCFD's ha sido tratado por distintos investigadores. Al respecto, Anvari y Mohan (1980) documentan un sistema de apoyo de decisiones informático, cuyo propósito es introducir eficiencia en el proceso de transferencia del efectivo depositado en bancos locales hacia las cuentas principales de la empresa y emitir las órdenes de transferencia a partir de un modelo de decisiones de inventario. Por su parte, Stone y Hill (1980, 1981) realizan una revisión acerca de las técnicas de transferencia utilizadas hasta la fecha (gestión en torno a un objetivo, anticipación, sincronización de balances) y sus deficiencias. Se enfocan en las principales decisiones para la estructuración de un sistema de concentración de caja; esto es, la selección y asignación tanto del banco de concentración como del método de transferencia. Ellos proponen un modelo usando programación lineal entera mixta con el objeto de minimizar el

* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: cherreca@net.edu.ve,
carlosantonio.herrera@campus.uab.cat (Carlos A. Herrera C.)

costo del programa de transferencia. Para ello, combinan las versiones más generales de las técnicas de transferencia y apropiadamente concluyen en el uso equilibrado de las mismas para establecer el programa de transferencia. También, Anvari (1981) examina un procedimiento de transferencia de los ingresos hacia las cuentas centrales por medio de cheques de transferencia de depósito en empresas que operan puntos de venta. El procedimiento asume la política de inventario (s, S) como la política óptima de transferencia, en la que s es el punto de re-orden y S es el nivel de re-orden (Beyer y Sethi, 1999). Igualmente, Anvari y Goyal (1985) describen un procedimiento con criterio determinista para encontrar una relación óptima de transferencia e inversión en una empresa descentralizada. Por último, Anvari (1987) propone un modelo cuyo objetivo es determinar un procedimiento óptimo para la emisión de órdenes de transferencia, basado en la política de inventario (s, S) aplicada al proceso de concentración de caja.

La argumentación pionera que permite aplicar a los saldos de efectivo un tratamiento teórico-conceptual análogo al de los niveles de inventario de bienes, se encuentra en Baumol (1952) y en Tobin (1956). Por su lado, Miller y Orr (1966, 1968) incorporan el carácter aleatorio al modelo de Baumol. Asimismo, Girgis (1968) y Eppen y Fama (1968, 1969), separadamente utilizan un enfoque de programación matemática para presentar modelos de previsión de caja bajo incertidumbre, los cuales, además de los costos de mantenimiento y escasez en la cuenta, sugieren una relación lineal del costo de transferencia de fondos con respecto al tamaño de la transferencia. También, Marquis y Witte (1989) examinan las implicaciones sobre la demanda de dinero con el fin de disminuir el promedio o la variabilidad de los requerimientos de transacciones, mediante un modelo de decisiones estocástico para la selección del programa óptimo de gestión de caja. El modelo se centra en la minimización del costo total esperado, el cual incluye: costos de iliquidez, costo de oportunidad por mantener dinero ocioso y los costos de operación y gestión. Más actualmente, Gupta y Dutta (2011) estudian el flujo en una cadena de suministro para programar los pagos aguas arriba, sujeto a las restricciones en la recepción del dinero.

En el presente documento también se adopta un enfoque de inventario. Sin embargo, se presenta una diferencia básica debido a que el modelo propuesto utiliza ecuaciones en diferencias para representar un SCFD con manejo del tiempo discreto. El propósito es establecer las condiciones para la aplicación de técnicas de modelado propias de las teorías de sistemas y de control a través de un modelo de acuerdo con García *et al.* (2012). En su trabajo, ellos tratan el tema de control adaptativo aplicado al control de inventario en una cadena de suministro, basado en la identificación del tiempo de entrega (*lead time*). Adicionalmente, García *et al.* (2013) incorporan una estructura de control de modelo interno con dos grados de libertad al control de inventario de producción de un sistema de cadena de suministro. Con fines comparativos, y en la búsqueda de mejorar la compensación de las perturbaciones en el sistema de inventario y mitigar el efecto látigo, ellos plantean dos enfoques para la cadena de suministros, uno centralizado y el otro descentralizado.

Existen varias razones para justificar el uso de ecuaciones en diferencias en el ámbito financiero. En primer lugar, porque en muchas situaciones es conveniente enfocar los problemas financieros como sistemas dinámicos con la variable independiente tiempo discreta; sin negar que en otras situaciones conviene utilizar el tiempo como una variable continua, para

representar los sistemas usando ecuaciones diferenciales. En segundo lugar, intuitivamente los eventos financieros pueden representarse a través de relaciones de recurrencia, tal cual en una ecuación en diferencias la incógnita conforma una sucesión y, en consecuencia, varios de los términos de la sucesión aparecen en una misma ecuación. En tercer lugar, la naturaleza misma de los problemas financieros, unida a la necesidad de analizar diferentes escenarios, obliga a tener a mano la solución general de un modelo basado en ecuaciones en diferencias (que representa el conjunto de todas sus soluciones particulares) para el análisis por parte de los ejecutivos financieros. En cuarto lugar, un modelo basado en ecuaciones en diferencias puede incluir variables de naturaleza determinística o aleatoria. Distintos autores han utilizado ecuaciones en diferencias para tratar diversos problemas de economía y finanzas; véase Cagan (1956), Khan (1975), Obstfeld y Rogoff (1995, 1996), Woodford (1998) y Christev (2005). Sin embargo, su aplicación más extendida se encuentra en ingeniería financiera. Es común el uso de ecuaciones en diferencias en modelos para la valoración de rentas financieras, depósitos bancarios y sistemas de amortización (Tenorio *et al.*, 2013). No obstante, en contraste con esas investigaciones, esta propuesta aborda el problema como un sistema dinámico en el que intervienen varios elementos y, entre ellos, los flujos monetarios. El propósito es centralizar las decisiones de caja para hacer el mejor uso de los excedentes de efectivo y cubrir los déficits de manera eficaz y eficiente. Todo lo cual se centra en decisiones de control que buscan transferir los saldos de efectivo hacia los elementos de acuerdo con los requerimientos, con las consideraciones de costo pertinentes; además del análisis de las variables de decisión relacionadas con el momento o frecuencia de las transferencias de efectivo y la cantidad de efectivo transferido. Concretamente, este trabajo propone un modelo para un SCFD que facilite el establecimiento de las reglas de transferencia de efectivo, los criterios de control y el programa integral de gestión de caja. Siguiendo a García *et al.* (2012), el modelo asume la existencia de retardos por trámite o traslado bancario. Por otra parte, respecto a los elementos que conforman el sistema, una cuenta bancaria desempeña el papel de cliente o proveedor; pero en lugar de una cadena de suministro, las cuentas bancarias forman una red. No obstante, los clientes de la compañía están en un extremo de la red y sus proveedores están en el otro extremo. Este enfoque abre perspectivas reales de investigación con la aplicación de técnicas de ingeniería de sistemas a problemas del campo de las finanzas vistos como sistemas dinámicos, cuyos elementos intercambian bienes o efectivo; con propuestas que combinan técnicas y herramientas de la teoría de control, articuladas por medio del uso de la transformada z y aplicadas a la planificación financiera empresarial de corto y largo plazo.

Con el fin de presentar un modelo que represente al SCFD, este documento se ha estructurado en cinco secciones. En primer lugar, esta sección introductoria (Sección 1), centrada en la descripción general del trabajo, el análisis bibliográfico y la propuesta de solución. Luego, la Sección 2 presenta los supuestos y detalles matemáticos del modelo propuesto utilizando ecuaciones en diferencias. La Sección 3 muestra una versión equivalente del modelo usando ecuaciones algebraicas, basado en la transformada z . También, incluye una revisión bibliográfica sobre la aplicación de técnicas de control en la gerencia de caja y el uso de técnicas de transformación en el ámbito financiero. La Sección 4 incluye la simulación del SCFD en varios escenarios hipotéticos para observar el comportamiento y funcionalidad del modelo. Por último en la sección 5, se dan las conclusiones del trabajo.

2. Modelado matemático del SCFD usando ecuaciones en diferencias

En el ámbito financiero, la banca ofrece a las empresas el servicio de sistemas para concentración de caja y desembolsos. Usualmente, este servicio incluye la operación de cuentas de ingresos y egresos con saldo cero (Cuentas de Saldo Cero, *Zero Balance Account – ZBA*). Esto es, se realizan las correspondientes transferencias hacia y desde la cuenta principal del SCFD para que, tanto las cuentas de ingresos como de egresos, al inicio de cada día inicien con saldo cero. Con propósitos de generalización, el modelo propuesto puede ser aplicado a este caso; pero también, cuando las políticas del banco no permiten cuentas de saldo cero o, por diferentes circunstancias, una empresa no desea o no le es posible los servicios de un único banco para la implantación de su SCFD.

Al efecto, esta investigación plantea el caso de una empresa genérica cuyas agencias están distribuidas geográficamente en diferentes regiones. Por un lado, la empresa realiza la cobranza a través de sus agencias y los clientes pueden utilizar distintas formas de pago (efectivo, tarjeta de débito, tarjeta de crédito, cheque o domiciliación bancaria). Por otro lado, para su operación cada agencia canaliza los pagos a los proveedores a través de cheques por concepto de insumos o servicios requeridos. El modelo asume la existencia de una cuenta principal operada centralizadamente y política de saldo mínimo; así como una cuenta de inversión a la que se transfiere el superávit de efectivo en la cuenta principal y una línea de crédito para cubrir los déficits de saldo en esa cuenta. Además, a cada agencia se le asigna una cuenta de ingresos y una de egresos. Adicionalmente, el modelo toma en consideración los diferentes cargos financieros por concepto de mantenimiento de efectivo, iliquidez y transferencia de fondos, así como de operación y gestión del sistema. Igualmente, la cuenta de inversión recibe los abonos por intereses ganados. El modelo representa el flujo del dinero entre los elementos identificados del SCFD y el flujo de requerimientos u órdenes de transferencia; todo ello sujeto a las reglas de operación y transferencia de efectivo entre cuentas.

La gráfica de la Figura 1 muestra cómo opera básicamente un SCFD. En ella, los elementos intervinientes en el sistema están identificados por j ($=0,1,\dots,13$). Los elementos externos representados son: (a) $j=0$, proveedores o beneficiarios de los cheques emitidos por la empresa para el pago de insumos o servicios. La presentación de dichos cheques al cobro (por taquilla o por cámara de compensación) activa el proceso; luego, el banco responde para satisfacer dicho requerimiento inmediatamente; (b) $j=12$, clientes a quienes la empresa cobra los productos o servicios prestados, que por su lado también activan el proceso; (c) $j=13$, un banco (la banca / varios bancos) que ofrece servicios financieros a la empresa.

Los elementos internos son las distintas cuentas bancarias que opera la empresa. La cuenta principal está representada por $j=5$ y opera centralizadamente; recibe las transferencias de los ingresos depositados en las cuentas de ingresos de cada agencia y, también, desde ella son transferidos los fondos para cubrir los sobregiros ocasionados por el pago de los cheques contra las cuentas de egresos de las agencias. Con $j=6$ se representa una cuenta de inversión a la cual se transfiere el superávit de efectivo de la cuenta principal. Por otra parte, $j=7$ identifica el movimiento del préstamo conforme a una línea de crédito contratada para cubrir los déficits de saldo en la cuenta principal. Como puede observarse, el SCFD podría ser modelado considerando en general

una empresa compuesta por K agencias. Sin embargo, tanto para la gráfica de la Figura 1 como para el posterior desarrollo del modelo, en este documento se asume una empresa cuya estructura incluye sólo $K=4$ agencias. Cada una de las agencias es identificada de dos maneras según la cuenta a la que se refiere, ya que opera una cuenta de ingresos y una de egresos. Con $j = 1,2,3,4$ se identifica la cuenta de egresos de la agencia j y con $j = 8,9,10,11$ se representa a las respectivas cuentas de ingresos. También, se ha previsto en esta gráfica la representación del pago de los cargos financieros en la cuenta principal y en las cuentas de egresos. Igualmente, la cuenta de inversión recibe los abonos por intereses ganados. Las líneas gruesas de la gráfica muestran el flujo del dinero entre los elementos del sistema y las líneas claras corresponden al flujo de requerimientos u órdenes de transferencia. En términos generales, entre cuentas por ejemplo, $\theta_{a,b}(t)$ (línea clara en la gráfica) representa la cantidad de dinero que a requiere de b al final del período de tiempo $t \in \mathbb{N}$, de acuerdo con las reglas de operación del SCFD. Esto es, debe hacerse una transferencia por el monto exigido desde la cuenta b hacia la cuenta a . Por su parte, $\beta_{b,a}(t)$ representa la cantidad de dinero transferido desde b hacia a al final del período de tiempo t . Asimismo, $L_{a,b} \in \mathbb{N}$ representa el tiempo que tarda en estar disponible en la cuenta a el dinero transferido desde la cuenta b . Es así como, asumiendo una nomenclatura equivalente a García *et al.* (2012, 2013), de manera general, se cumple:

$$\beta_{b,a}(t) = \theta_{a,b}(t - L_{a,b}) \quad (1)$$

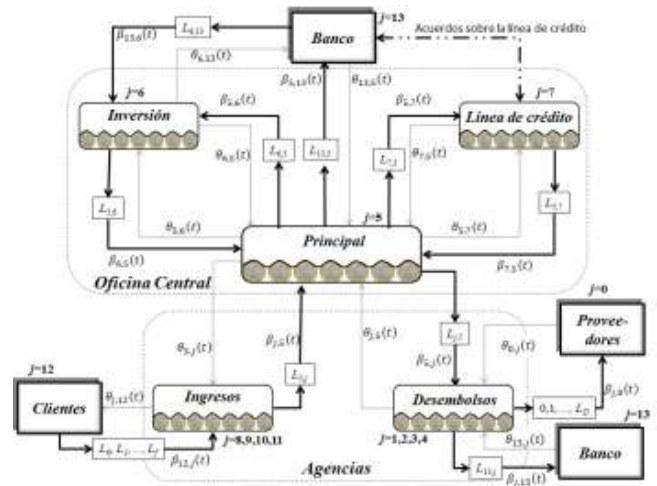


Figura 1: Representación gráfica de un Sistema de Concentración de Fondos y Desembolsos (SCFD)

Las excepciones a esta representación se dan en los casos de cobranza a los clientes y pago a proveedores y otros servicios, lo cual se explica más abajo. Es común también, fijar criterios con respecto al tamaño mínimo de las transferencias, sujeto a las políticas bancarias y de la empresa, que a su vez depende de los costos. Por esta razón, si MT es el tamaño mínimo de una transferencia, en adelante se asume que cualquier orden de transferencia entre dos cuentas a y b ha de cumplir con $\theta_{a,b}(t) \geq MT > 0$; caso contrario $\theta_{a,b}(t) = 0$.

En general, los detalles matemáticos relativos a cada una de los elementos o cuentas del SCFD corresponden a sus movimientos y saldos. Los movimientos son los débitos y créditos sobre una cuenta bancaria y se refieren a cobros, depósitos, pagos, retiros, transferencias, etc. Los saldos en las cuentas bancarias

normalmente son: saldo disponible, saldo diferido, saldo bloqueado y saldo total. Este último, en ocasiones llamado también real o actual. Al respecto y para los efectos de este trabajo, se definen las siguientes variables genéricas: (a) Saldo disponible $y_a^A(t)$, es la cantidad de dinero que refleja la cuenta bancaria a al final del periodo de tiempo t , como resultado de los movimientos ocurridos durante ese período, excluidos los saldos diferidos y bloqueados; (b) Saldo bloqueado $y_a^L(t)$, es la cantidad de dinero reflejado en la cuenta bancaria a al final del periodo de tiempo t , la cual fue debitada del saldo disponible en esa cuenta para ser transferida en conformidad con la orden de transferencia $\theta_{b,a}(t)$ (compensable / no completada) a una cuenta b . Una vez completada la orden ($\beta_{a,b}(t)$), esta cantidad estará disponible en la cuenta b , y restada del saldo bloqueado en la cuenta a ; (c) Saldo diferido $y_a^D(t)$, es la cantidad de dinero que refleja la cuenta bancaria a al final del periodo de tiempo t , producto de uno o más depósitos de dinero realizados en una forma distinta al efectivo, sobre la cual durante ese periodo los procedimientos bancarios no han garantizado su disponibilidad real del dinero que representa. Una vez se cumple esa garantía, junto con los procedimientos bancarios, el saldo diferido desaparece, sumándose al saldo disponible; (d) Saldo total $y_a^T(t)$, es la suma de los saldos disponible, bloqueado y diferido ($y_a^T(t) = y_a^A(t) + y_a^D(t) + y_a^L(t)$); (e) Saldo en libros de la empresa $y_a^B(t)$, es el saldo reflejado en la cuenta bancaria a al final del periodo de tiempo t de acuerdo con los registros contables de la empresa. Las diferencias que normalmente se dan entre los saldos en libros y los saldos en el banco tienen muy diversas causas, pero no son el tema del presente trabajo; no obstante por razones formales, más adelante se hace alusión a los saldos en libros en las cuentas de egresos ya que podrían ser una referencia controlable para el análisis del modelo propuesto, pues la empresa emite los cheques para pagar a sus proveedores.

A continuación, se presenta el desarrollo matemático de cada una de los elementos del SCFD. Esto es, las relaciones matemáticas que describen el comportamiento de cada una de las cuentas incluidas en el modelo.

2.1. Movimientos y saldos en las cuentas de ingresos

Los ingresos $I_j(t)$ de la agencia j ($= 8,9,10,11$) en el periodo t (normalmente un día) corresponden a los pagos realizados por sus clientes durante ese periodo, los cuales son depositados en una cuenta bancaria especial de ingresos j , más tardar al final de ese mismo periodo. En principio, al cierre del periodo t , los saldos disponibles de esta cuenta son transferidos a la cuenta principal. Habitualmente, los clientes realizan sus pagos en las siguientes formas: efectivo, tarjeta de débito, tarjeta de crédito, cheque, domiciliación bancaria o transferencias bancarias. No obstante, es posible ampliar el modelo a otras formas de pago, de tal manera que se ajuste a la realidad específica de aplicación. Con propósitos de simplificación y generalización, aquí se consideran $f+1$ formas de pago, cada una de ellas identificada por $m = 0, 1, 2, \dots, f$, y $L_m \in \mathbb{N}$ es el tiempo en tránsito o demora para la disponibilidad en la cuenta de ingresos, del dinero depositado según la forma de pago m . En este caso, $m=0$ corresponde a pagos en efectivo, cuya disponibilidad es inmediata en la cuenta al momento de hacerse el depósito; esto es, tiempo en tránsito $L_0 = 0$. Mientras que, atendiendo a los procedimientos bancarios, los depósitos relativos a pagos con tarjeta de débito, tarjeta de crédito, cheques, domiciliaciones, transferencias bancarias, etc., estarán disponibles $L_m \geq 0$ periodos después de realizado el depósito o transacción.

También por razones de simplificación, se asume que los cobros con cheque y efectivo durante el periodo t son depositados al final de ese mismo periodo. Por otro lado, para los efectos de este documento el comportamiento de la cobranza según la forma de pago m se ha previsto conforme al siguiente esquema discreto determinístico; sin embargo, el mismo puede ser modificado o adaptado si se aborda bajo supuestos aleatorios o difusos en nuevas investigaciones:

Sea u_m la porción de cobros realizados en función de la forma de pago m , para la cual se cumple: $0 \leq u_m \leq 1$ y $\sum_{m=0}^f u_m = 1$. De este modo, los ingresos totales del periodo t en la agencia j están dados por:

$$I_j(t) = \sum_{m=0}^f I_{m,j}(t), j = 8,9,10,11 \quad (2)$$

Siendo $I_{m,j}(t) = u_m I_j(t)$ el ingreso total de dinero en la cuenta de ingresos j de acuerdo con la forma de pago m durante el periodo t . Nótese que tampoco se ha supuesto nada en relación con la naturaleza estocástica o no de $I_j(t)$, pero en la aplicación del modelo y las pruebas podrán adoptarse criterios al respecto. Al considerar la nomenclatura de la gráfica de la Figura 1, se tiene:

$$\theta_{j,12}(t) = I_j(t), j = 8,9,10,11 \quad (3)$$

De allí que la cobranza estará disponible en la cuenta de ingresos de conformidad con la siguiente expresión:

$$\beta_{12,j}(t) = \sum_{m=0}^f [u_m I_j(t - L_m)], j = 8,9,10,11 \quad (4)$$

O, también:

$$\beta_{12,j}(t) = \sum_{m=0}^f [u_m \theta_{j,12}(t - L_m)], j = 8,9,10,11 \quad (5)$$

Por otra parte, sujeto a las reglas de operación del SCFD y en concordancia con las políticas establecidas, al final del periodo t se ordena en principio transferir efectivo disponible ($\theta_{5,j}(t)$) desde la cuenta de ingresos j hacia la cuenta principal. Según (1), este efectivo estará disponible en la cuenta principal $L_{5,j} \geq 0$ periodos después de la orden de transferencia. Esto es:

$$\beta_{j,5}(t) = \theta_{5,j}(t - L_{5,j}), j = 8,9,10,11 \quad (6)$$

De tal forma que el nuevo saldo de efectivo disponible al final del periodo t en la cuenta de ingresos j es: $y_j^A(t) = y_j^A(t-1) + \beta_{12,j}(t) - \theta_{5,j}(t)$. Es decir, al sustituir por (5):

$$y_j^A(t) = y_j^A(t-1) + \sum_{m=0}^f [u_m \theta_{j,12}(t - L_m)] - \theta_{5,j}(t), j = 8,9,10,11 \quad (7)$$

Debido a lo anterior, al final del periodo t el saldo disponible en la cuenta principal se incrementa de acuerdo con (6). Por otro lado, cada orden de transferencia se suma al saldo bloqueado al final del periodo t en la cuenta de ingresos j , sujeto al retardo por traslado bancario ($L_{5,j}$). El nuevo saldo bloqueado es: $y_j^L(t) = y_j^L(t-1) + \theta_{5,j}(t) - \beta_{j,5}(t)$, o bien:

$$y_j^L(t) = y_j^L(t-1) + \theta_{5,j}(t) - \theta_{5,j}(t - L_{5,j}), j = 8,9,10,11 \quad (8)$$

Por su parte, el saldo diferido en la cuenta de ingresos j se corresponde con: $y_j^D(t) = y_j^D(t-1) + \theta_{j,12}(t) - \beta_{12,j}(t)$, o lo que es lo mismo, al considerar (5):

$$y_j^D(t) = y_j^D(t-1) + \theta_{j,12}(t) - \sum_{m=0}^f [u_m \theta_{j,12}(t - L_m)], j = 8,9,10,11 \quad (9)$$

El saldo total en la cuenta de ingresos j es la suma de los saldos disponible, diferido y bloqueado: $y_j^T(t) = y_j^A(t) + y_j^D(t) + y_j^L(t)$. El cual, luego de sustituir por (7), (8) y (9), resulta en:

$$y_j^T(t) = y_j^T(t-1) + \theta_{j,12}(t) - \theta_{5,j}(t - L_{5,j}),$$

$$j = 8,9,10,11 \quad (10)$$

2.2. Movimientos y saldos en las cuentas de egresos

Los egresos en las agencias durante el período t están representados por $O_j(t)$ ($j = 1,2,3,4$). Estos egresos corresponden a los cheques emitidos a favor de los proveedores (beneficiarios) durante el período t contra una cuenta bancaria especial de egresos de la agencia. Es así como, para los efectos del modelo y con ajuste en la nomenclatura expresada en la gráfica (Figura 1):

$$\theta_{0,j}(t) = O_j(t), j = 1,2,3,4 \quad (11)$$

Los cheques emitidos por las agencias son presentados al cobro por parte de sus beneficiarios en un proceso no controlado por la empresa, ya sea por taquilla el mismo día o en días posteriores a la emisión o por cámara de compensación. Cada caso es particular, dando origen a una variabilidad interesante sobre el tiempo en tránsito de un cheque emitido. En consecuencia, se define el número de días o períodos en tránsito de un cheque como la cantidad de períodos transcurridos desde su emisión hasta su presentación al cobro en el banco. Para propósitos de este trabajo, se supone que los cheques son presentados al cobro de acuerdo con el siguiente esquema discreto determinístico: (a) Número de períodos en tránsito: n ($= 0,1,2, \dots, L_D$); (b) Porción de fondos en tránsito en función de n : v_n , con $0 \leq v_n \leq 1$ y $\sum_{n=0}^{L_D} v_n = 1$. No obstante, este esquema también podrá ser adaptado o modificado a un esquema aleatorio o difuso en nuevas investigaciones. En razón de este supuesto, el efectivo requerido al exigirse el pago de los cheques a su presentación en el banco, ya sea por taquilla o por cámara de compensación, responde a la siguiente expresión:

$$\beta_{j,0}(t) = \sum_{n=0}^{L_D} [v_n \theta_{0,j}(t-n)], j = 1,2,3,4 \quad (12)$$

Esta expresión determina el sobregiro en el período t , debido a los cheques presentados por los beneficiarios contra la cuenta de egresos de la agencia j . A su vez, en principio, el sobregiro es cubierto al final del período con una orden de transferencia ($\theta_{j,5}(t)$) desde la cuenta principal. El monto transferido estará disponible después de $L_{j,5}$ períodos en la cuenta de egresos j . Por tanto:

$$\beta_{5,j}(t) = \theta_{j,5}(t - L_{j,5}), j = 1,2,3,4 \quad (13)$$

De acuerdo con esto, el saldo disponible en la cuenta de egresos j registrado en los libros de la empresa al final del período t , está dado por: $y_j^B(t) = y_j^B(t-1) + \beta_{5,j}(t) - \theta_{0,j}(t)$. El cual, al sustituir por (13), equivale a:

$$y_j^B(t) = y_j^B(t-1) + \theta_{j,5}(t - L_{j,5}) - \theta_{0,j}(t),$$

$$j = 1,2,3,4 \quad (14)$$

No obstante, para efectos de conciliación bancaria, el saldo disponible registrado en el banco en la cuenta de egresos j es:

$$y_j^A(t) = y_j^A(t-1) + \beta_{5,j}(t) - \beta_{j,0}(t) - \theta_{13,j}(t),$$

$$j = 1,2,3,4 \quad (15)$$

Donde $\theta_{13,j}(t)$ equivale al cargo financiero para una cuenta de egresos sobregirada (Apéndice A). Obsérvese que por este concepto, la empresa sólo actualiza $y_j^B(t)$ cuando el banco se lo informa por medio de la respectiva nota de débito.

Al sustituir (12) y (13) en (15), se tiene:

$$y_j^A(t) = y_j^A(t-1) + \theta_{j,5}(t - L_{j,5})$$

$$- \sum_{n=0}^{L_D} [v_n \theta_{0,j}(t-n)] - \theta_{13,j}(t), j = 1,2,3,4 \quad (16)$$

Debido a la forma como opera, en teoría, una cuenta de egresos no tiene saldos diferidos o bloqueados. Por esta razón, el saldo total al final del período t es:

$$y_j^T(t) = y_j^A(t), j = 1,2,3,4 \quad (17)$$

2.3. Movimientos y saldos en la cuenta principal del SCFD

Al final de cada período t , el saldo en la cuenta principal aumenta por las transferencias de los saldos disponibles desde las cuentas de ingresos y disminuye por las transferencias para cubrir los sobregiros de las cuentas de egresos. Por lo tanto, debido a las operaciones ordinarias de la empresa, el nuevo saldo disponible en la cuenta principal tiene la expresión:

$$D(t) = y_5^A(t-1) + \sum_{j=8}^{11} \beta_{j,5}(t) - \sum_{j=1}^4 \theta_{j,5}(t) \quad (18)$$

Es decir, por aplicación de (1):

$$D(t) = y_5^A(t-1) + \sum_{j=8}^{11} [\theta_{5,j}(t - L_{5,j})] - \sum_{j=1}^4 \theta_{j,5}(t) \quad (19)$$

Donde $y_5^A(t-1)$ es el saldo de efectivo disponible en la cuenta principal al final del período anterior.

Sin embargo, existen otros movimientos en esta cuenta. Por un lado, la empresa establece una política de saldo mínimo M en la cuenta principal. Por el otro, se tiene una cuenta de inversiones a la que son transferidos los superávits de caja expresados en la cuenta principal y una línea de crédito para cubrir los déficits de saldo en la cuenta. También, el banco debita de la cuenta principal los cargos financieros por sobregiro y transferencias de fondos, así como los costos generales de operación y gestión del SCFD. En el Apéndice A se muestran los detalles relativos al análisis de los cargos financieros centrales involucrados, cuyo total en el período t se expresa por $O_F(t)$. No obstante, para ajustarse a la nomenclatura de la Figura 1, este cargo financiero equivale a:

$$\theta_{13,5}(t) = O_F(t) \quad (20)$$

Luego, al considerar los cargos financieros representados en (20), la expresión en (19) puede ajustarse así:

$$D(t) = y_5^A(t-1)$$

$$+ \sum_{j=8}^{11} [\theta_{5,j}(t - L_{5,j})] - \sum_{j=1}^4 \theta_{j,5}(t) - \theta_{13,5}(t) \quad (21)$$

De este modo, cuando $D(t) - M > 0$, se dice que existe un superávit de caja (saldo disponible) por las operaciones ordinarias de la empresa con respecto al saldo mínimo: En el caso contrario ($D(t) - M < 0$), se dice que existe un déficit.

Un superávit en la cuenta principal permite realizar dos movimientos: (a) Una transferencia a la cuenta de inversión ($\theta_{6,5}(t)$) para obtener un beneficio en lugar de mantener el efectivo ocioso; (b) Un abono o pago de deuda en la línea de crédito ($\theta_{7,5}(t)$) para disminuir el costo financiero. Estas decisiones se harán efectivas, respectivamente, de acuerdo con:

$$\beta_{5,6}(t) = \theta_{6,5}(t - L_{6,5}) \quad (22)$$

$$\beta_{5,7}(t) = \theta_{7,5}(t - L_{7,5}) \quad (23)$$

Como puede observarse, un superávit determina que no hay movimiento de saldos hacia la cuenta principal desde la cuenta de inversión o desde la línea de crédito. Esto es: $\theta_{5,6}(t) = 0$ y $\theta_{5,7}(t) = 0$. Por otra parte, un déficit en la cuenta principal ($D(t) - M < 0$), podrá ser cubierto desde la cuenta de inversión ($\theta_{5,6}(t)$) o desde la línea de crédito ($\theta_{5,7}(t)$). En este caso, también se tiene que la disponibilidad de estas transferencias en la cuenta principal, respectivamente, está dado por:

$$\beta_{6,5}(t) = \theta_{5,6}(t - L_{5,6}) \quad (24)$$

$$\beta_{7,5}(t) = \theta_{5,7}(t - L_{5,7}) \quad (25)$$

Asimismo, un déficit determina que no hay movimiento de saldos desde la cuenta principal hacia la cuenta de inversión o hacia la línea de crédito. Esto es: $\theta_{6,5}(t) = 0$ y $\theta_{7,5}(t) = 0$. En definitiva, el nuevo saldo disponible al final del período t en la cuenta principal se expresa así:

$$y_5^A(t) = D(t) + \beta_{6,5}(t) + \beta_{7,5}(t) - \theta_{6,5}(t) - \theta_{7,5}(t) \quad (26)$$

Luego, al sustituir por (24), (25) y (21), se produce la siguiente expresión para el efectivo disponible en la cuenta principal:

$$\begin{aligned} y_5^A(t) = & y_5^A(t-1) + \sum_{j=8}^{11} [\theta_{5,j}(t - L_{5,j})] \\ & - \sum_{j=1}^4 \theta_{j,5}(t) - \theta_{13,5}(t) + \theta_{5,6}(t - L_{5,6}) \\ & + \theta_{5,7}(t - L_{5,7}) - \theta_{6,5}(t) - \theta_{7,5}(t) \end{aligned} \quad (27)$$

Por otro lado, el saldo bloqueado en la cuenta principal al final del período t está dado por:

$$\begin{aligned} y_5^L(t) = & y_5^L(t-1) + \sum_{j=1}^4 [\theta_{j,5}(t) - \beta_{5,j}(t)] \\ & + \theta_{13,5}(t) - \beta_{5,13}(t) + \theta_{6,5}(t) \\ & - \beta_{5,6}(t) + \theta_{7,5}(t) - \beta_{5,7}(t) \end{aligned} \quad (28)$$

Sin embargo, de acuerdo con (13), (22), (23) y en general asumiendo (1), el saldo bloqueado en la cuenta principal al final del período t queda expresado por:

$$\begin{aligned} y_5^L(t) = & y_5^L(t-1) + \sum_{j=1}^4 [\theta_{j,5}(t) - \theta_{j,5}(t - L_{j,5})] \\ & + \theta_{13,5}(t) - \theta_{13,5}(t - L_{13,5}) + \theta_{6,5}(t) \\ & - \theta_{6,5}(t - L_{6,5}) + \theta_{7,5}(t) - \theta_{7,5}(t - L_{7,5}) \end{aligned} \quad (29)$$

Por su parte, el saldo total de la cuenta principal al final del período t es: $y_5^T(t) = y_5^A(t) + y_5^L(t)$. (No existe saldo diferido).

El cual, después de sustituir por (27) y (29) resulta en:

$$\begin{aligned} y_5^T(t) = & y_5^T(t-1) + \sum_{j=8}^{11} [\theta_{5,j}(t - L_{5,j})] \\ & + \theta_{5,6}(t - L_{5,6}) + \theta_{5,7}(t - L_{5,7}) \\ & - \sum_{j=1}^4 [\theta_{j,5}(t - L_{j,5})] - \theta_{13,5}(t - L_{13,5}) \\ & - \theta_{6,5}(t - L_{6,5}) - \theta_{7,5}(t - L_{7,5}) \end{aligned} \quad (30)$$

2.4. Movimientos y saldos en la cuenta de inversiones:

Los ingresos financieros durante el período t debido a la inversión en la cuenta de inversión están dados por $I_F(t)$ (ver

Apéndice A). Pero, para ajustarse a la nomenclatura expresada en la gráfica de la Figura 1, el abono por ingresos financieros equivale a:

$$\theta_{6,13}(t) = I_F(t) \quad (31)$$

Por su parte, el saldo de efectivo disponible en la cuenta de inversión al final del período t se expresa por: $y_6^A(t) = y_6^A(t-1) + \beta_{5,6}(t) + \beta_{13,6}(t) - \theta_{5,6}(t)$. Pero de acuerdo con (1), esta expresión es equivalente a:

$$\begin{aligned} y_6^A(t) = & y_6^A(t-1) + \theta_{6,5}(t - L_{6,5}) \\ & + \theta_{6,13}(t - L_{6,13}) - \theta_{5,6}(t) \end{aligned} \quad (32)$$

Por otro lado, el saldo bloqueado en la cuenta de inversión tiene la siguiente expresión: $y_6^L(t) = y_6^L(t-1) + \theta_{5,6}(t) - \beta_{6,5}(t)$. Es decir, conforme a (24):

$$y_6^L(t) = y_6^L(t-1) + \theta_{5,6}(t) - \theta_{5,6}(t - L_{5,6}) \quad (33)$$

Finalmente, el saldo total en la cuenta de inversión se expresa así: $y_6^T(t) = y_6^A(t) + y_6^L(t)$ (no hay saldo diferido). El cual, al sustituir por (32) y (33), queda:

$$\begin{aligned} y_6^T(t) = & y_6^T(t-1) + \theta_{6,5}(t - L_{6,5}) \\ & + \theta_{6,13}(t - L_{6,13}) - \theta_{5,6}(t - L_{5,6}) \end{aligned} \quad (34)$$

2.5. Movimientos y saldos en la cuenta del préstamo – línea de crédito

El saldo del préstamo es: $y_7^A(t) = y_7^A(t-1) - \beta_{5,7}(t) + \theta_{5,7}(t)$. Pero, por aplicación de (1) se transforma en:

$$y_7^A(t) = y_7^A(t-1) - \theta_{7,5}(t - L_{7,5}) + \theta_{5,7}(t) \quad (35)$$

También, el modelo supone la existencia de montos aprobados según el convenio de la línea de crédito, que debido a los retardos por trámite bancario no han sido liquidados, es decir, no acreditados en la cuenta principal. Al saldo resultante de estos montos ($y_7^L(t)$) se le da un tratamiento equivalente al de los montos bloqueados. No obstante, este saldo forma parte del saldo del préstamo ($y_7^A(t)$). Esto es: $y_7^L(t) = y_7^L(t-1) + \theta_{5,7}(t) - \beta_{7,5}(t)$, y al aplicar (1), queda:

$$y_7^L(t) = y_7^L(t-1) + \theta_{5,7}(t) - \theta_{5,7}(t - L_{5,7}) \quad (36)$$

Para finalizar, si R es el límite superior de la línea de crédito, su disponibilidad se expresa por:

$$A_7(t) = R - y_7^A(t) \quad (37)$$

Este modelo del SCFD compuesto por varias ecuaciones en diferencias ha sido resuelto por los autores en el dominio del tiempo, por lo que en la Sección 4 se muestra el comportamiento del modelo de acuerdo con las simulaciones realizadas. No obstante, en la próxima sección se presenta una versión equivalente del mismo basada en la aplicación de la transformada z , con el fin de promover la utilización del modelo en combinación con técnicas de control.

3. Modelo equivalente usando técnicas de transformación

Con el propósito de convertir el modelo en uno equivalente conformado por ecuaciones algebraicas, a continuación se aplica la transformada z (Ogata, 1996) para representar los saldos

disponibles del modelo propuesto en la sección anterior. Esta transformación pretende abrir la posibilidad de aplicar rigurosas y avanzadas técnicas de Teoría de Control y su uso en el área de las finanzas. En un comienzo, Sethi y Thompson (1970) introducen la teoría de control moderno al campo de las finanzas. También, Vasconcellos (1988), Premachandra (2004), Bar-Ilan *et al.* (2004), Baccarin (2009), Liang y Sun (2011), Cerqueti (2012) y Song *et al.* (2013), enfocan sus propuestas sobre gestión de caja como un problema de control óptimo.

Estas investigaciones muestran la factibilidad técnica y conceptual de aplicar teorías y técnicas de control al área financiera y este trabajo abre mayores perspectivas aplicando la transformada z al tipo de modelo aquí propuesto. El tema de las técnicas de transformación se ha tratado en trabajos anteriores en la formulación de modelos financieros; principalmente, la transformada de Fourier, cuyo uso es muy extendido en modelos para la valoración de opciones financieras. Por una parte, véase el trabajo de Buser (1986), quien presenta modelos simplificados equivalentes de la ecuación de valor presente y muestra cómo aumenta la capacidad de representación y resolución matemática de dichos modelos fundamentados en la transformación de Laplace. Asimismo, al adoptar el principio de valor presente neto (Net Present Value – NPV), la transformada de Laplace se ha utilizado junto con el análisis insumo-producto para la representación y tratamiento teórico en problemas de Planificación de requerimientos de material (Material Requirements Planning – MRP) (Grubbstrom, 1998, 1999; Grubbstrom y Tang, 1999) y en sistemas de producción-inventario (Grubbstrom y Huynh, 2006). También, Naim *et al.* (2007) utilizan transformadas de Laplace junto con el concepto de valor presente neto para seleccionar los parámetros en la política de ordenamiento en un sistema de planificación y control de la producción. Por otra parte, Duffy (2006) discute ampliamente las técnicas de transformación de Laplace y de Fourier aplicadas a la ecuación de Calor (Heat equation), vista su popularidad en ingeniería financiera y su relación con la ecuación de Black-Scholes, de fundamental importancia en la formulación de modelos para la valoración de opciones financieras en tiempo real. Igualmente, basado en su importancia computacional, Cerny (2006, 2009) explica el funcionamiento de la transformada discreta de Fourier (Discrete Fourier Transform - DFT) y su algoritmo de implementación, la transformada rápida de Fourier (Fast Fourier Transform - FFT), en el modelo binomial de valoración de opciones. Por lo demás, al presentar algunas aplicaciones de la transformada rápida de Fourier hace referencia a la transformada discreta de Fourier como un caso especial de la transformada z . Entre otros trabajos que abordan el enfoque de la transformada de Fourier para la valoración de opciones financieras se encuentran: Carr y Madan (1999), Lee (2004), Carr y Wu (2004) y Chourdakis (2005); así como para la valoración de opciones spread: Dempster y Hong (2002) y Hurd y Zhou (2010); para el cálculo de valores en riesgo Albanese *et al.* (2004) y para la valoración de riesgo Cerny (2004). El enfoque de la transformada z también ha sido abordado por Fusai *et al.* (2012) en la resolución de ecuaciones propias de la valoración de opciones financieras, en relación con lo cual consideran diferentes procedimientos de cuadratura que permiten la solución de un sistema lineal mediante algoritmos iterativos en lugar de algoritmos recursivos. En su libro, Fusai y Roncoroni (2008) ilustran el uso de la transformada de Laplace y la transformada z para la valoración de opciones financieras y utilizan la transformada rápida de Fourier en procedimientos para establecer

precios swaps. Adicionalmente, Boissard (2012) aplica las propiedades de la transformada z en la investigación de estrategias de inversión. Su trabajo tiene el propósito de determinar tendencias en series de tiempo para el pronóstico de la varianza mediante promedios móviles; luego, calcula el valor en riesgo. Por último, Cui *et al.* (2013) desarrollan un método basado en la transformada z para resolver sistemas multidimensionales “linealizados” de tiempo discreto, los cuales pueden ser utilizados para analizar los efectos de las políticas sobre la economía.

Ninguno de estos trabajos se refiere al uso de las técnicas de transformación en la formulación de modelos para la administración de efectivo y la planificación y control del activo circulante. Por esta razón, el uso de técnicas de ingeniería de sistemas en modelos de simulación para sistemas de concentración de fondos y desembolsos (SCFD), en combinación con la aplicación de la transformada z , no se ha tratado antes en la literatura. En consecuencia, los autores lo consideran un aporte novedoso que abre perspectivas para estudiar la aplicación de técnicas de control en nuevas investigaciones.

Vista esta discusión bibliográfica, a continuación se presenta el modelo equivalente luego de aplicar las propiedades de la transformada z (propiedad de desplazamiento de tiempo). En resumen se obtiene:

De (7), el saldo disponible en las cuentas de ingresos:

$$y_j^A(z) = [\sum_{m=0}^f (u_m z^{-L_m}) \cdot \theta_{j,12}(z)] / (1 - z^{-1}) - \theta_{5,j}(z) / (1 - z^{-1}), j = 8,9,10,11 \quad (38)$$

De (16), el saldo disponible en las cuentas de egresos:

$$y_j^A(z) = [z^{-L_{j,5}} \cdot \theta_{j,5}(z)] / (1 - z^{-1}) - [\sum_{n=0}^{L_D} (v_n z^{-n}) \cdot \theta_{0,j}(z)] / (1 - z^{-1}) - \theta_{13,j}(z) / (1 - z^{-1}), j = 1,2,3,4 \quad (39)$$

De (27), el saldo disponible en la cuenta de principal:

$$y_5^A(z) = \sum_{j=8}^{11} [z^{-L_{5,j}} \cdot \theta_{5,j}(z) / (1 - z^{-1})] - \sum_{j=1}^4 [\theta_{j,5}(z) / (1 - z^{-1})] - \theta_{13,5}(z) / (1 - z^{-1}) + [z^{-L_{5,6}} \cdot \theta_{5,6}(z)] / (1 - z^{-1}) + [z^{-L_{5,7}} \cdot \theta_{5,7}(z)] / (1 - z^{-1}) - \theta_{6,5}(z) / (1 - z^{-1}) - \theta_{7,5}(z) / (1 - z^{-1}) \quad (40)$$

De (32), el saldo disponible en la cuenta de inversión:

$$y_6^A(z) = [z^{-L_{6,5}} \cdot \theta_{6,5}(z)] / (1 - z^{-1}) + [z^{-L_{6,13}} \cdot \theta_{6,13}(z)] / (1 - z^{-1}) - \theta_{5,6}(z) / (1 - z^{-1}) \quad (41)$$

De (35), el saldo del préstamo - línea de crédito:

$$y_7^A(z) = - [z^{-L_{7,5}} \cdot \theta_{7,5}(z)] / (1 - z^{-1}) + \theta_{5,7}(z) / (1 - z^{-1}) \quad (42)$$

Es claro que para determinar la naturaleza de las variables en este modelo podrían utilizarse diferentes criterios. No obstante para los efectos de esta investigación, se asume como determinante el objetivo central de un SCFD, el cual es, una vez recogido el dinero, “concentrar el efectivo en una sola cuenta bancaria, llamada cuenta principal o maestra, con el propósito de tener el control completo de la caja y proporcionar mayores oportunidades de inversión con grandes sumas de dinero disponibles que se encuentren excedentes. Esto es, maximizar la

disponibilidad de dinero en efectivo no invertido en activos fijos o inventarios y, por ende, evitar el riesgo de insolvencia y mejorar la rentabilidad". Este objetivo deja muy en claro varios aspectos del modelo. En primer lugar, se define la naturaleza de las variables en concordancia con la naturaleza de cada cuenta. En segundo lugar, permite determinar las variables de referencia en relación con el nivel de efectivo deseado en cada cuenta. En tercer lugar, sugiere la dinámica del modelo en cuanto a las acciones de control y, por último, aclara la naturaleza de las entradas del modelo como variables de perturbación que afectan en distintas formas los niveles de efectivo disponible en las cuentas. Por ello, se establece el siguiente esquema para la clasificación de las variables que intervienen:

Para cada cuenta de ingresos $j = 8, \dots, 11$: (a) La variable a controlar es el saldo disponible $y_j^A(z)$; (b) La referencia es $S_j(z) = 0$, el valor deseado para este tipo de cuenta; (c) La acción de control es la orden de transferencia hacia la cuenta principal $\theta_{5,j}(z)$, que exige retornar el saldo disponible al valor de referencia. En principio, esta orden de transferencia se origina en la agencia y, luego, es comunicada a la gerencia central de la empresa; (d) Los ingresos $\theta_{j,12}(z)$ se consideran como variable de perturbación ya que dependen de las decisiones de los clientes de la empresa. Bajo el supuesto de que cada agencia tiene muchos clientes, su número no afecta la dinámica de esta parte del sistema (Lin *et al.*, 2004). Debido a esto, todos los ingresos se pueden agrupar como un ingreso agregado, lo cual se complementa con el esquema discreto determinístico, explicado más arriba, acerca de la disponibilidad del efectivo en función de la forma de pago usada por el cliente.

Para cada cuenta de egresos $j = 1, \dots, 4$: (a) La variable a controlar es el saldo disponible $y_j^A(z)$, que en este caso corresponde a un sobregiro; (b) La referencia es $S_j(z) = 0$, el valor deseado para este tipo de cuenta; (c) La acción de control es la orden de transferencia desde la cuenta principal $\theta_{j,5}(z)$ que busca cubrir el sobregiro en la cuenta y retornar el saldo al valor de referencia. En principio, la información para la transferencia se tiene en la agencia; luego, es comunicada a la gerencia central de la empresa y, de esta manera, se hace efectiva la orden desde la cuenta principal; (d) La perturbación corresponde a: (i) Los egresos $\theta_{0,j}(z)$; ya que depende de las exigencias de los proveedores de la empresa. Aquí también, bajo el supuesto de que cada agencia tiene muchos proveedores, su número no afecta la dinámica de esta parte del sistema, por ello todos los egresos se pueden agrupar como un egreso agregado, lo cual, igualmente, se complementa con el esquema discreto determinístico, expuesto en la Sección 2, sobre el proceso de presentación de los cheques al cobro por parte de los beneficiarios; (ii) Los cargos financieros por sobregiro en la cuenta de egresos $\theta_{13,j}(z)$, debido a la naturaleza no controlable de su variabilidad.

Para la cuenta principal $j = 5$: (a) La variable a controlar es el saldo disponible $y_5^A(z)$; (b) La referencia es $S_5(z) = M$ (saldo mínimo), el valor deseado para este tipo de cuenta; (c) Las siguientes acciones de control buscan retornar el saldo de la cuenta principal al valor de referencia: (i) Transferencia hacia la cuenta de inversión $\theta_{6,5}(z)$ para obtener ganancias con los excedentes de efectivo ocioso (por encima de M); (ii) Transferencia desde la cuenta de inversión $\theta_{5,6}(z)$ o cobertura a través de la línea de crédito $\theta_{5,7}(z)$ para evitar déficit de saldo en la cuenta principal (por debajo de M); (iii) Abono a la línea de crédito $\theta_{7,5}(z)$ con el fin de disminuir el costo financiero de la

línea de crédito, también, cuando el saldo disponible de la cuenta principal está por encima de M ; (d) La perturbación se da de acuerdo con: (i) Las transferencias de efectivo hacia las cuentas de egresos $\theta_{j,5}(z)$, ya que dependen de los requerimientos de las agencias; (ii) Las transferencias recibidas desde las cuentas de ingresos $\theta_{5,j}(z)$, ya que dependen de la disponibilidad de efectivo en las agencias; (iii) Los cargos financieros por sobregiro y transferencias de fondos, así como los costos generales de operación y gestión del SCFD, cuyo total se representa por $\theta_{13,5}(z)$, ya que, no obstante algunos de sus parámetros están predeterminados, su variabilidad es de naturaleza no controlable.

Para la cuenta de inversión $j = 6$: (a) La variable a controlar es el saldo en la cuenta de inversión $y_6^A(z)$; (b) La referencia es $S_6(z) = M_6$, un valor suficientemente grande en función de la ganancia esperada por la empresa; (c) La acción de control es la orden de transferencia desde la cuenta principal $\theta_{6,5}(z)$ que busca aumentar la inversión para obtener mayores ganancias; (d) La perturbación se establece de conformidad con: (i) Las transferencias exigidas por la cuenta principal $\theta_{5,6}(z)$ para cubrir déficits de efectivo, ya que dependen de los movimientos netos debido a las operaciones ordinarias de la empresa reflejados en la cuenta principal del SCFD; (ii) Los ingresos financieros $\theta_{6,13}(z)$, ya que, no obstante están en función del saldo en la cuenta de inversión, su variabilidad depende del tipo de interés, no controlada por la empresa.

Para la línea de crédito $j = 7$: (a) La variable a controlar es el saldo del préstamo $y_7^A(z)$; (b) La referencia es $S_7(z) = 0$, se espera que a menor deuda menor es el costo financiero; (c) La acción de control corresponde con el abono o pago de deuda en la línea de crédito $\theta_{7,5}(z)$ que busca disminuir la deuda para reducir los costos financieros; (d) La perturbación es la solicitud de efectivo a la línea de crédito $\theta_{5,7}(z)$ para cubrir déficits de efectivo en la cuenta principal, ya que dependen de los movimientos netos debido a las operaciones ordinarias de la empresa.

Nótese que las ecuaciones (38) a (42) representan relaciones inestables entre las variables, lo cual es uno de los problemas presentes en la gestión del sistema financiero bajo consideración y que también aparecen en otros problemas como la gestión de inventario en cadenas de suministro (García *et al.*, 2012). Para simplificar, en el resto de este trabajo se usará la relación:

$$p(z) = 1/(1 - z^{-1}) \quad (43)$$

También, debido al supuesto sobre las formas de pago de los clientes y el tiempo en tránsito de los cheques, las expresiones $v(z) = \sum_{n=0}^{L_D} (v_n z^{-n})$ y $u(z) = \sum_{m=0}^f (u_m z^{-L_m})$ no comprometen en principio la complejidad del modelo. Estas expresiones sólo representan una distribución determinística del valor de una variable de entrada en varios períodos de tiempo a futuro.

Visto lo anterior, como resultado se tiene el siguiente modelo en forma matricial ((44) a (68)) para representar los saldos disponibles en el SCFD, en el que, debido a su tamaño, algunas de las matrices se han dividido en bloques:

$$\mathbf{Y}^A(z) = \mathbf{M}(z)\mathbf{U}(z) + \text{Perturbaciones} \quad (44)$$

Donde $\mathbf{Y}^A(z)$, es la salida observada, $\mathbf{U}(z)$ es el conjunto de variables de control y $\mathbf{M}(z)$ es la matriz de dinámica del sistema que representa el comportamiento del sistema, factorizada usando $p(z)$ y el producto de Schur (o componente a componente) (Dennis, 2009) $\mathbf{E} \circ \mathbf{L}(z)$.

$$\mathbf{Y}^A(z) = (y_1^A(z) \ y_2^A(z) \ \cdots \ y_{11}^A(z))^t \quad (45)$$

$$\mathbf{M}(z) = p(z)[\mathbf{E} \circ \mathbf{L}(z)] \quad (46)$$

$$\mathbf{U}(z) =$$

$$(\theta_{1,5}(z) \ \cdots \ \theta_{4,5}(z) \ \theta_{5,6}(z) \ \cdots \ \theta_{5,11}(z) \ \theta_{6,5}(z) \ \theta_{7,5}(z))^t \quad (47)$$

Los factores en (46) son:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1(z) & \mathbf{0}_{4 \times 2} & \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{E}_2(z) & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{E}_4(z) \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{0}_{4 \times 2} & \mathbf{E}_3(z) & \mathbf{0}_{4 \times 2} \end{pmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{E}_1(z) = \mathbf{I}_{4 \times 4} \quad \mathbf{E}_2(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (49)$$

$$\mathbf{E}_3(z) = \mathbf{I}_{4 \times 4} \quad \mathbf{E}_4(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$\mathbf{L}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1(z) & \mathbf{0}_{4 \times 2} & \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{L}_2(z) & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{L}_4(z) \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{0}_{4 \times 2} & \mathbf{L}_3(z) & \mathbf{0}_{4 \times 2} \end{pmatrix} \quad (51)$$

$$\mathbf{L}_1(z) = \begin{pmatrix} z^{-L_{1,5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-L_{2,5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{-L_{3,5}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-L_{4,5}} \end{pmatrix} \quad (52)$$

$$\mathbf{L}_2(z) = \begin{pmatrix} z^{-L_{5,6}} & z^{-L_{5,7}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (53)$$

$$\mathbf{L}_3(z) = -\mathbf{I}_{4 \times 4} \quad (54)$$

$$\mathbf{L}_4(z) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ z^{-L_{6,5}} & 0 \\ 0 & -z^{-L_{7,5}} \end{pmatrix} \quad (55)$$

Donde $\mathbf{I}_{4 \times 4}$ es una matriz identidad de 4×4 y $\mathbf{0}_{p \times q}$ una matriz de $p \times q$ con todas las entradas iguales a cero.

Por último, las perturbaciones tienen la siguiente configuración matricial:

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{B}(z)\mathbf{O}(z) \quad (56)$$

Donde:

$$\mathbf{B}(z) = p(z)\mathbf{D}(z) \quad (57)$$

$$\mathbf{O}(z) = (\theta_1(z) \ \theta_2(z) \ \theta_3(z) \ \theta_4(z) \ \theta_5(z))^t \quad (58)$$

$$\theta_1(z) = (\theta_{0,1}(z) \ \cdots \ \theta_{0,4}(z))^t \quad (59)$$

$$\theta_2(z) = (\theta_{1,5}(z) \ \cdots \ \theta_{4,5}(z) \ \theta_{5,6}(z) \ \cdots \ \theta_{5,11}(z) \ \theta_{6,13}(z))^t \quad (60)$$

$$\theta_3(z) = (\theta_{8,12}(z) \ \cdots \ \theta_{11,12}(z))^t \quad (61)$$

$$\theta_4(z) = (\theta_{13,1}(z) \ \cdots \ \theta_{13,4}(z))^t \quad (62)$$

$$\theta_5(z) = \theta_{13,5}(z) \quad (63)$$

$$\mathbf{D}(z) =$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_1(z) & \mathbf{0}_{4 \times 11} & \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{D}_4(z) & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{D}_2(z) & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{D}_5(z) \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{0}_{4 \times 11} & \mathbf{D}_3(z) & \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{0}_{4 \times 1} \end{pmatrix} \quad (64)$$

$$\mathbf{D}_1(z) = -v(z)\mathbf{I}_{4 \times 4} \quad (65)$$

$$\mathbf{D}_2(z) =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & z^{-L_{5,8}} & z^{-L_{5,9}} & z^{-L_{5,10}} & z^{-L_{5,11}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-L_{6,13}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (66)$$

$$\mathbf{D}_3(z) = u(z)\mathbf{I}_{4 \times 4} \quad \mathbf{D}_4(z) = -\mathbf{I}_{4 \times 4} \quad (67)$$

$$\mathbf{D}_5(z) = (-1 \ 0 \ 0)^t \quad (68)$$

El modelo se completa considerando dos condiciones: (a) el tamaño mínimo de transferencia; es decir, en general cualquier orden de transferencia entre dos cuentas a y b ha de cumplir con $\theta_{a,b}(z) \geq MT > 0$; caso contrario $\theta_{a,b}(z) = 0$; (b) con el fin de mantener el saldo de la cuenta en el nivel deseado. Las posibles transferencias desde la cuenta principal hacia las cuentas de inversión y del préstamo o viceversa, están sujetas a la existencia de superávit o déficit de caja (en la cuenta principal).

Este es un modelo discreto, multivariable, compuesto por múltiples retardos, en cuya construcción se ha querido buscar un equilibrio entre lo manejable y su proximidad a la realidad. Por tanto, cabe evaluar adecuadamente el enfoque al momento de aplicar técnicas de control. En relación con los retardos propios de los procedimientos bancarios, existen diversas realidades. Para un SCFD administrado totalmente por un solo banco se estiliza normalmente transferencias sin retardo para la disponibilidad del efectivo. En la práctica, el banco tiene el control de todo lo relativo al tránsito de dinero entre sus propias agencias, haciéndolo transparente para la empresa; no obstante, los costos de los servicios bancarios contratados reflejan ese hecho. En un SCFD en el que intervienen bancos locales, los retardos en las transferencias de fondos entre cuentas podrían variar de uno a tres días, dependiendo de la extensión territorial y las condiciones del entorno, las cuales determinan su conocimiento. Por lo demás, cuando se trata de empresas con representación en diferentes países, entran en juego aspectos de interés cuyo tratamiento requiere un análisis adicional (Anvari, 1986). Por lo anterior, es válido evaluar la posibilidad de incorporar criterios de identificación de los retardos a la hora de adoptar cualquier enfoque de control. Como se analiza en la Sección 1, abordar el problema de gestión de caja con el enfoque de inventarios ha aportado interesantes propuestas para la evaluación económica, pero también en la determinación de la frecuencia y el tamaño de las transferencias de efectivo, tomando en consideración los retardos entre la orden de transferencia y la disponibilidad del efectivo. Todo esto aporta abundantes criterios que, combinados con el modelo propuesto aquí, complementan los aspectos para su desarrollo y aplicación. En la próxima sección se muestran los resultados de varias simulaciones realizadas. Por razones de espacio, sólo se incluye la descripción del comportamiento de las cuentas centrales del sistema para diferentes escenarios.

4. Simulación del SCFD en el dominio del tiempo

Con el propósito de mostrar la funcionabilidad y el comportamiento del modelo, esta sección presenta las simulaciones realizadas en el dominio del tiempo. En tal sentido, en las Figuras 2 a la 6 se presentan algunas gráficas de su aplicación en distintos escenarios hipotéticos, con la finalidad de ilustrar el comportamiento de las cuentas centrales del modelo y mostrar su funcionamiento con respecto a lo que se espera de los resultados. Todas las gráficas, excepto la de la Figura 6, se refieren a casos sin retardo por procedimientos bancarios, con el fin de demostrar el comportamiento básico del sistema. La gráfica

de la Figura 2 es el resultado de ejecutar el modelo para un ingreso neto constante y condiciones iniciales sin inversión, con la línea de crédito exigida para mantener el saldo mínimo de caja. En algún momento, la línea de crédito es pagada al acumularse los ingresos y la empresa comienza a tener capacidad de ahorro. La gráfica de la Figura 3 muestra el comportamiento con ingreso neto lineal creciente, inicialmente negativo. La línea de crédito al comienzo no ha sido utilizada. Al agotarse la inversión comienza a exigirse la línea de crédito. La inversión se recupera al hacerse positivos los ingresos. La gráfica de la Figura 4 muestra también el comportamiento con ingreso neto lineal creciente, inicialmente negativo. La línea de crédito al comienzo tiene un saldo que, al aumentar hasta su cota superior y agotada la inversión, produce un saldo de caja por debajo del mínimo establecido. El ingreso neto en la gráfica de la Figura 5 es variable; nótese que, al agotarse la línea de crédito, eventualmente la empresa alcanza la insolvencia. En la práctica, en estas circunstancias la empresa se obligaría a negociar un crédito adicional. Por último, el ingreso neto en la gráfica de la Figura 6 es también variable, pero a diferencia de la gráfica en la Figura 5, el retardo general por procedimientos bancarios es de dos periodos (días).

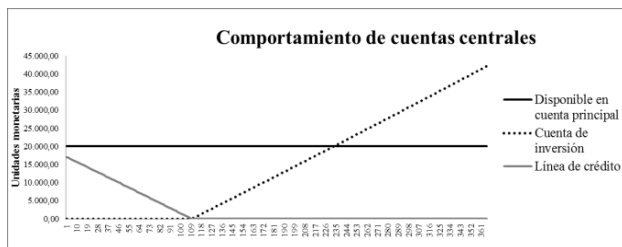


Figura 2: Comportamiento con ingreso neto constante positivo.

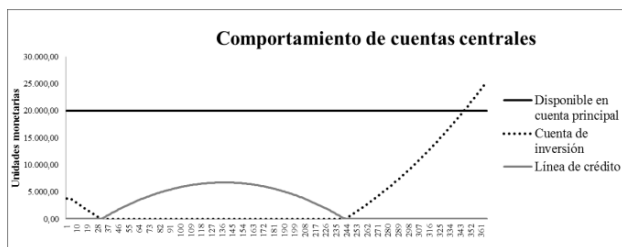


Figura 3: Comportamiento con ingreso neto lineal creciente.

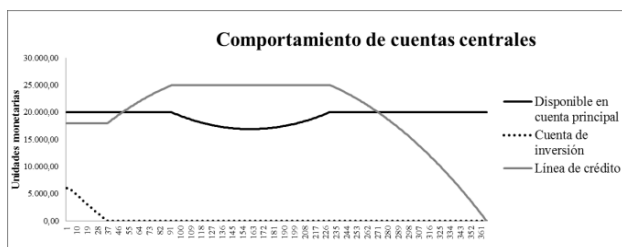


Figura 4: Comportamiento con ingreso neto lineal creciente, inicialmente negativo y la línea de crédito exigida.

La diversidad de escenarios es, prácticamente, ilimitada. No obstante, en los ejemplos ofrecidos, se ha querido demostrar gráficamente que el modelo genera los resultados esperados, de acuerdo con entradas hipotéticas. Queda abierta la posibilidad para realizar los ajustes necesarios con el propósito de adaptar el modelo a la estructura de una empresa en particular y, de esta forma, aplicar datos reales para las pruebas definitivas del modelo.

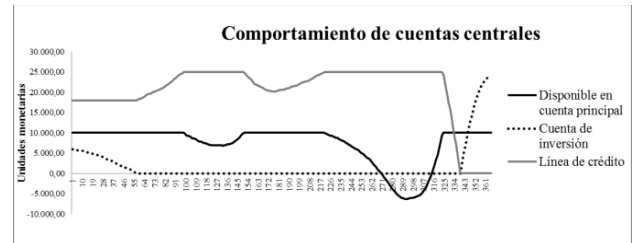


Figura 5: Comportamiento con ingreso neto variable. Eventualmente, la empresa alcanza la insolvencia.

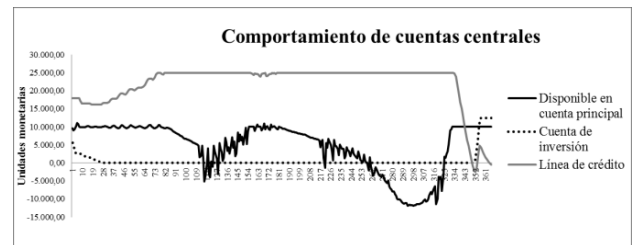


Figura 6: Comportamiento con ingreso neto variable y retardo general de 2 periodos.

5. Conclusiones

Este artículo presenta el modelo matemático de un Sistema de Concentración de Caja y Desembolsos, construido a partir de un análisis detallado de los diferentes flujos monetarios entre las cuentas implicadas; lo cual ha dado lugar a un sistema de ecuaciones en diferencias que representan cuantitativamente el comportamiento del sistema. Las simulaciones realizadas muestran un comportamiento coherente con el esperado desde el punto de vista intuitivo. Finalmente se ha representado el sistema usando el marco de la transformación z , típico en el análisis y control de sistemas en tiempo discreto. El esquema basado en ecuaciones en diferencias incluye la evaluación de los distintos saldos en cada una de las cuentas. Sin embargo, el resultado del modelo basado en la transformada z corresponde sólo a los saldos disponibles. No obstante, es posible deducir los saldos diferidos, saldos bloqueados y saldos totales en cada caso utilizando las relaciones pertinentes. Asimismo, existe la expectativa de realizar las pruebas con datos reales en un estudio de caso. Otro aspecto a considerar, es el relativo a la política de saldo mínimo que se asume en este trabajo; una variación a esta propuesta podría ser asumir un rango de oscilación para el saldo de caja en la cuenta principal, de acuerdo con el modelo de Miller y Orr.

En este estudio no se han aplicado técnicas o criterios de decisión, pero se abre la puerta a las herramientas de ingeniería de control para abordar las investigaciones pertinentes. Particularmente, con la presentación del modelo descrito en términos de la transformada z , se despliega un abanico de posibilidades para abordar técnicas de control avanzadas en combinación con el tema de la planificación financiera corporativa y las técnicas de ingeniería de sistemas; en especial, con el problema de gestión de caja y, en general, el tema de las finanzas. En este sentido, se mencionan a continuación algunas técnicas de modelado útiles para dar luces al respecto: control predictivo, control adaptativo, control basado en modelo inverso, control de modelo interno, control directo, control indirecto, control supervisado y control multivariable. Cualquier propuesta al respecto debe producir resultados factibles para una amplia gama

de probables escenarios financieros, sujeto al contexto particular de decisiones. En presencia de incertidumbre, todo el proceso de creación debe ser robusto; condición exigida a lo largo del horizonte de planificación, incluyendo el método, el conjunto de soluciones y las conclusiones extraídas.

English Summary

Mathematical Modeling of a Cash Concentration and Disbursements System.

Abstract

This paper presents a simulation model for a cash concentration and disbursements system (CCDS) seen as an inventory management system, based on difference equations and systems engineering techniques. The model assumes the existence of delays due to banking procedures and analyzes the application of the zero balance accounts concept. The case of a generic company whose agencies are geographically distributed in different regions is proposed. The model assumes the existence of a centrally operated main account and minimum balance policy. This account receives money transfers from the revenues accounts of each agency and, also from the main account, money is transferred to the agencies' expense accounts in order to cover overdrafts. There exist an investment account into which any cash surpluses of the main account are deposited and a credit line in order to avoid the cash deficits. The operating rules for the CCDS are defined, and income and financial costs involved are considered. The model represents the flow of money between the identified elements of the system and the flow of money requirements or transfer orders. An equivalent model represented by algebraic equations through the z-transform is derived, which opens perspectives for using rigorous control techniques in the field of finance.

Keywords:

Simulation; Cash concentration and disbursement; Inventory control; Money transfer; z Transform.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer al Ministerio de Economía y Competitividad su apoyo parcial a este trabajo a través del proyecto DPI2013-47825-C3-1-R.

Referencias

- Albanese, C., Jackson, K., Wiberg, P., 2004. A new Fourier transform algorithm for value-at-risk. *Quantitative Finance* 4(3), 328-338.
- Anvari, M., 1981. An application of inventory theoretical models to cash collection. *Decision Sciences* 12, 126-135. DOI: 10.1111/j.1540-5915.1981.tb00067.x.
- Anvari, M., 1986. Efficient scheduling of cross-border cash transfers. *Financial Management* 15(2), 40-49.
- Anvari, M., 1987. Cash transfer scheduling for concentrating noncentral receipts. *Management Science* 33(1), 25-38.
- Anvari, M., Goyal, S. K., 1985. Optimization of the decentralized cash management problem. *European Journal of Operational Research* 20(2), 198-205.
- Anvari, M., Mohan, N., 1980. A computerized cash concentration system. *Omega-International Journal of Management Science* 8(4), 459-464.
- Baccarin, S., 2009. Optimal impulse control for a multidimensional cash management system with generalized cost functions. *European Journal of Operational Research* 196(1), 198-206.
- Bar-Ilan, A., Perry, D., Stadje, W., 2004. A generalized impulse control model of cash management. *Journal of Economic Dynamics & Control* 28(6), 1013-1033.
- Baumol, W. J., 1952. The transactions demand for cash: an inventory theoretic approach. *Journal of Finance*, LXVI.
- Beyer, D., Sethi, S. P., 1999. The Classical Average-Cost Inventory Models of Iglehart and Veinott-Wagner Revisited. *Journal of Optimization Theory and Applications* 101(3), 523-555.
- Boissard, J., 2012. Applications and uses of digital filters in finance. Master's thesis, Swiss Federal Institute of Technology (ETHZ).
- Buser, S. A., 1986. Laplace Transforms as Present Value Rules: A Note. *The Journal of Finance* 41(1), 243-247.
- Cagan, P., 1956. The monetary dynamics of hyperinflation. In M. Friedman (Ed.), *Studies in the Quantity Theory of Money*. Chicago: University of Chicago Press.
- Carr, P., Madan, D., 1999. Option valuation using the fast Fourier transform. *The Journal of Computational Finance* 2(4), 61-73.
- Carr, P., Wu, L. R., 2004. Time-changed Levy processes and option pricing. *Journal of Financial Economics* 71(1), 113-141.
- Cerny, A., 2004. The risk of optimal, continuously rebalanced hedging strategies and its efficient evaluation via Fourier transform. London: Tanaka Business School, Series: Tanaka Business School discussion papers, pp. 1-41, ISSN 1744-6783, <http://ssrn.com/abstract=559417>.
- Cerny, A., 2006. Introduction to Fast Fourier Transform in Finance. Cass Business School Research Paper, pp. 1-29.
- Cerny, A., 2009. *Mathematical Techniques in Finance: Tools for Incomplete Markets* (Second Edition). Princeton University Press, Princeton and Oxford, p.p. xxii + 390.
- Cerqueti, R., 2012. Financing policies via stochastic control: a dynamic programming approach. *Journal of Global Optimization* 53(3), 539-561.
- Chourdakis, K., 2005. Option pricing using the fractional FFT. *The Journal of Computational Finance* 8(2), 1-18.
- Christev, A., 2005. The hyperinflation model of money demand: Some new empirical evidence from the 1990s. *Centre for Economic Reform and Transformation*, pp. 1-34.
- Cui, X. Y., Gong, L. T., Zhao, X. J., Zou, H. F., 2013. The Z-transform method for multidimensional dynamic economic systems. *Applied Economics Letters* 20(11), 1081-1088.
- Dempster, M. A. H., Hong, S. S. G., 2002. Spread option valuation and the fast Fourier transform. *Mathematical Finance - Bachelier Congress 2000*, Springer Finance, pp. 203-220.
- Dennis, S. B., 2009. *Matrix mathematics: Theory, facts and formulas* (Second Edition). Princeton University Press, Princeton, NJ, p.p. xlii+1139.
- Duffy, D. J., 2006. Finite difference methods in financial engineering: A Partial differential equation approach. John Wiley & Sons, Ltd, 442 pages, ISBN: 978-0-470-85882-0.
- Eppen, G. D., Fama, E. F., 1968. Solutions for cash-balance and simple dynamic-portfolio problems. *Journal of Business* 41(1), 94-112.
- Eppen, G. D., Fama E. F., 1969. Cash balance and simple dynamic portfolio problems with proportional costs. *International Economic Review* 10(2), 119-133.
- Fusai, G., Roncoroni, A., 2008. Implementing models in quantitative finance: Methods and cases. Springer, Series: Springer Finance, p.p. xxiii + 607.
- Fusai, G., Marazzina, D., Marena, M., Ng, M., 2012. Z-transform and preconditioning techniques for option pricing. *Quantitative Finance* 12(9), 1381-1394.
- García, C. A., Ibeas, A., Herrera, J., Vilanova, R., 2012. Inventory control for the supply chain: An adaptive control approach based on the identification of the lead-time. *Omega-International Journal of Management Science* 40(3), 314-327.
- García Salcedo, C. A., Ibeas Hernández, A., Vilanova, R., Herrera Cuartas, J., 2013. Inventory control of supply chains: Mitigating the bullwhip effect by centralized and decentralized Internal Model Control approaches. *European Journal of Operational Research* 224(2), 261-272.

- Girgis, N. M., 1968. Optimal cash balance levels. *Management Science* 15(3), 130-140.
- Grubbstrom, R. W., 1998. A net present value approach to safety stocks in planned production. *International Journal of Production Economics* 56(7), 213-229.
- Grubbstrom, R. W., Tang, O., 1999. Further developments on safety stocks in an MRP system applying Laplace transforms and input-output analysis. *International Journal of Production Economics* 60(1), 381-387.
- Grubbstrom, R. W., Huynh, T. T. T., 2006. Multi-level, multi-stage capacity-constrained production-inventory systems in discrete time with non-zero lead times using MRP theory. *International Journal of Production Economics* 101(1), 53-62.
- Grubbstrom, R. W., 1999. A net present value approach to safety stocks in a multi-level MRP system. *International Journal of Production Economics* 59(1-3), 361-375.
- Gupta, S., Dutta, K., 2011. Modeling of financial supply chain. *European Journal of Operational Research* 211(1), 47-56.
- Hurd, T. R., Zhou, Z. W., 2010. A Fourier transform method for spread option pricing. *SIAM Journal on Financial Mathematics* 1(1), 142-157.
- Khan, M., 1975. The monetary dynamics of hyperinflation: A note. *Journal of Monetary Economics* 1(3), 355-362.
- Lee, R. W., 2004. Option pricing by transform methods: extensions, unification and error control. *The Journal of Computational Finance* 7(3), 51-86.
- Liang, Z. X., Sun, B., 2011. Optimal control of a big financial company with debt liability under bankrupt probability constraints. *Frontiers of Mathematics in China* 6(6), 1095-1130.
- Lin, P. H., Wong, D. S. H., Jang, S. S., Shieh, S. S., Chu, J. Z., 2004. Controller design and reduction of bullwhip for a model supply chain system using Z-transform analysis. *Journal of Process Control* 14(5), 487-499.
- Marquis, M. H., Witte, W. E., 1989. Cash management and the demand for money by firms. *Journal of Macroeconomics* 11(3), 333-350.
- Miller, M. H., Orr, D., 1966. A Model of the demand for money by firms. *The Quarterly Journal of Economics* (Published by: Oxford University Press) 80(3), 413-435.
- Miller, M. H., Orr, D., 1968. Demand for money by firms - extensions of analytic results. *Journal of Finance* 23(5), 735-759.
- Naim, M. M., Wikner, J., Grubbstrom, R. W., 2007. A net present value assessment of make-to-order and make-to-stock manufacturing systems. *Omega-International Journal of Management Science* 35(5), 524-532.
- Obstfeld, M., Rogoff, K., 1995. Exchange-rate dynamics Redux. *Journal of Political Economy* 103(3), 624-660.
- Obstfeld, M., Rogoff, K., 1996. *Foundations of international macroeconomics*. The MIT Press, p.p. xxiii + 804.
- Ogata, K., 1996. *Discrete time control systems*. Prentice-Hall International.
- Premachandra, I. M., 2004. A diffusion approximation model for managing cash in firms: An alternative approach to the Miller-Orr model. *European Journal of Operational Research* 157(1), 218-226.
- Sethi, S. P., Thompson, G. L., 1970. Applications of mathematical control theory to finance - modeling simple dynamic cash balance problems. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 5(4-5), 381-394.
- Song, N., Ching, W. K., Su, T. K., Yiu, C. K. F., 2013. On optimal cash management under a Stochastic Volatility Model. *East Asian Journal on Applied Mathematics* 3(2), 81-92.
- Stone, B. K., Hill, N. C., 1980. Cash transfer scheduling for efficient cash concentration. *Financial Management* 9(3), 35-43.
- Stone, B. K., Hill, N. C., 1981. The design of a cash concentration system. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 16(3), 301-322.
- Tenorio, V. A. F., Martín C. A. M., Paralera, M. C., Contreras R. I., 2013. Ecuaciones diferenciales y en diferencias aplicadas a los conceptos económicos y financieros. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa* (16), 165-199. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06. URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=83>.
- Tobin, J., 1956. The interest-elasticity of transactions demand for cash. *Review of Economics and Statistics* 38(3), 241-247.
- Vasconcellos, G. M., 1988. On the application of optimal-control theory to financial-planning and forecasting. *Journal of Economics and Business* 40(4), 309-318.
- Woodford, M., 1998. Control of the public debt: A requirement for price stability? Debt burden and its consequences for monetary policy. *IEA Conference* (118), 117-154.

Apéndice A. Ingresos y cargos financieros para un SCFD.

En este apéndice se presentan varias expresiones para el cálculo de intereses ganados y cargos financieros en un SCFD, bajo los siguientes supuestos: (a) El banco debita o acredita en la cuenta diariamente, calculando intereses o cargos con base en el saldo al final del período anterior ($t - 1$); (b) En cada caso, se fracciona la respectiva tasa de interés anual de acuerdo con el número de períodos t al año ($BASE$); que se usa para calcular el ingreso o cargo financiero para un solo período.

Los ingresos financieros durante el período t debido a la inversión en la cuenta de inversión están dados por:

$$I_F(t) = y_6^A(t-1)(i_I/BASE) \quad (69)$$

Donde: $y_6^A(t-1)$ es el saldo disponible en la cuenta de inversión al final del período anterior, e i_I es el tipo de interés anual pasivo pagado por el banco producto de la inversión.

El cargo financiero para una cuenta de egresos sobregirada $\theta_{13,j}(t)$ tiene la siguiente expresión:

$$\theta_{13,j}(t) = \text{Max}\{-y_j^A(t-1)(i_O/BASE); 0\}, j = 1,2,3,4 \quad (70)$$

Donde: $y_j^A(t-1)$ es el saldo disponible en la cuenta de egresos al final del período anterior, e i_O es el tipo de interés anual cobrado por el banco para saldos en sobregiro.

Los cargos financieros centrales del SCFD incluyen: cargo debido a la cuenta principal sobregirada, interés activo por saldo del préstamo en la línea de crédito y cargo por cantidad y tamaño de transferencias. Los cargos financieros centrales del SCFD están dados por:

$$\begin{aligned} O_F(t) = & \text{Max}\{-y_5^A(t-1)(i_O/BASE); 0\} \\ & + \text{Max}\{y_7^A(t-1)(i_E/BASE); 0\} \\ & + \sum_{\theta_{a,b}(t) > 0} CT(\theta_{a,b}(t)) \end{aligned} \quad (71)$$

Donde: $y_5^A(t-1)$ es el saldo disponible en la cuenta principal al final del período anterior; $y_7^A(t-1)$ es el saldo total del préstamo al final del período anterior con base en los acuerdos sobre la línea de crédito; i_O es el tipo de interés anual para el saldo en sobregiro cobrado por el banco; i_E es el tipo de interés anual activo cobrado por el banco para calcular el costo financiero de la línea de crédito; y $CT(\theta_{a,b}(t))$ es una función lineal del tipo:

$$CT(\theta_{a,b}(t)) = FCT + VCT \cdot \theta_{a,b}(t) \quad (72)$$

Siendo FCT un costo fijo por transferencia y VCT un costo por unidad monetaria transferida (recuérdese la condición de tamaño mínimo de transferencia).

El costo total del SCFD ($CTS(t)$) se completa agregando un costo general de operación y gestión y el costo de oportunidad por saldos positivos inmovilizados, los cuales, en principio, se dan sólo en las cuentas de ingresos y en la cuenta principal:

$$\begin{aligned} CTS(t) = & O_F(t) \\ & + \{CG + i_I \sum_{j \neq 6,7} \text{Max}[y_j^A(t-1); 0]\}/BASE \end{aligned} \quad (73)$$

Donde: CG es el costo fijo anual de operación y gestión en unidades monetarias corrientes y $y_j^A(t-1)$ es el saldo disponible en la cuenta j al final del período anterior.