

Balanceo Automático de un Sistema Rotor-Cojinete: Identificador Algebraico en Línea del Desbalance Para un Sistema Rotodinámico

J. G. Mendoza Larios*, J. Colín Ocampo, A. Blanco Ortega, A. Abúndez Pliego, E. S. Gutiérrez Wing

Departamento de Ingeniería Mecánica, CENIDET, Interior Internado Palmira, s/n, 62490, Cuernavaca, Morelos, México.

Resumen

En este artículo, se presenta una metodología para balancear varios modos de vibración a la vez de un sistema rotor-cojinete mediante lo que se denomina discos de balanceo activo. Para determinar la magnitud del desbalance y su posición angular en el rotor, se propone un identificador en línea basado en la técnica de identificación algebraica. Para lo anterior, se desarrolló un modelo matemático en elemento finito para un sistema rotatorio de múltiples grados de libertad, donde se consideró un elemento viga con cuatro grados de libertad por nodo, en este modelo se consideran los efectos de inercia rotatoria, momentos giroscópicos, deformaciones por cortante y amortiguamiento interno y externo, así como la implementación al sistema rotor-cojinete de los discos de balanceo activo. Asimismo, se evaluó y analizó el comportamiento en el tiempo del identificador propuesto para una distribución de masas de desbalance en diferentes puntos a lo largo del rotor, tomando como dato de entrada la respuesta de vibración obtenida de la simulación de un sistema rotodinámico de múltiples grados de libertad, con diferentes rampas de excitación de tipo lineal. De los resultados obtenidos se demuestra, que con dos discos de balanceo activo se puede balancear hasta cuatro modos de vibración al mismo tiempo.

Palabras Clave:

Balanceo, rotodinámica, identificación algebraica, rotor-cojinete, desbalance, vibración.

1. Introducción

Una de las fuentes más comunes de generación de vibración en máquinas rotatorias se debe al desbalance. El desbalance ocurre cuando el eje principal de inercia del rotor no coincide con el eje geométrico del sistema, lo que provoca vibraciones que generan fuerzas indeseables que se transmiten directamente a los elementos mecánicos, así como, soportes y cojinetes del rotor (Blanco *et al.*, 2008). Por otra parte, el fenómeno de la resonancia que ocurre cuando la frecuencia de excitación se iguala con una frecuencia natural del rotor, genera que los efectos del desbalance sean catastróficos para el sistema. Actualmente, se han propuesto diversos métodos o dispositivos pasivos y activos con el objetivo de atenuar las vibraciones a causa del desbalance. En el control pasivo, el sistema rotatorio se modifica estando el rotor fuera de línea para realizar el ajuste de alguno o todos sus parámetros, tales como: masa, rigidez y amortiguamiento. Entre los métodos más comunes se encuentran los métodos de balanceo por coeficientes de influencia y balanceo modal.

En el control activo, se utilizan dispositivos para aplicar fuerzas de control que se retroalimentan de la respuesta del sistema, entre estos dispositivos se encuentran: los cojinetes magnéticos, cojinetes presurizados, cojinetes con fluidos electrorreológicos y magnetorreológicos, cojinetes móviles,

suspensión electromecánica, etc. (Arredondo *et al.*, 2008; Beltrán-Carbajal *et al.*, 2014; Blanco *et al.*, 2003; Forte *et al.*, 2004; Green *et al.*, 2008; Hredzak *et al.*, 2006; Chong-Won, 2006; Ward, 2004; Zhou y Shi, 2001). Estos dispositivos requieren información de la excentricidad presente en la máquina rotatoria.

Existe una vasta literatura sobre métodos de identificación y estimación de parámetros, los cuales son esencialmente asintóticos, recursivos o complejos (Ljung, 1987; Soderstrom, 1989; Sagara y Zhao, 1989; Sagara y Zhao, 1990) y de acuerdo con Beltrán-Carbajal *et al.*, 2008, conducen a implementaciones poco realistas. Actualmente existe otro método de identificación cuyo enfoque es diferente a los métodos de identificación clásicos, conocido como método de identificación algebraica. Éste se basa en el álgebra diferencial y el cálculo operacional para el desarrollo de estimadores a medida que permiten la determinación de parámetros desconocidos de un sistema a partir de su modelo matemático. Asimismo, las estimaciones se realizan en línea y en tiempo continuo o discreto. Una de las características de la identificación algebraica es proporcionar relaciones de identificación completamente independientes de las condiciones iniciales del sistema. Algunas comparaciones entre los métodos clásicos de identificación y, la identificación algebraica, así como, sus ventajas y desventajas, se pueden encontrar en Trapero (2008).

Yuan-Pin y An-Chen (1997) desarrollaron un método basado en la matriz de transferencia para estimar la distribución del desbalance en ejes flexibles y excentricidades constantes de discos rígidos. Presentaron resultados numéricos para un rotor

* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: jgm10m@eni det . edu. mx (J. G. Mendoza Larios),
URL: www.ceni det . edu. mx (J. G. Mendoza Larios)

con un solo disco a velocidad de operación constante. De Queiroz (2009) presentó un método de identificación activo para determinar parámetros de desbalance de un rotor Jeffcott, basado en una técnica de control robusto dinámico, en la cual las fuerzas de desbalance se estiman y a partir de éstas se determinan la magnitud y fase del desbalance. El método utiliza un modelo matemático de un rotor simplificado que considera fuerzas de control para atenuar las vibraciones en el rotor, las cuales pueden generarse a través del uso de cojinetes activos.

Mahfoud *et al.* (2009) propusieron un método para identificar las matrices en variables de estado de un modelo reducido de un rotor. Utilizaron técnicas de ajuste de curvas y procedimientos de optimización basados en el método de mínimos cuadrados, midiendo el vector de estados completo: desplazamiento, velocidad y aceleración. Las fuerzas externas pueden determinarse al proponer un problema inverso desde el modelo con las matrices previamente determinadas. Sudhakar y Sekhar (2011) determinaron de manera teórica y experimental los parámetros del desbalance con un método de aproximación de identificación de fallas. El método propuesto utiliza varias medidas de las amplitudes de vibración, logrando una buena estimación, sin embargo, en la práctica se cuenta con pocas mediciones lo que provocaría que el método disminuya en su desempeño para la estimación de los parámetros del desbalance.

Arias *et al.* (2014) utilizaron la técnica de identificación algebraica para identificar los parámetros del desbalance en línea de un sistema rotor-cojinete en función de la fuerza de excitación. Presentan resultados numéricos que muestran la rapidez de convergencia de los parámetros estimados del desbalance en un rotor con dos discos y una suspensión activa para atenuar las amplitudes de vibración laterales. La identificación algebraica ya ha sido empleada para la estimación de parámetros y señales en sistemas mecánicos vibratorios lineales y no-lineales (Beltrán-Carbajal *et al.*, 2013; Beltrán-Carbajal *et al.*, 2014; Beltrán-Carbajal *et al.*, 2008; Beltrán-Carbajal *et al.*, 2005; Beltrán-Carbajal *et al.*, 2006; Blanco *et al.*, 2008; Blanco *et al.*, 2010; Traperó *et al.*, 2006; Traperó *et al.*, 2007; Arias *et al.*, 2014). Los resultados numéricos y experimentales muestran que la identificación algebraica proporciona una elevada robustez contra la incertidumbre de los parámetros, variaciones de frecuencia, pequeños errores de medición y ruido. Información adicional sobre la robustez de la identificación algebraica, así como, sus ventajas y desventajas se pueden encontrar en Sira-Ramírez (2014).

En este artículo, se presenta una metodología para balancear varios modos de vibración a la vez utilizando discos de balanceo activo, los cuales requieren información del desbalance del sistema, para que de forma automática los discos propuestos coloquen una masa de balanceo en una posición específica. Asimismo, se presenta el desarrollo de un modelo matemático para la estimación en línea del desbalance y su posición angular, para un sistema rotor-cojinete de múltiples grados de libertad, el cual se basa en el método de identificación algebraica en línea reportada por Fliess y Sira-Ramírez, (2003). La ventaja que ofrece el modelo propuesto, es que solo se necesita la respuesta de vibración en línea del sistema como dato de entrada, y no es necesario llevar al sistema rotatorio hasta su velocidad nominal de operación, para identificar el desbalance y su posición angular y proceder a balancear el rotor. En Blanco *et al.*, (2008) y Blanco *et al.*, (2010), se encuentra un estudio numérico preliminar del disco de balanceo activo, aplicado a un rotor tipo Jeffcott, de dos grados

de libertad. Asimismo, también se muestran las estrategias de control.

2. Modelo matemático de un sistema rotor-cojinete de múltiples grados de libertad considerando discos de balanceo activo.

El modelo matemático para el sistema rotor-cojinete de múltiples grados de libertad se obtiene mediante el método del elemento finito. El eje se modela con un elemento finito tipo viga de cuatro grados de libertad por nodo, dos desplazamientos laterales y dos rotaciones (flexiones de la viga), tal y como se muestra en la Figura 1.

Donde el vector de desplazamiento nodal se define como:

$$\{\delta\} = \{u_1, w_1, \psi_1, \theta_1, u_2, w_2, \psi_2, \theta_2\}^T \quad (1)$$

En la ecuación (1) “ T ” denota transpuesta y $\{\delta\}$ el vector de desplazamientos y rotaciones. Los desplazamientos y rotaciones correspondientes a los movimientos en las direcciones X y Z son:

$$\begin{aligned} \{\delta_u\} &= \{u_1, \psi_1, u_2, \psi_2\}^T \\ \{\delta_w\} &= \{w_1, \theta_1, w_2, \theta_2\}^T \end{aligned} \quad (2)$$

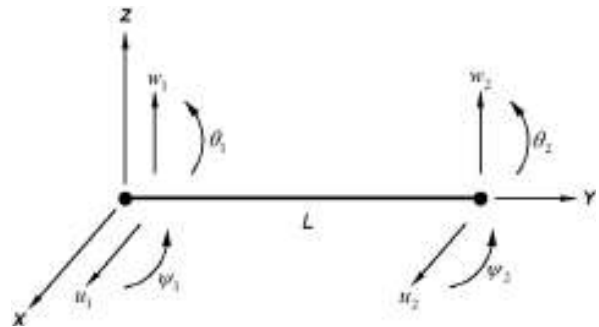


Figura 1: Elemento finito tipo viga para el modelado del eje.

El modelo matemático para el sistema rotor-cojinete de múltiples grados de libertad, con múltiples masas de desbalance y discos de balanceo activo está dado por:

$$\begin{aligned} [M]\{\delta''\} + [C_1] + \phi'[C_2]\{\delta'\} + [K] + \phi''[K_1]\{\delta\} = \\ \phi'^2 \sum_{n=1}^{nm_u} \{F_{u(2n-1)}(\phi)\} + \phi'' \sum_{n=1}^{nm_u} \{F_{u(2n)}(\phi)\} \\ + \phi'^2 \sum_{n=1}^{nm_b} \{F_{b(2n-1)}(\phi)\} + \phi'' \sum_{n=1}^{nm_b} \{F_{b(2n)}(\phi)\} \end{aligned} \quad (3)$$

con

$$\begin{aligned} F_{u(2n-1)} &= m_u d_n (\sin(\phi + \alpha_n) + \cos(\phi + \alpha_n)) \\ F_{u(2n)} &= m_u d_n (\sin(\phi + \alpha_n) - \cos(\phi + \alpha_n)) \text{ y,} \\ F_{b(2n-1)} &= m_b e_n (\sin(\phi + \varepsilon_n) + \cos(\phi + \varepsilon_n)) \\ F_{b(2n)} &= m_b e_n (\sin(\phi + \varepsilon_n) - \cos(\phi + \varepsilon_n)) \end{aligned}$$

donde nm_u es el número de masas de desbalance presentes en el sistema, y nm_b el número de masas de balanceo proporcionadas por los discos de balanceo activo, α_n y ε_n representan las posiciones angulares de las masas de desbalance y balanceo, respectivamente. Asimismo, $\{\delta\}$ es el vector que contiene todos los desplazamientos nodales; $[M]$ es la matriz de masa global del sistema. $[[C_1] + \phi[C_2]]$, es la matriz de amortiguamiento global, que incluye los efectos giroscópicos en función de la velocidad de rotación ($\phi[C_2]$), y $[C_1]$ que contiene el amortiguamiento atribuible a los soportes. $[[K] + \phi''[K_1]]$ es la matriz de rigidez global, y está formada por: $[K]$ que incluye la rigidez del rotor y soportes, y $\phi''[K_1]$ que es un término de rigidez que está en función de la aceleración angular del rotor. Asimismo, $\{F_{u(2n-1)}\}$ y $\{F_{u(2n)}\}$ son los vectores de fuerza causados por las masas de desbalance $m_u d_n$, y $\{F_{b(2n-1)}\}$, $\{F_{b(2n)}\}$ son los vectores de fuerza que ejercen las masas de balanceo ($m_b e_n$) localizadas en los discos de balanceo activo. Finalmente, los términos ϕ , ϕ' y ϕ'' representan el desplazamiento, la velocidad y la aceleración angular del rotor en función del tiempo, respectivamente.

3. Rampa de excitación de tipo lineal

El término *rampa de excitación* significa una variación de la frecuencia de excitación de manera continua, con una tasa específica con respecto al tiempo y puede ser en sentido ascendente (subidas) o descendente (bajadas).

La frecuencia de excitación de la mayoría de los sistemas rotatorios reales no varía linealmente con el tiempo. Sin embargo, en algunos casos, la variación de frecuencias es lo suficientemente lenta como para aproximarla a una función lineal. Para la solución de (3) se consideró que la variación de la frecuencia de excitación es de la forma:

$$\phi'(t) = \phi_0 + \phi''t \quad (4)$$

donde:

ϕ_0 = frecuencia de excitación al inicio de la rampa.

ϕ'' = tasa de cambio de la frecuencia de excitación con respecto al tiempo.

t = tiempo.

4. Modelo matemático para la identificación algebraica en línea del desbalance y posición angular

Para el desarrollo del modelo del identificador en línea, se parte del modelo matemático de un sistema rotodinámico como el que se presenta en la sección 2, donde el vector de desplazamientos del sistema global se representa por $\{\delta\}$. Los datos de entrada requeridos para el esquema de identificación, son únicamente los desplazamientos u_1, w_1, u_2, w_2 , correspondientes a los movimientos en las direcciones x y z respectivamente.

Para un sistema real el vector $\{\delta\}$, representa la señal que se obtiene a partir de sensores de desplazamiento, localizados en cada nodo a lo largo de la discretización de un sistema rotodinámico.

Para el análisis, se considera que en el sistema rotor-cojinete existe solo una masa de desbalance y un disco de balanceo activo. Por lo tanto, (3) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} [M]\{\delta''\} + [[C_1] + \phi'[C_2]]\{\delta'\} + [[K] + \phi''[K_1]]\{\delta\} = \\ \{m_u d(\phi'^2 \sin(\phi + \alpha) - \phi'' \cos(\phi + \alpha))\} \\ + \{m_u d(\phi'' \sin(\phi + \alpha) + \phi'^2 \cos(\phi + \alpha))\} \\ + \{m_b e(\phi'^2 \sin(\phi + \varepsilon) - \phi'' \cos(\phi + \varepsilon))\} \\ + \{m_b e(\phi'' \sin(\phi + \varepsilon) + \phi'^2 \cos(\phi + \varepsilon))\} \end{aligned} \quad (5)$$

donde α y ε denotan las posiciones angulares de las masas de desbalance y balanceo, respectivamente.

Al multiplicar la ecuación (5) por t^2 e integrar dos veces con respecto al tiempo “ t ”, se obtienen las ecuaciones necesarias para obtener el modelo del identificador algebraico del desbalance y su posición angular, para un sistema rotodinámico de múltiples grados de libertad:

$$\begin{aligned} \int^{(2)} [[M]\{\delta''\} + [C(\phi')]\{\delta'\} + [K(\phi'')]\{\delta\}] t^2 = \\ \left\{ \int^{(2)} m_u d(\phi'^2 \sin(\phi + \alpha) - \phi'' \cos(\phi + \alpha)) t^2 \right\} \\ + \left\{ \int^{(2)} m_u d(\phi'' \sin(\phi + \alpha) + \phi'^2 \cos(\phi + \alpha)) t^2 \right\} \\ + \left\{ \int^{(2)} m_b e(\phi'^2 \sin(\phi + \varepsilon) - \phi'' \cos(\phi + \varepsilon)) t^2 \right\} \\ + \left\{ \int^{(2)} m_b e(\phi'' \sin(\phi + \varepsilon) + \phi'^2 \cos(\phi + \varepsilon)) t^2 \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

donde

$\int^{(N)} \varphi(t)$ son integrales iteradas en el tiempo (t) de la forma:

$$\int_0^t \int_0^{\sigma_1} \dots \int_0^{\sigma_{N-1}} \varphi(\sigma_N) d\sigma_N \dots d\sigma_1, \text{ con } \int \varphi(t) = \int_0^t \varphi(\sigma) d\sigma \text{ y}$$

N un entero positivo (Blanco et al., 2010).

Posteriormente, al integrar por partes y algunos tratamientos algebraicos en (6), ésta se puede expresar en sistemas de ecuaciones lineales para cada nodo de la forma:

$$A(t)\Theta = b(t) \quad (7)$$

donde, $\Theta = [m_u d_\eta = m_u d \cos \alpha, m_u d_\zeta = m_u d \sin \alpha]^T$ denota el vector del desbalance por identificar, $A(t)$ y $b(t)$ se expresan como:

$$A(t) = \begin{bmatrix} -a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{12}(t) & a_{11}(t) \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

con

$$a_{11} = \int t^2 \phi' \cos \phi - 2 \int^{(2)} t \phi' \cos \phi$$

$$a_{12} = \int t^2 \phi' \sin \phi - 2 \int^{(2)} t \phi' \sin \phi$$

$$\begin{aligned}
b(t) = & [M]t^2\{\delta\} + \int [[C_1]t^2 + \phi'[C_2]t^2 - 4[M]t]\{\delta\} \\
& + \int^{(2)} [2[M] - 2[C_1]t - [C_2](\phi''t^2 + 2\phi't)]\{\delta\} \\
& + \int^{(2)} [[K_1] + \phi''[K_2]t^2]\{\delta\} \\
& + \left\{ m_b e \int t^2 \phi' \cos(\phi + \varepsilon) \right\} - \left\{ 2m_b e \int^{(2)} t \phi' \cos(\phi + \varepsilon) \right\} \\
& - \left\{ m_b e \int t^2 \phi' \sin(\phi + \varepsilon) \right\} + \left\{ 2m_b e \int^{(2)} t \phi' \sin(\phi + \varepsilon) \right\}
\end{aligned}$$

Nótese que $A(t)$ y $b(t)$ están en función de la respuesta de vibración del rotor $\{\delta\}$, respuesta que contiene únicamente los grados de libertad de traslación de cada nodo.

De la ecuación (7) se puede observar que el vector Θ es identificable algebraicamente sí, y solo sí, la trayectoria del sistema dinámico es persistente en el sentido establecido por Fliess y Sira-Ramírez (2003), es decir, las trayectorias o el comportamiento dinámico del sistema satisface la condición. $\det[A(t) \neq 0]$. En general, esta condición se mantiene al menos en un intervalo pequeño $(t_0, t_0 + \kappa]$, donde κ es un valor positivo y suficientemente pequeño (Blanco *et al.*, 2010).

De la solución de (7), se obtiene el modelo para el identificador en línea, para el desbalance y su posición angular.

$$\left. \begin{aligned}
m_u d_\eta &= \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\
m_u d_\varsigma &= \frac{b_1 a_{12} + b_2 a_{11}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\
m_u d_e &= \sqrt{m_u d_\eta^2 + m_u d_\varsigma^2} \\
\alpha_e &= \cos^{-1} \left(\frac{m_u d_\eta}{m_u d_e} \right)
\end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \kappa] \quad (9)$$

Como se puede observar en (9), la identificación algebraica de los parámetros del desbalance y su posición angular del sistema rotodinámico es independiente de las condiciones iniciales, además, solo depende del vector de desplazamientos del sistema en las direcciones x y z para cada instante de tiempo, así como del tipo de rampa de excitación.

5. Simulación de la identificación algebraica en línea del desbalance y su posición angular.

Considere el sistema rotodinámico que se muestra en la Figura 2, el cual se compone de un eje, tres discos inerciales y dos soportes en los extremos. Asimismo, también se muestra la discretización del rotor, así como, la masa de desbalance presente en el sistema. Se proponen tres masas de desbalance en tres posiciones angulares diferentes, las cuales se distribuyen en los tres discos inerciales a lo largo del rotor, que corresponden a los nodos 3, 6 y 11 respectivamente, los datos se resumen en la Tabla 1.

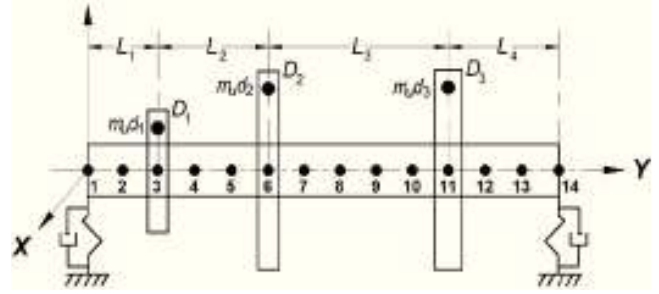


Figura 2: Modelo del rotor.

Cabe señalarse que aunque el rotor utilizado (Figura 2) es simplificado, el modelo matemático (3) se puede aplicar a sistemas rotodinámicos más realistas. De hecho Lalanne y Ferraris, (1990) presentan la aplicación de un modelo similar al (3), utilizando el elemento finito tipo viga con cuatro grados de libertad por nodo, para el modelado de rotores industriales tales como: rotores de compresores centrífugos, compresores de vapor, turbinas de gas, turbinas de vapor, entre otros.

Tabla 1: Masas de desbalance presentes en el sistema

Desbalance (kg · m)	Posición angular (rad)
$m_u d_1 = 2 \times 10^{-4}$, nodo 3	$\alpha_1 = \pi/2$
$m_u d_2 = 1 \times 10^{-4}$, nodo 6	$\alpha_2 = \pi/4$
$m_u d_3 = 1.5 \times 10^{-4}$, nodo 11	$\alpha_3 = 17\pi/18$

En las Tablas 2 y 3 se muestran las propiedades mecánicas y geométricas del eje y los discos respectivamente.

Tabla 2: Propiedades mecánicas y geométricas del eje

Propiedades mecánicas	Geometría
$E = 2 \times 10^{11}$ N/m ²	$r_s = 0.05$ m
$\rho = 7800$ kg/m ³	$L_1 = 0.2$ m; $L_2 = 0.3$ m
$\nu = 0.3$	$L_3 = 0.5$ m; $L_4 = 0.3$ m

Tabla 3: Propiedades mecánicas y geométricas de los discos

Propiedades mecánicas				
$E = 2 \times 10^{11}$ N/m ²	Disco	D_1	D_2	D_3
$\rho = 7800$ kg/m ³	e_D (m)	0.05	0.05	0.06
$\nu = 0.3$	r_{iD} (m)	0.05	0.05	0.05
	r_{eD} (m)	0.12	0.20	0.20

En la Tabla 4 se muestran las características de rigidez y amortiguamiento viscoso de los soportes.

Tabla 4: Características de los soportes

Rigidez	Coefficiente de amortiguamiento
$k_{xx} = 5 \times 10^5$ N/m	$c_{xx} = 3 \times 10^2$ N · s/m
$k_{zz} = 5 \times 10^4$ N/m	$c_{zz} = 3 \times 10^2$ N · s/m
$k_{xz} = k_{zx} = 0$	$c_{xz} = c_{zx} = 0$

La identificación algebraica en línea del desbalance, así como su posición angular, se determinan con base en la respuesta del

rotor en función del tiempo. Por otra parte, la respuesta de vibración del sistema se obtiene a partir de (3), utilizando el método de integración numérica de Newmark con una rampa de excitación de tipo lineal con $\phi''=10 \text{ rad/s}^2$.

En la Figura 3 se muestra la respuesta de vibración correspondiente al nodo 6, aquí se puede apreciar que el sistema pasa por cuatro modos de vibración hasta alcanzar la velocidad nominal de operación. De acuerdo con (4), el tiempo que tarda el rotor en alcanzar la velocidad nominal de 3600 rpm es de 37.69 segundos.

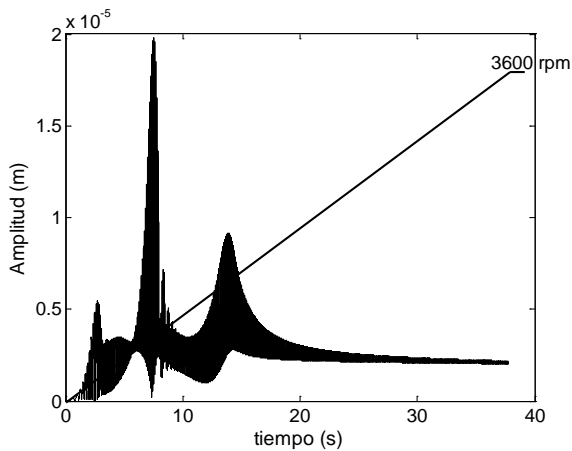


Figura 3: Respuesta de vibración del sistema nodo 6.

Nótese que la respuesta de vibración se puede obtener para cada uno de los nodos en los que fue discretizado el rotor, en consecuencia, se puede tener una gráfica del comportamiento del identificador (9); en función del tiempo para cada nodo del sistema.

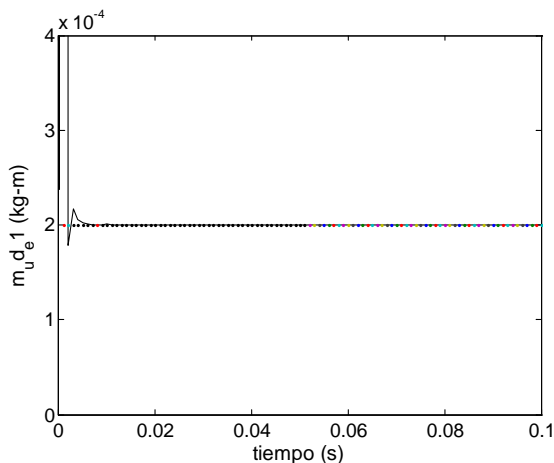


Figura 4: Identificación del desbalance en el disco inercial D₁.

En las Figuras de la 4 a la 9, se muestra el comportamiento del identificador del desbalance y su posición angular en función del tiempo respectivamente, comportamiento que corresponde a los nodos 3, 6 y 11 del rotor. En las figuras la línea punteada representa los valores reales asignados, mientras que la línea continua representa el resultado obtenido de la estimación algebraica.

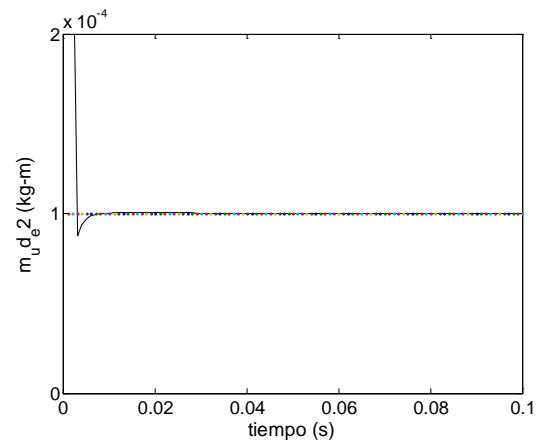


Figura 5: Identificación del desbalance en el disco inercial D₂.

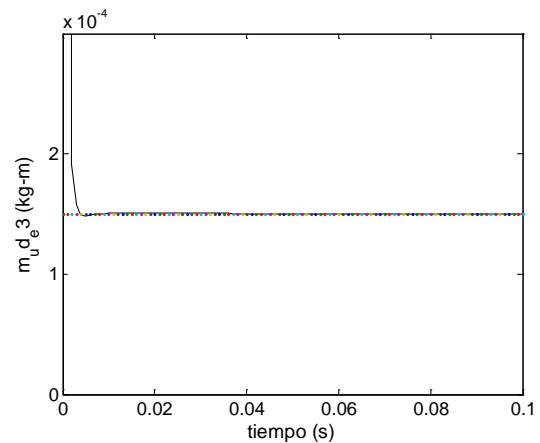


Figura 6: Identificación del desbalance en el disco inercial D₃.

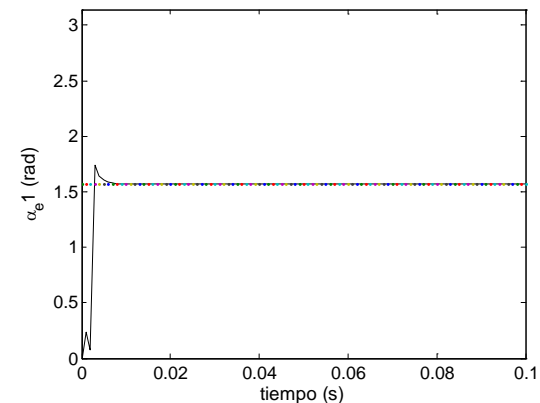


Figura 7: Identificación de la posición angular del desbalance D₁.

Se puede observar de las figuras de la 4 a la 9, que la identificación tanto del desbalance como de su posición angular se lleva a cabo en menos de 0.02 segundos y una vez identificado el parámetro, éste se mantiene constante a lo largo del tiempo hasta alcanzar su velocidad nominal de operación del rotor. Para un mejor análisis del comportamiento del identificador, en las figuras solo se muestran los resultados para un tiempo de hasta 0.1 segundos, ya que es importante observar el tiempo que requiere el identificador en línea para converger al valor

estimado. Cabe mencionar que el periodo de tiempo de muestreo utilizado fue de 1 ms, periodo de tiempo en el que se observó converge el método de Newmark para la solución de (3), y cuyos resultados son los datos de entrada para los identificadores algebraicos propuestos. Además, se verificó que este periodo de tiempo de muestreo es factible de conseguir con los sistemas de adquisición de datos experimentales.

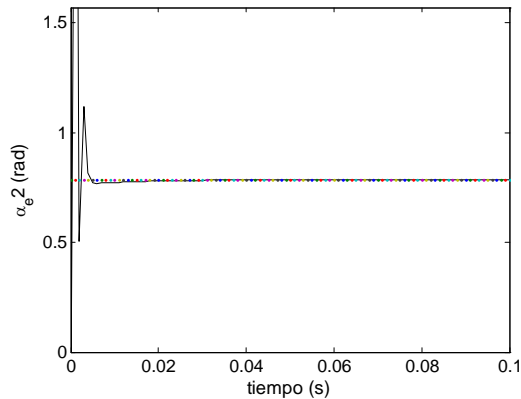


Figura 8: Identificación de la posición angular del desbalance D_2 .

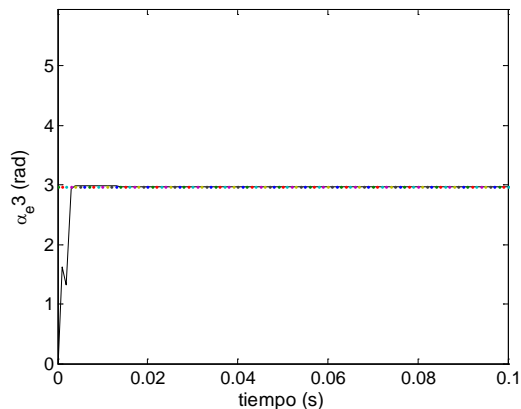


Figura 9: Identificación de la posición angular del desbalance D_3 .

Por otra parte, en las Figuras 10 y 11, se muestra el comportamiento del identificador del desbalance y su posición angular en función del tiempo respectivamente, comportamiento que corresponde al nodo 4, en el cual no existe desbalance en el rotor.

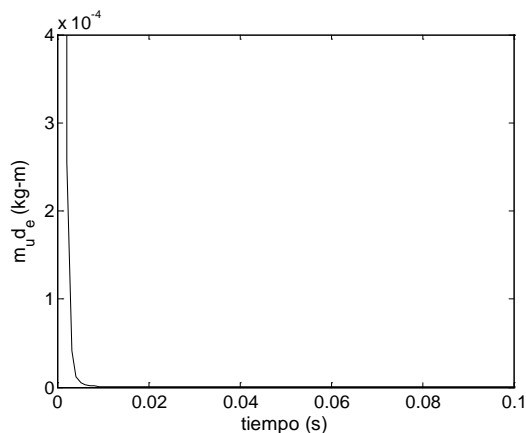


Figura 10: Identificación del desbalance en el nodo 4.

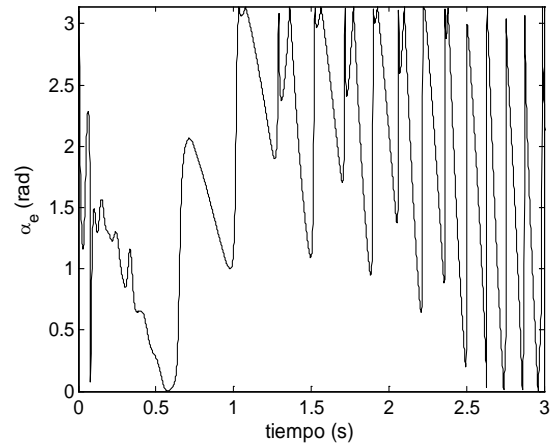


Figura 11: Identificación de la posición angular del desbalance nodo 4.

En la Figura 10 se aprecia como el identificador del desbalance tiende de forma inmediata a un valor de cero, esto a causa de que en el nodo 4 no existe masa que cause un desequilibrio al sistema. Asimismo, en la Figura 11 se observa que el identificador de la posición angular del desbalance no converge en un valor fijo, esto también a causa que en el nodo 4 no existe masa que cause un desbalance en el sistema. Cabe mencionar que este comportamiento se presenta en todos los nodos del rotor donde no existe masa de desbalance.

6. Identificador vs. Rampa de excitación

Un problema asociado a la aplicación de los métodos convencionales de balanceo (balanceo modal, coeficientes de influencia), es que éstos requieren de la respuesta de vibración en estado estable para diferentes valores de frecuencia de la excitación, además de la necesidad de llevar al sistema rotatorio hasta su velocidad nominal de operación. Sin embargo, en la práctica la frecuencia de excitación varía de manera continua, lo que impide al sistema alcanzar una vibración completamente estable, por lo que la utilidad de los datos de la respuesta de vibración del rotor, se ve limitada por la carencia de métodos de análisis en los que se considere la velocidad de las rampas de excitación. De acuerdo con lo anterior, se analizó el comportamiento del identificador del desbalance y su posición angular en función del tiempo, para diferentes rampas de excitación de tipo lineal para los casos con $\phi''=10 \text{ rad/s}^2$, $\phi''=100 \text{ rad/s}^2$ y $\phi''=200 \text{ rad/s}^2$. Los resultados obtenidos para $\phi''=10 \text{ rad/s}^2$ son los que se presentaron en la sección 5, por lo que en esta sección solo se presentan los resultados para los dos casos restantes.

Para el análisis de los identificadores en función de las rampas de excitación $\phi''=100 \text{ rad/s}^2$ y $\phi''=200 \text{ rad/s}^2$, sólo se consideró el desbalance colocado en el disco dos (nodo 6).

En la Figura 12, se muestra la respuesta del sistema rotodinámico de la Figura 2, para una rampa de excitación de tipo lineal con $\phi''=100 \text{ rad/s}^2$, aquí se puede apreciar que al aumentar 10 veces la rapidez de la rampa de excitación con respecto al caso de la figura 3, la respuesta de vibración del rotor se distorsiona, lo que complica la interpretación de la señal y su análisis. De acuerdo con (4), el tiempo que tarda el rotor en alcanzar la velocidad nominal de 3600 rpm es de 3.769 segundos.

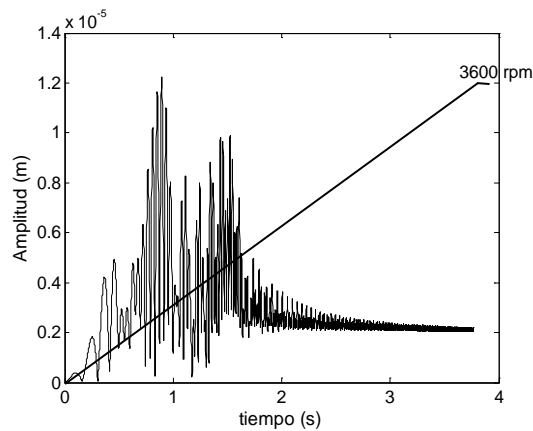
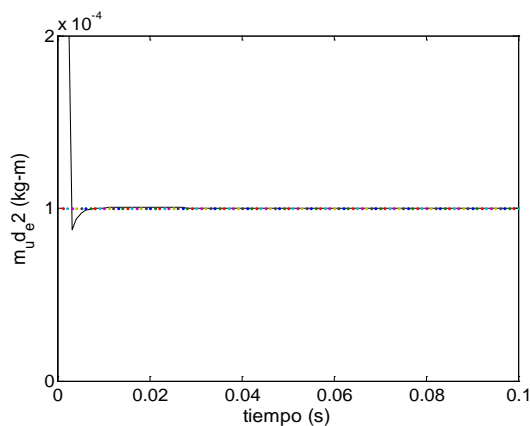
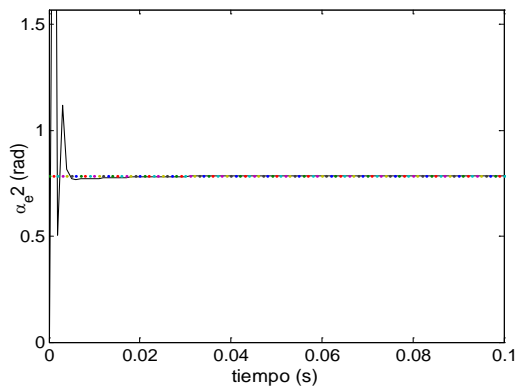


Figura 12: Respuesta de vibración del sistema nodo 6.

El comportamiento en el tiempo de los identificadores del desbalance y su posición angular, que toman como dato de entrada la señal de la figura 12, se muestran en las Figuras 13 y 14 respectivamente. Se puede apreciar que independientemente de que la rampa de excitación sea 10 veces más rápida, que la correspondiente al caso de la figura 3 y que la señal de repuesta se encuentre distorsionada, los identificadores convergen rápidamente al valor buscado y se mantienen constantes en el tiempo.

Figura 13: Identificación del desbalance en el disco inercial D_2 .Figura 14: Identificación de la posición angular del desbalance D_2 .

En la Figura 15 se muestra la respuesta del sistema rotodinámico para el mismo rotor pero con una rampa de excitación de tipo lineal con $\phi''=200 \text{ rad/s}^2$, aquí se puede apreciar

que al aumentar al doble la rapidez de la rampa de excitación con respecto al caso anterior, o 20 veces con la correspondiente al caso de la figura 3, la respuesta de vibración del rotor se distorsiona aún más, lo que definitivamente complica la interpretación de la señal y su análisis. De acuerdo con (4), el tiempo que tarda el rotor en alcanzar la velocidad nominal de 3600 rpm es de 1.884 segundos.

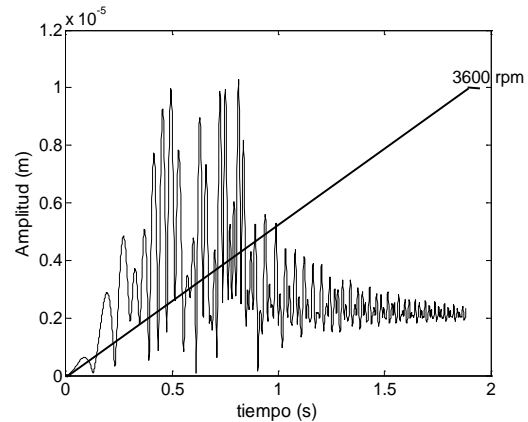
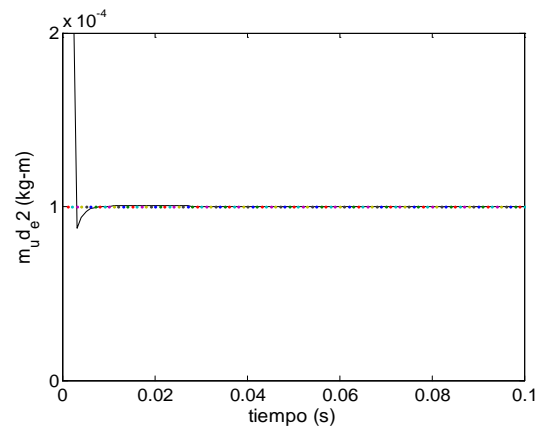
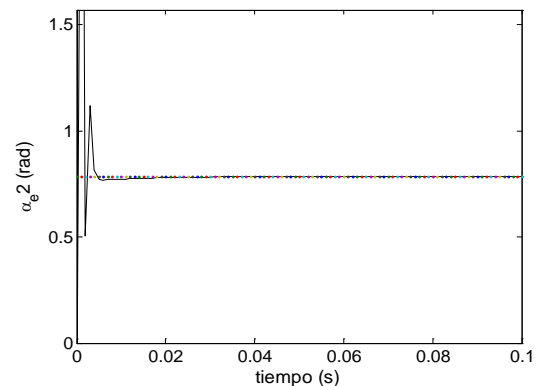


Figura 15: Respuesta de vibración del sistema nodo 6.

Figura 16: Identificación del desbalance en el disco inercial D_2 .Figura 17: Identificación de la posición angular del desbalance D_2 .

El comportamiento en el tiempo de los identificadores del desbalance y su posición angular que toman como dato de entrada la señal de la Figura 15 se muestran en las gráficas 16 y 17 respectivamente, aquí se puede apreciar que independientemente de que la rampa de excitación sea 20 veces más rápida que la

correspondiente al caso de la Figura 3 y que la señal se encuentre completamente distorsionada, los identificadores nuevamente convergen rápidamente al valor buscado y se mantienen constantes en el tiempo. Nótese que los identificadores no se ven afectados por la velocidad de la rampa de excitación, ya que estos son función del vector de desplazamientos del sistema para cada instante de tiempo, así como, del tipo de rampa de excitación.

7. Respuesta del sistema de múltiples grados de libertad con disco de balanceo activo

Para el análisis de la respuesta del sistema rotor-cojinete incluyendo discos de balanceo, la ecuación (3) se simplifica como:

$$[M]\{\delta''\} + [C(\Omega)]\{\delta'\} + [K]\{\delta\} = \sum_{n=1}^{nm_u} \{F_{u(2n-1)}\} \sin \Omega t + \sum_{n=1}^{nm_u} \{F_{u(2n)}\} \cos \Omega t + \sum_{n=1}^{nm_b} \{F_{b(2n-1)}\} \sin \Omega t + \sum_{n=1}^{nm_b} \{F_{b(2n)}\} \cos \Omega t \quad (10)$$

con

$$F_{u(2n-1)} = m_u d_n \Omega^2 \begin{Bmatrix} \cos \alpha_n \\ -\sin \alpha_n \end{Bmatrix}, \quad F_{u(2n)} = m_u d_n \Omega^2 \begin{Bmatrix} \sin \alpha_n \\ \cos \alpha_n \end{Bmatrix}$$

$$F_{b(2n-1)} = m_b e_n \Omega^2 \begin{Bmatrix} \cos \varepsilon_n \\ -\sin \varepsilon_n \end{Bmatrix}, \quad F_{b(2n)} = m_b e_n \Omega^2 \begin{Bmatrix} \sin \varepsilon_n \\ \cos \varepsilon_n \end{Bmatrix}$$

7.1. Respuesta del sistema de múltiples grados de libertad con un disco de balanceo activo

En la Figura 18, se muestra un esquema del sistema rotor-cojinete de análisis, así como, su discretización. El disco de balanceo activo se muestra con líneas discontinuas, esto se debe a que su posición a lo largo del rotor es variable. Se considera una masa de desbalance de magnitud $m_u d = 2 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$, en una posición angular de 0° , ubicada en el disco inercial D_2 , nodo 6 tal y como se muestra en la Figura 18.

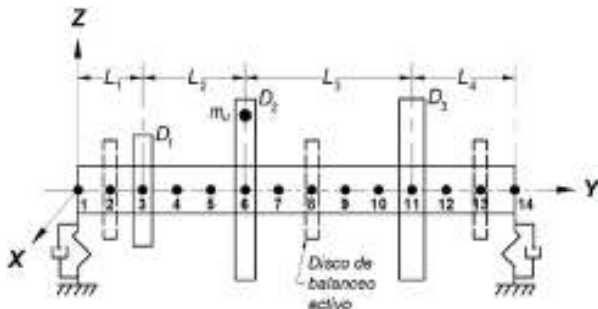


Figura 18: Modelo del rotor con disco de balanceo activo.

Las Tablas 2 y 3, muestran las propiedades mecánicas y geométricas del eje y los discos, respectivamente. Asimismo, en la Tabla 4 se presentan las características de rigidez y amortiguamiento viscoso de los soportes.

Para las simulaciones del sistema con disco de balanceo activo, se supone que se conoce el desbalance del sistema, el cual se puede determinar mediante el método de identificación algebraica en línea propuesto en este artículo. Por tanto para el disco de balanceo activo, se fijó una masa de balanceo de igual magnitud que la masa de desbalance pero en sentido contrario, con el fin de equilibrar el desbalance. La posición del disco de balanceo activo a lo largo del rotor fue cambiando para cada simulación, se inició en el nodo 2 y se terminó en el nodo 13, lo anterior para analizar la respuesta del comportamiento vibratorio del sistema para cada uno de los casos.

En la Figura 19, se presenta el diagrama de Campbell del sistema rotor-cojinete, y se observa que, para el intervalo de velocidades de 0 a 2 000 rpm, la masa de desbalance solo excita cuatro frecuencias naturales del sistema.

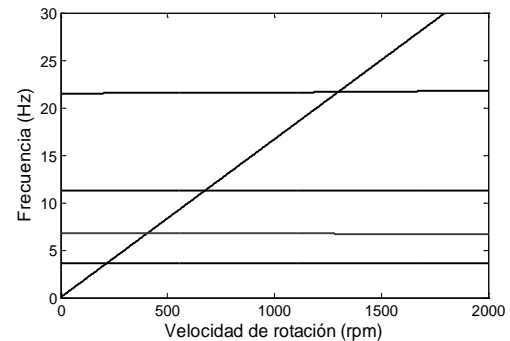


Figura 19: Diagrama de Campbell del sistema.

En la Tabla 5, se presenta una comparación de las primeras cuatro frecuencias naturales, para diferentes discretizaciones del modelo de la figura 18. Asimismo, la Figura 20 muestra el diagrama de Bode para la posición del disco inercial 2, para las discretizaciones de 13, 26 y 52 elementos finitos.

Tabla 5: Comparación de frecuencias naturales

Frecuencia Natural (Hz)	Modelo del Rotor			Desviación (%)
	13 Ele. Finitos	26 Ele. Finitos	52 Ele. Finitos	
F_1	3.522	3.584	3.584	1.73
F_2	6.683	6.769	6.769	1.27
F_3	11.160	11.240	11.240	0.71
F_4	21.530	21.650	21.650	0.55

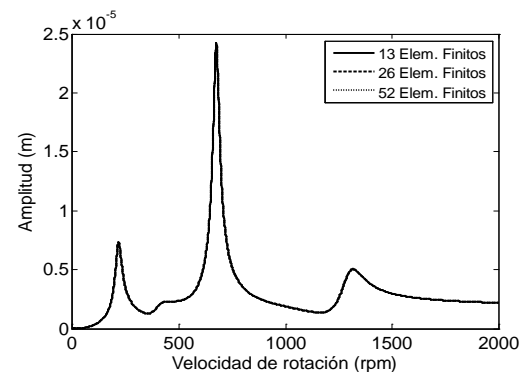


Figura 20: Respuesta del sistema para diferentes discretizaciones.

De acuerdo con los resultados mostrados en la tabla 5, los valores de las frecuencias para los modelos de 26 y 52 elementos

finitos son similares, y la desviación porcentual entre estos datos y los correspondientes para el modelo de 13 elementos finitos es menor al 2%, lo que justifica el uso de unos pocos elementos finitos para las simulaciones presentadas en este trabajo. De igual forma la figura 20, muestra que no es significativa la variación entre las señales de vibración, para los diferentes esquemas de discretización del sistema rotor-cojinete.

En las Figuras 21 a la 26, se muestra la respuesta vibratoria del sistema con y sin disco de balanceo activo para el nodo 6. En cada una de ellas, se muestra la señal de vibración del sistema sin balancear (línea continua), y la señal de vibración que se produce al entrar en operación el disco de balanceo activo (línea discontinua).

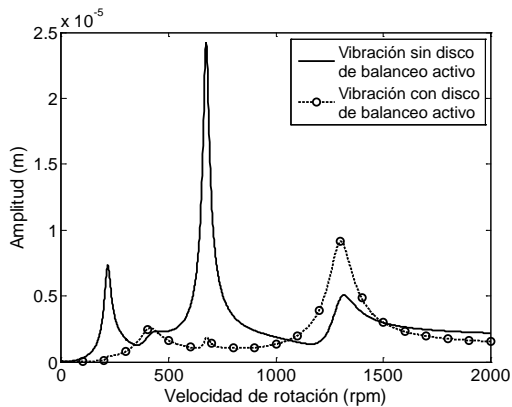


Figura 21: Respuesta del sistema con disco de balanceo activo en el nodo 2.

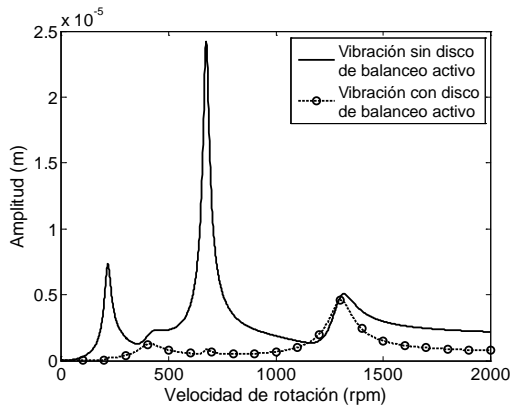


Figura 22: Respuesta del sistema con disco de balanceo activo en el nodo 4.

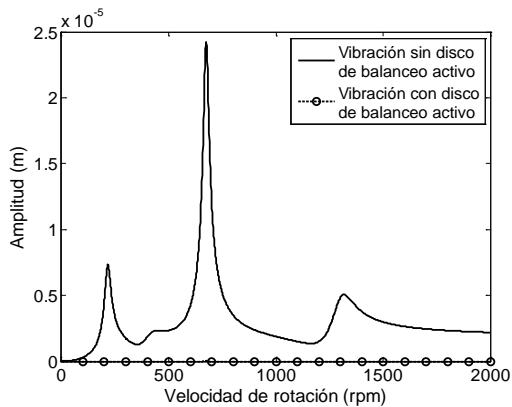


Figura 23: Respuesta del sistema con disco de balanceo activo en el nodo 6.

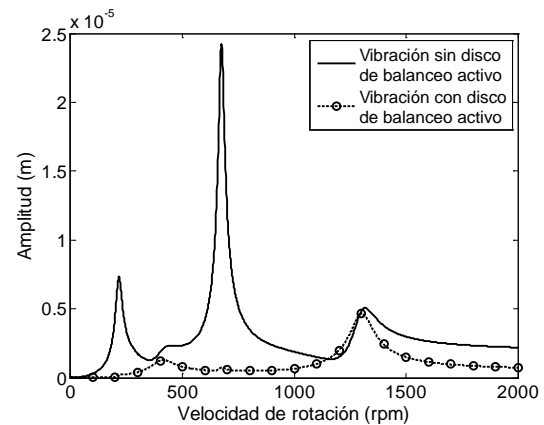


Figura 24: Respuesta del sistema con disco de balanceo activo en el nodo 8.

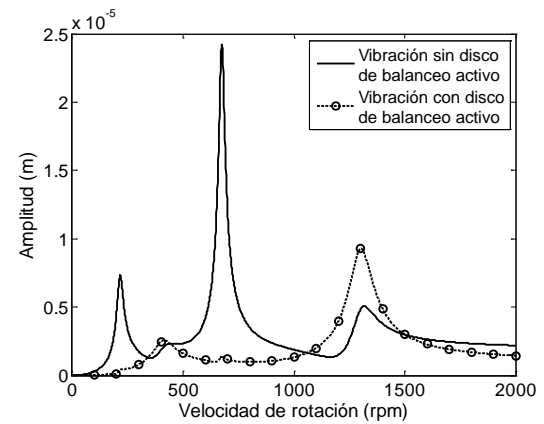


Figura 25: Respuesta del sistema con disco de balanceo activo en el nodo 10.

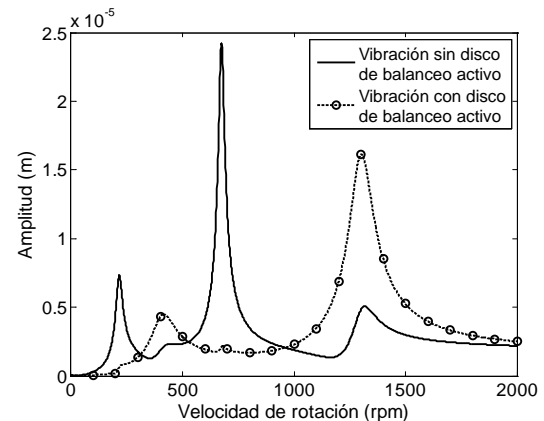


Figura 26: Respuesta del sistema con disco de balanceo activo en el nodo 13.

De las Figuras 21 a la 26, se observa que la implementación del disco activo tiene un efecto diferente en la respuesta del sistema, en función de la posición del disco a lo largo del rotor. Nótese en las Figuras 22, 23 y 24 que cuando el disco de balanceo activo se coloca en la posición de los nodos 4, 6 y 8 respectivamente, la vibración disminuye para todos los modos de vibración, en contraste, cuando el disco de balanceo activo se coloca en los nodos 2, 10 y 13, Figuras 21, 25 y 26 respectivamente, la vibración disminuye en algunos modos pero se incrementa en otros, pudiendo alcanzar niveles de vibración que pueden ser críticos para el sistema. Este comportamiento es

causado por el desequilibrio dinámico del sistema, es decir, existe un equilibrio de las fuerzas centrífugas generadas sobre el sistema por las masas de desbalance y balanceo, pero como estas fuerzas son opuestas y no se encuentran en el mismo plano generan momentos flexionantes sobre el eje, y son estos momentos los que excitan los modos donde se incrementa la vibración. Por tanto, entre más alejado este el disco de balanceo activo de la posición del desbalance, los momentos generados serán mayores, y en consecuencia la amplitud de vibración de los modos excitados se incrementará, tal y como se muestra en la respuesta de las Figuras 21 a la 26. Como es de esperarse, si el disco de balanceo activo se coloca en la posición del desbalance (nodo 6), la vibración se anula por completo, esto se puede observar en la respuesta vibratoria de la Figura 23.

7.2. Respuesta del sistema de múltiples grados de libertad con dos discos de balanceo activo

A continuación, se analiza el comportamiento vibratorio del sistema rotor-cojinete con dos discos de balanceo activo. Se considera la misma masa de desbalance y posición angular que el caso anterior. Se colocan dos discos de balanceo activo, el primero en el nodo 4 y el segundo en el nodo 8, (figura 27), y posteriormente se cambian a los nodos 2 y 13 respectivamente, (figura 28). La posición angular y la magnitud de las masas de balanceo, se consideran de tal forma que la suma de las fuerzas y momentos generados por las masas de desbalance y balanceo, sean igual a cero.

En las Figuras que se presentan en esta sección, se muestra la respuesta vibratoria del sistema con y sin discos de balanceo activo. En cada una de ellas, se muestra la señal de vibración del sistema sin balancear (línea continua), y la señal de vibración que se produce al entrar en operación los dos discos de balanceo activo (línea discontinua).

En las Figuras 27 y 28 se muestra la respuesta del rotor para el nodo 6, en éstas se observa que prácticamente la vibración del sistema se eliminó por completo, esto a causa de que el rotor se encuentra en equilibrio dinámico. También, se observa que no importa donde se coloquen los discos de balanceo activo, siempre y cuando el equilibrio de fuerzas y momentos se conserve.

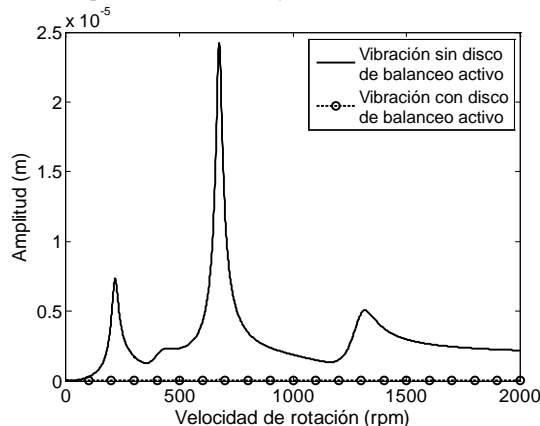


Figura 27: Respuesta del sistema en el nodo 6, con dos discos de balanceo activo en los nodos 4 y 8.

Por otra parte, se analizó la respuesta del sistema vibratorio considerando varias masas de desbalance distribuidas a lo largo del rotor y conservando los dos discos de balanceo activo. Se propuso un desbalance en cada uno de los discos de inercia D_1 ,

D_2 y D_3 del sistema rotor-cojinete (Figura 18), la magnitud y posición angular de cada una de las masas de desbalance respectivamente son: $m_u d_1 = 1 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$ a 45° , $m_u d_2 = 2 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$ a 0° y $m_u d_3 = 1 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$ a 210° . La magnitud y posición angular de las masas de balanceo, se determinan a partir de la suma de fuerzas y momentos generados por las masas de desbalance. Para este caso en particular los dos discos de balanceo activo se colocaron únicamente en los nodos 2 y 13.

En las Figuras 29 a la 32, se muestra la respuesta vibratoria del sistema.

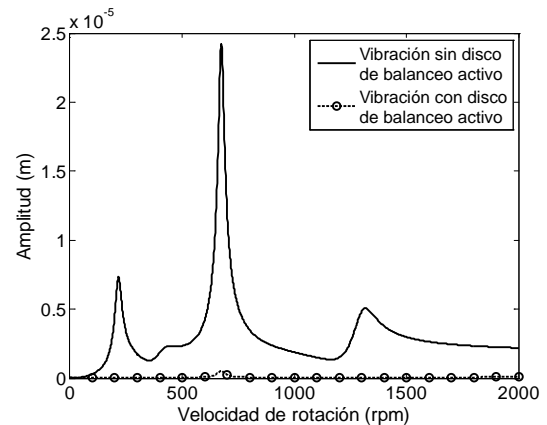


Figura 28: Respuesta del sistema en el nodo 6, con dos discos de balanceo activo en los nodos 2 y 13.

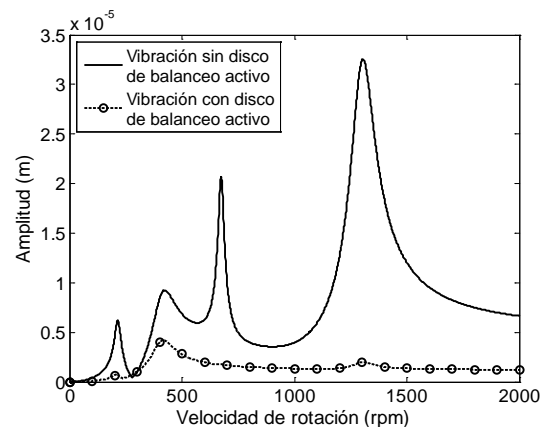


Figura 29: Respuesta del sistema en el nodo 3, con dos discos de balanceo activo en los nodos 2 y 13.

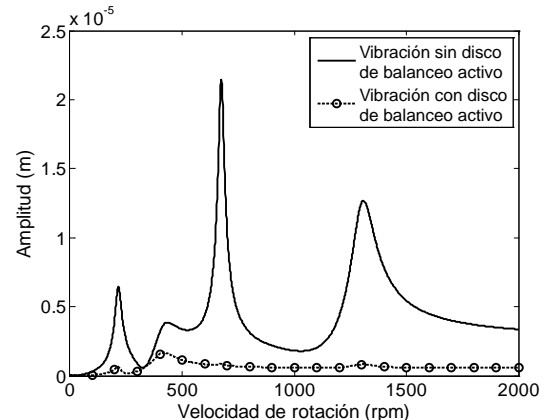


Figura 30: Respuesta del sistema en el nodo 6, con dos discos de balanceo activos en los nodos 2 y 13.

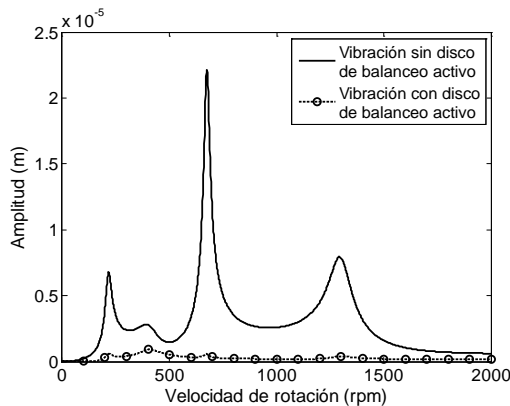


Figura 31: Respuesta del sistema en el nodo 9, con dos discos de balanceo activo en los nodos 2 y 13.

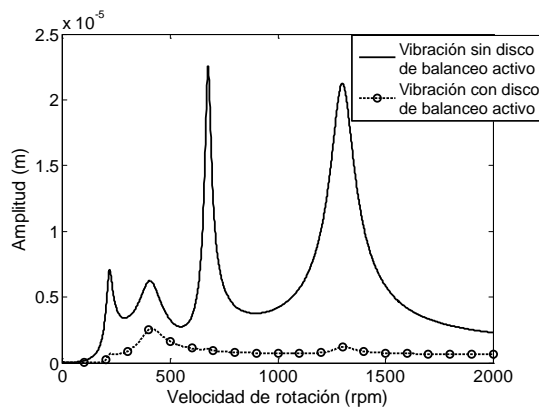


Figura 32: Respuesta del sistema en el nodo 11, con dos discos de balanceo activo en los nodos 2 y 13.

En las Figuras 29 a la 32, se muestra la respuesta de vibración en los nodos 3, 6, 9 y 11 respectivamente. Se puede observar, que los discos de balanceo activo equilibraron todos los modos, reduciendo las amplitudes de vibración del sistema. Aun cuando no se documenta en este trabajo, se registró un comportamiento similar en los nodos restantes del sistema.

8. Conclusión

Se presentó una metodología para eliminar la vibración a causa del desbalance en sistemas rotatorios, mediante lo que se denomina discos de balanceo activo. Para determinar la magnitud del desbalance y su posición angular en el rotor, se desarrolló un identificador en línea basado en la técnica de identificación algebraica. El identificador propuesto requiere únicamente de la respuesta de vibración del rotor como dato de entrada. Los resultados numéricos, muestran la rapidez y convergencia en la identificación de los parámetros en centésimas de segundo, independientemente de la velocidad de la rampa de excitación.

De acuerdo a los resultados obtenidos de los identificadores algebraicos, y tomando en cuenta de la literatura la robustez del método, se considera que es viable su implementación en conjunto con los discos de balanceo activo, para el desarrollo de un sistema de control activo de vibraciones, aplicado a sistemas rotor-cojinete. Asimismo, se puede implementar un sistema de control pasivo, al utilizar únicamente la técnica de identificación algebraica de los parámetros de desbalance, y posteriormente proceder al balanceo del rotor. Nótese que en ambos casos no es

necesario llevar al rotor hasta su velocidad nominal de operación para determinar la magnitud y posición del desbalance como es el caso de otras técnicas de balanceo.

English Summary

Automatic Balancing of a Rotor-Bearing System: On-line Algebraic Identifier for a Rotordynamic Balancing System

Abstract

A methodology for simultaneously balancing of several modes of vibration for a rotor bearing system by mean the so-called active balancing disk is presented in this paper. In order to determine the magnitude of the unbalance and its angular position on the rotor, it is proposed an on-line identifier based on algebraic identification. A mathematical model was developed for a multiple degrees-of-freedom rotational system for a beam-type finite element with 4 degrees of freedom per node. This model considers the effect of rotating inertia, gyroscope moments, shearing strains, internal-external damping and the presence of active balancing disks. Likewise, the time scale behavior of the proposed algebraic identifier was assessed and analyzed for an unbalanced mass distribution on different locations along the rotor. For this test, the vibration response was obtained from a multiple degrees-of-freedom rotor dynamic system simulation, with several linear coasting up and down. The results show that it is possible to simultaneously balance up to four vibration modes using two active balancing disks.

Keywords:

Balancing, rotordynamic, algebraic identification, rotor-bearing, unbalance, vibration.

Agradecimientos

Agradecemos a la DGEST por el apoyo recibido mediante el financiamiento al proyecto titulado “*Diseño y Construcción de un Disco Balanceador Activo para Maquinaria Rotatoria*” con clave 5294.14-P.

Referencias

- Arredondo, J.; Jugo, J.; Alonso-Quesada, S.; Lizárraga, I. y Etxebarria, V. (2008). Modelización, análisis y control de sistemas de cojinetes magnéticos activos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*. Vol. 5, No. 4, (Octubre 2008), pp. 17-27, ISSN: 1697-7912. DOI: 10.4995/S1697-7912(08)70173-0
- Beltrán-Carbajal, F.; Silva-Navarro, G. and Arias-Montiel, M. (2013). Active unbalance control of rotor systems using on-line algebraic identification methods. *Asian journal of control*, Vol. 15, No. 6, 1627-1637. DOI: 10.1002/asjc.744
- Beltrán-Carbajal, F.; Silva-Navarro, G. y Arias-Montiel, M. (2014). Control activo de vibraciones en un rotor tipo Jeffcott con velocidad variable usando una suspensión electromecánica. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*. Vol. 11, No. 3, pp. 17-27, ISSN: 1697-7912. DOI: 10.1016/j.riai.2014.05.002
- Beltrán-Carbajal, F.; Silva-Navarro, G.; Sira-Ramírez, H. and Blanco-Ortega, A. (2008). *Computación y Sistemas* Vol. 13 No. 3, 2010, pp 313-330.
- Beltrán-Carbajal, F.; Silva-Navarro, G.; Sira-Ramírez, H. and Quezada-Andrade, J. (2005). Active vibration control using on-line algebraic identification of harmonic vibrations. *Proceedings of American control conference*, Portland, Oregon.

- Beltrán-Carbajal, F.; Sira-Ramírez, H. and Silva-Navarro, G. (2006). Adaptive-like Active vibration suppression for a nonlinear mechanical system using on-line algebraic identification. Proceedings of the thirteenth international congress on sound and vibration, Vienna, Austria.
- Blanco, A.; Beltrán, F. and Silva, G. (2008). Active disk for automatic balancing of rotor-bearing systems. American Control Conference, ACC 2008. pp. 3023 - 3028, ISBN 978-1-4244-2079-7, Seattle, WA, USA, June 11-13, 2008. DOI: 10.1109/ACC.2008.4586956
- Blanco, A.; Silva, G. and Gómez, J. C. (2003). Dynamic stiffness control and acceleration scheduling for the active balancing control of a Jeffcott-like rotor system. Proceedings of The tenth International Congress on Sound and Vibration, pp. 227-234, Stockholm, Sweden, July 7-10, 2003.
- Blanco, A.; Beltrán, F.; Silva, G. and Méndez, H. (2010). Control de Vibraciones en Sistemas Rotatorios, Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial. Vol. 7, No. 4, 36-43, ISSN 1697-7912. DOI: 10.4995/RIAI.2010.04.06
- Chong-Won, L. (2006). Mechatronics in rotating machinery. 7th IFTOMM-Conference on Rotor Dynamics, pp. 25-28, Vienna, Austria, September, 2006.
- De Queiroz, M.S. (2009). An active identification method of rotor unbalance parameters, Journal of Vibration and Control, pp. 1365-1374. Vol. 15, No. 9.
- Fliess, M. and Sira-Ramírez, H. (2003). An algebraic frame work for linear identification. ESAIM: Control, optimization and calculus of variations 9, 151-168. DOI: 10.1051/cocv:2003008
- Forte, P.; Paterno, M. and Rustighi, E. (2004). A magnetorheological fluid damper for rotor applications. International Journal of Rotating Machinery, 10(3), pp. 175-182. DOI: 10.1080/10236210490426253
- Green K, Champneys A.R., Friswell M.I. y Muñoz (2008) A.M. Investigation of a multi-ball, automatic dynamic balancing mechanism for eccentric rotors. Royal Society Publishing, pp. 705-728, Vol. 366, No. 1866. DOI: 10.1098/rsta.2007.2123
- Hredzak, B. and Guo, G. (2006). Adjustable balancer with electromagnetic release of balancing members. IEEE Transactions on Magnetics, pp. 1591-1596, Vol. 42, No. 5. DOI: 10.1109/TMAG.2005.863619
- Lalanne, M.; Ferraris, G. (1990). Rotordynamics prediction in engineering. John Wiley & Sons Ltd. ISBN 0471926337.
- Ljung, L. (1987). Systems Identification: Theory for the User, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, ISBN: 0136566952
- Mahfoud, J., Der Hagopian, J., Leveque, N. and Steffen Jr. V. (2009). Experimental model to control and monitor rotating machines, Mechanism and Machine Theory, pp. 761-771.
- Manuel Arias, M.; Beltrán-Carbajal, F. and Silva-Navarro (2014), G. On-line algebraic identification of eccentricity parameters in active rotor-bearing systems, International Journal of Mechanical Sciences, DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.05.027
- Sagara, S. and Zhao, Z. Y. (1989). Recursive identification of transfer function matrix in continuous systems via linear integral filter. International journal of control 50(2), 457-477.
- Sagara, S. and Zhao, Z. Y. (1990). Numerical integration approach to on-line identification of continuous systems. Automatic 26(1), 63-74.
- Sira-Ramírez, H.; García-Carlos, C.; Cortés-Romero, J. and Luviano-Juárez A. (2014). Algebraic identification and estimation methods in feedback control systems. John Wiley & Sons ISBN 978-1-118-73060-7
- Soderstrom, T. and Stoica, P. (1989). System Identification, New York: Prentice-Hall, ISBN: 0138812365.
- Sudhakar, G.N.D.S. and Sekhar, A.S. (2011). Identification of Unbalance in a Rotor Bearing System, Journal of Sound and Vibration, pp. 2299-2313. Vol. 330, No. 10.
- Trapero, J. R. (2008). Técnicas de Identificación algebraicas y espectrales de señales armónicas. Aplicaciones en mecatrónica y economía. Ediciones de la UCLM, Cuenca 2008. ISBN: 9788484276388.
- Trapero, J. R.; Sira-Ramírez, H. and Feliu, B. V. (2006). An algebraic frequency estimator for a biased and noisy sinusoidal signal. Signal processing 87, 1188-1201. DOI: 10.1016/j.sigpro.2006.10.006
- Trapero, J. R.; Sira-Ramírez, H. and Feliu, B. V. (2007). A fast on-line frequency estimator of lightly damped vibrations in flexible structures. Journal of sound and vibration 307, 365-378. DOI: 10.1016/j.jsv.2007.07.005
- Ward, T. D. (2004). Method and system for balancing a rotating machinery operating at resonance, United States Patent. 6789422B1.
- Yuan-Pin, S. and An-Chen, L. (1997). Identification of unbalance distribution in flexible rotors, International Journal of Mechanical Sciences, pp. 841-857, Vol. 39, No. 7.
- Zhou, S. and Shi, J. (2001). Active balancing and vibration control of rotating machinery: a survey, The Shock and Vibration Digest, pp. 361-371, Vol. 33, No. 4, 2001. DOI: 10.1177/058310240103300501

Apéndice A.

Funciones de forma para el elemento finito tipo viga

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right]$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right]$$

Las expresiones para las matrices en (3) son:

$$[M_r] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[M_s] = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & 3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[C_2] = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & 4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_1] = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = A \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix}$$

con

$$A = EI / ((1+a)L^3) \quad y \quad a = 12EI / (GSL^2)$$

Donde E es el módulo de Young del material, I es el momento de inercia de la sección transversal, a es el efecto cortante, S es el área de la sección transversal y G es el módulo a cortante del material.