

# Control de Fuerza de Robots Manipuladores Basado en Observadores Proporcionales Integrales Generalizados

Alejandro Gutiérrez–Giles<sup>a,\*</sup>, Marco A. Arteaga–Pérez<sup>a</sup>, Hebertt Sira–Ramírez<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Control y Robótica. División de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México. Apdo. Postal 70–256, México, D. F., 04510, México.

<sup>b</sup>Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. Avenida IPN, No. 2508. Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica. Colonia San Pedro Zacatenco Apdo. Postal 14740, 07300 México, D.F., México.

## Resumen

En este trabajo se presenta el diseño de un controlador lineal robusto para el seguimiento simultáneo de posición y fuerza de robots manipuladores completamente actuados. Las no linealidades aditivas, posiblemente dependientes del estado, se modelan como una perturbación variante en el tiempo absolutamente acotada. Los observadores Proporcionales Integrales Generalizados (GPI, por sus siglas en inglés) son capaces de estimar esta perturbación desconocida y un cierto número de sus derivadas temporales de forma aproximada, aunque arbitrariamente cercana. Esta estimación se utiliza en el diseño del controlador para cancelar los efectos de los términos desconocidos. Hasta donde los autores saben, los observadores GPI no se han utilizado para el control de fuerza de robots manipuladores. Se presenta un análisis comparativo experimental para mostrar el buen desempeño del esquema propuesto.

## Palabras Clave:

Control de fuerza, Control de posición, manipuladores robóticos, observadores de estados, control robusto.

## 1. Introducción

La estimación de perturbaciones externas, no estructuradas, con el objetivo de cancelar exacta o aproximadamente sus efectos mediante las entradas de control, ha sido un tema ampliamente investigado en la literatura. Uno de los primeros trabajos en este sentido es el *Control por Acomodación de Perturbaciones* (DAC, por sus siglas en inglés), realizado en la década de 1970 (Johnson, 1971), mismo que ha ido evolucionando tanto teórica como prácticamente. Una técnica relacionada con el DAC es el *Control por Rechazo Activo de Perturbaciones* (ADRC, por sus siglas en inglés) (Han, 2009). Aunque la idea de estimar las perturbaciones utilizando un observador y cancelarlas mediante la entrada de control es similar, a diferencia del DAC, el énfasis en el ADRC recae principalmente en la estimación *no lineal* de perturbaciones. Una idea cercanamente relacionada constituye el núcleo del llamado *Control PID Inteligente* (IPIDC, por sus siglas en inglés) (Fliess y Join, 2006). Los desarrollos principales del IPIDC se basan en el método

algebraico, lo que implica que está restringido a modelos *fenomenológicos* de primero o segundo orden. Los observadores de perturbaciones (DOb, por sus siglas en inglés) (Ohnishi et al., 1996) también realizan un control robusto basado en la estimación y cancelación en línea de perturbaciones.

Otro método que aborda el mismo problema es el control basado en los observadores *Proporcionales Integrales Generalizados* (GPI, por sus siglas en inglés), que son la contraparte de los controladores GPI desarrollados en Fliess et al. (2002). Los observadores GPI son observadores lineales de alta ganancia que incluyen un polinomio en el tiempo como modelo interno de los efectos conjuntos tanto de las perturbaciones dependientes del estado como de las perturbaciones externas. Una estimación de este polinomio es entregada al controlador para su cancelación en tiempo real, al mismo tiempo que se estiman las variables de fase relacionadas con la salida. Los observadores GPI se basan en la linealización exacta del modelo en el espacio de estados, a diferencia de los DOb que están basados en una linealización aproximada con un modelo dado en el dominio de la frecuencia. Por su naturaleza, el uso de observadores GPI para el control de robots manipuladores es muy atractivo, debido a que estos sistemas son altamente no lineales y muchas de las técnicas más importantes para su control se basan en un modelo dinámico exacto, que resulta difícil de obtener.

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [alejandrogiles@comunidad.unam.mx](mailto:alejandrogiles@comunidad.unam.mx) (Alejandro Gutiérrez–Giles), [marteagp@unam.mx](mailto:marteagp@unam.mx) (Marco A. Arteaga–Pérez), [hsira@cinvestav.mx](mailto:hsira@cinvestav.mx) (Hebertt Sira–Ramírez)

Aunado a esto, cuando un robot interactúa con su entorno es necesario controlar no sólo la posición sino la fuerza ejercida sobre dicho entorno. En la literatura pueden encontrarse diversas estrategias para lograr este objetivo (véase por ejemplo Siciliano y Villani (1999); Yoshikawa (2000)). En general, el control de robots manipuladores en interacción con un entorno puede dividirse en dos categorías: control directo y control indirecto. En el primer caso la fuerza de contacto puede ser llevada a un valor deseado mediante un lazo de control de fuerza explícito y en el segundo caso la fuerza ejercida sobre el entorno es generada mediante el control de movimiento del manipulador. A esta última categoría pertenecen los controladores por impedancia y por *compliance* (Siciliano et al., 2010), mientras que a la primera categoría pertenecen los controladores de fuerza híbridos y paralelos (Siciliano y Villani, 1999). La idea de utilizar un estimador de perturbaciones para robustecer un controlador de fuerza ha sido utilizada en Katsura et al. (2007) para un esquema de control por impedancia, cuyo análisis de estabilidad y robustez es ampliado en Sariyildiz y Ohnishi (2014). Con respecto al control directo de fuerza, un ejemplo interesante se presenta en Parra-Vega et al. (2001), donde se desarrollan esquemas híbridos utilizando la propiedad de descomposición ortogonal del espacio cartesiano. La descomposición ortogonal permite desacoplar los controles de fuerza y de movimiento en dos espacios ortogonales independientes entre sí, facilitando el diseño de los controladores y el análisis de estabilidad (Arimoto et al., 1993).

Por otra parte, debe notarse que la mayoría de los controladores de fuerza y posición utilizan mediciones de velocidad articular, o en su defecto un estimador numérico a partir de la posición. En de Queiroz et al. (1996) y en Martínez-Rosas et al. (2006) se presentan algunas soluciones a este problema. Además, la mayoría de las estrategias de control propuestas considera que el modelo dinámico del sistema es completamente conocido. Para lidiar con el caso de incertidumbre en los parámetros del modelo, o incluso un completo desconocimiento del mismo, se han propuesto diferentes soluciones (Arteaga-Pérez y Rivera-Dueñas, 2007; Jung y Hsia, 2010; Cheah et al., 2010).

En este trabajo se utiliza, dentro del contexto de control de fuerza para robots manipuladores, una estimación aproximada, aunque cercana, de las perturbaciones tanto externas como dependientes del estado con el fin de obtener un control robusto tanto en seguimiento de fuerza como de posición, mediante los observadores GPI. El controlador presentado tiene la ventaja de no requerir el conocimiento exacto de todo el modelo (solo un aproximado de la matriz de inercia), además de que tampoco requiere medición de velocidad ni cálculo de la cinemática inversa. Hasta donde los autores saben, este enfoque nunca ha sido utilizado para el seguimiento de fuerza y posición por retroalimentación de salida para robots manipuladores.

El artículo está organizado de la siguiente forma: en la Sección 2 se presenta una introducción al control lineal de sistemas mecánicos no lineales completamente actuados, concretamente el caso de robots manipuladores rígidos. La Sección 3 presenta la contribución principal de este trabajo que es la adaptación del algoritmo presentado en la Sección 4 para el control simultáneo

de fuerza y de posición de robots rígidos. En la Sección 4 se muestran experimentos de laboratorio, los cuales sirven para validar la efectividad del método propuesto, además de incluirse un esquema adaptable y un controlador PID para propósitos de comparación. En la Sección 5 se presentan las conclusiones y algunas sugerencias de trabajo futuro en esta área.

## 2. Control basado en observadores GPI

Considérese un robot manipulador rígido de  $n$  grados de libertad. Su dinámica está dada por (Siciliano et al., 2010)

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = \tau, \quad (1)$$

donde  $q \in \mathbb{R}^n$  es el vector que contiene las coordenadas generalizadas,  $H(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia, positiva definida,  $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz diagonal positiva semidefinida que contiene los coeficientes de fricción viscosa,  $g(q) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares debidos a la gravedad y  $\tau \in \mathbb{R}^n$  es el vector de los pares que actúan sobre las articulaciones.

**Propiedad 2.1.** Con la adecuada definición de los parámetros del robot, el modelo (1) puede ser escrito como

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = \tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta, \quad (2)$$

donde  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es el *regresor* y  $\theta \in \mathbb{R}^p$  es un vector (constante) de parámetros.  $\triangle$

El siguiente desarrollo está basado principalmente en Sira-Ramírez et al. (2010). Supóngase que sólo las coordenadas articulares  $q$  son medidas, mientras que el modelo dinámico del sistema es desconocido, con excepción de la matriz de inercia  $H(q)$ <sup>1</sup>. El objetivo de control principal es seguir lo más cercanamente posible el valor de referencia  $q_r(t)$ . Idealmente, el seguimiento exacto se alcanza sólo si se cumple

$$H(q_r)\ddot{q}_r + C(q_r, \dot{q}_r)\dot{q}_r + D\dot{q}_r + g(q_r) = \tau^*, \quad (3)$$

donde  $\tau^*(t)$  representa una ley de control nominal. Dado que el modelo del sistema es desconocido, esta ley de control no puede ser calculada *a priori* con precisión. Para abordar este problema, considérese el error de seguimiento  $e \triangleq q - q_r$ , cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned} \ddot{e} = & H^{-1}(q)\tau - H^{-1}(q)[C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q)] \\ & + H^{-1}(q_r)[C(q_r, \dot{q}_r)\dot{q}_r + D\dot{q}_r + g(q_r)] \\ & - H^{-1}(q_r)\tau^*(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Definiendo  $z(t)$  como

$$\begin{aligned} z(t) = & -H^{-1}(q)[C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q)] \\ & + H^{-1}(q_r)[C(q_r, \dot{q}_r)\dot{q}_r + D\dot{q}_r + g(q_r)] \\ & - H^{-1}(q_r)\tau^*(t), \end{aligned} \quad (5)$$

<sup>1</sup>Es posible modificar el algoritmo GPI para hacer innecesario el conocimiento de la matriz de inercia, como se muestra en Arteaga-Pérez y Gutiérrez-Giles (2014)

puede obtenerse el siguiente modelo *simplificado*

$$\ddot{\mathbf{e}} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{z}(t). \quad (6)$$

Esto significa que todos los términos inciertos o desconocidos se agrupan en un solo vector  $\mathbf{z}(t)$ . La idea principal del enfoque GPI consiste en estimar en línea el vector  $\mathbf{z}(t)$  mediante un *observador lineal* tipo Luenberger. Para lograr lo anterior, se realiza la siguiente suposición.

### Suposición 2.1.

1.  $\mathbf{z}(t)$  y por lo menos sus primeras  $p$  derivadas con respecto al tiempo están acotadas para cada trayectoria  $\mathbf{q}(t)$ .
2.  $\mathbf{z}(t)$  puede ser expresado como

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{i=0}^{p-1} \mathbf{a}_i t^i + \mathbf{r}(t), \quad (7)$$

donde  $\mathbf{a}_i$  es un vector constante, para  $i = 0, \dots, p-1$  y  $\mathbf{r}(t)$  es un término residual.  $\Delta$

**Comentario 2.1.** El primer punto de la Suposición 2.1 puede reemplazarse por la suposición menos restrictiva de la existencia del vector  $\mathbf{z}(t)$  y sus primeras  $p$  derivadas temporales. Sin embargo, como consecuencia, se complica el análisis (véase Arteaga-Pérez y Gutiérrez-Giles (2014)).

Nótese que, de acuerdo con Diop y Fliess (1991),  $\mathbf{z}(t)$  es observable dado que puede ser escrita como

$$\mathbf{z}(t) = \ddot{\mathbf{e}} - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} = \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_r(t) - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}, \quad (8)$$

i.e.,  $\mathbf{z}(t)$  puede ser expresada como función de la salida  $\mathbf{q}$  y un número finito de sus derivadas temporales, el término conocido  $\ddot{\mathbf{q}}_r(t)$  y la entrada de control  $\boldsymbol{\tau}$ .

Sea  $\hat{\mathbf{z}}(t)$  una estimación de  $\mathbf{z}(t)$  y considérese la siguiente ley de control:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q}) \left[ -2\zeta\omega_n \hat{\mathbf{e}} - \omega_n^2 \mathbf{e} - \hat{\mathbf{z}}(t) \right], \quad (9)$$

donde  $\hat{\mathbf{e}}$  es un estimado de  $\mathbf{e} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r$  y  $\zeta, \omega_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales positivas definidas. Con base en (8) y (9), se establece el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.** (Sira-Ramírez et al., 2010). Sea  $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz identidad de  $n \times n$ . Supóngase que  $\zeta$  y  $\omega_n$  en (9) son elegidas de tal forma que todos los elementos de la matriz diagonal

$$\boldsymbol{\rho}_c(s) = s^2 \mathbf{I}_n + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (10)$$

son polinomios Hurwitz de segundo orden. Entonces, el esquema controlador-observador

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q}) \left[ -2\zeta\omega_n \hat{\mathbf{e}} - \omega_n^2 \mathbf{e} - \hat{\mathbf{z}}(t) \right] \quad (11)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2 + \lambda_{p+1}(\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}_1) \quad (12)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_2 = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \hat{\mathbf{z}}_1 + \lambda_p(\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}_1) \quad (13)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_1 = \hat{\mathbf{z}}_2 + \lambda_{p-1}(\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}_1) \quad (14)$$

$$\vdots$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{p-1} = \hat{\mathbf{z}}_p + \lambda_1(\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}_1) \quad (15)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_p = \lambda_0(\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}_1), \quad (16)$$

donde  $\hat{\mathbf{e}} \triangleq \hat{\mathbf{e}}_2$ ,  $\hat{\mathbf{z}} \triangleq \hat{\mathbf{z}}_1$ , lleva global y asintóticamente a los errores  $\tilde{\mathbf{e}} \triangleq \mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}_1$  y  $\tilde{\mathbf{z}} \triangleq \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}$  a una vecindad arbitrariamente pequeña del origen  $(\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{z}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ , siempre y cuando las matrices diagonales  $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}\}$  sean elegidas de tal forma que las raíces del vector de polinomios

$$\boldsymbol{\rho}(s) \triangleq s^{p+2} \mathbf{I} + \lambda_{p+1} s^{p+1} + \dots + \lambda_1 s + \lambda_0 \quad (17)$$

se localicen suficientemente lejos en el semiplano izquierdo del plano complejo  $s$ .  $\Delta$

### 3. Aplicación al control de fuerza de robots manipuladores

El modelo (1) puede ser modificado para tomar en cuenta el caso en el que el manipulador se encuentra en contacto con un entorno rígido, representado por una restricción holonómica de dimensión  $m$ . En este caso la dinámica del sistema está dada por (Parra-Vega et al., 2001; Arteaga-Pérez y Rivera-Dueñas, 2008)

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_p + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \quad (18)$$

donde  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de multiplicadores de Lagrange (físicamente representa la fuerza aplicada en el punto de contacto).  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) = \nabla \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es una matriz de rango completo (siempre y cuando no exista redundancia en la descripción de la restricción física).  $\nabla \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q})$  es el gradiente de la superficie  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^m$ . Este gradiente mapea cualquier vector sobre el plano normal al plano tangente al punto de contacto, definido por  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ .  $\boldsymbol{\tau}_p \in \mathbb{R}^n$  representa cualquier perturbación externa acotada.

Se busca que el controlador de posición y de fuerza a diseñar no utilice la cinemática inversa del robot. Esto se consigue si se trabaja directamente en coordenadas del espacio de trabajo. Primero, considérese la siguiente relación conocida

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} {}^0 \dot{\mathbf{p}}_n \\ \frac{d^0 \boldsymbol{\phi}_n}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (19)$$

donde  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  es el Jacobiano analítico del manipulador,  ${}^0 \boldsymbol{\phi}_n \in \mathbb{R}^v$  es una representación de la orientación del efector final (e.g., ángulos de Euler) y  ${}^0 \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^{(n-v)}$  es la posición del efector final.

**Suposición 3.1.** El robot no pasa por ninguna singularidad, por lo que siempre puede obtenerse  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}$ .  $\Delta$

La Suposición 3.1 puede cumplirse si se diseñan las trayectorias deseadas de tal forma que no pasen cerca de las singularidades. Se define el vector  $\mathbf{x} = [x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ . Nótese que además de este vector, se utiliza el escalar  $x$  para denotar la coordenada cartesiana  $x$ , lo que no debe causar confusión. Ahora, supóngase que se reescribe la ecuación de la restricción  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$  en coordenadas del espacio de trabajo (coordenadas cartesianas y ángulos de Euler), i.e.,

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (20)$$

Si se define  $J_{\varphi x} \triangleq \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}$ , se tiene que  $J_{\varphi}(q) = J_{\varphi x} J(q)$ . Tomando en cuenta que de (19) puede obtenerse  $\ddot{x} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q}$ , o equivalentemente  $\ddot{q} = J^{-1}(q)\ddot{x} - J^{-1}(q)\dot{J}(q)\dot{q}$ , se puede reescribir el modelo (18) como

$$\ddot{x} = M^{-1}(q)\tau + M^{-1}(q)J^T(q)J_{\varphi x}^T\lambda - M^{-1}(q)N, \quad (21)$$

donde  $M^{-1}(q) \triangleq J(q)H^{-1}(q)$  y  $N \triangleq C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g + \tau_p - H(q)J^{-1}(q)J(q)\dot{q}$ .

**Propiedad 3.1.** El vector  $\dot{x}$  puede expresarse como

$$\dot{x} = Q_x(x)\dot{x} + P_x(x)\dot{x} = Q_x(x)\dot{x} = Q_x\dot{x}, \quad (22)$$

donde  $Q_x(x) \triangleq (I_{n \times n} - P_x(x))$ ,  $P_x = P_x(x) \triangleq J_{\varphi x}^+ J_{\varphi x}$ , y  $J_{\varphi x}^+ \triangleq J_{\varphi x}^T (J_{\varphi x} J_{\varphi x}^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la pseudoinversa de Penrose,  $Q_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisface la condición de rango  $(Q_x) = n - m$ . Se cumple que  $Q_x P_x = O$ ,  $Q_x J_{\varphi x}^T = O$  y  $J_{\varphi x} Q_x = O$ . También se cumplen  $Q_x Q_x = Q_x$ ,  $P_x P_x = P_x$  y  $J_{\varphi x} P_x = J_{\varphi x}$ . Nótese que la última desigualdad en (22) se debe al hecho de que  $\frac{d}{dt}\varphi(x) = J_{\varphi x}\dot{x} = 0$ .  $\Delta$

El objetivo es diseñar un algoritmo de control lineal dividido en dos partes, de la siguiente forma:

$$\tau = \tau_u + \tau_c, \quad (23)$$

con  $\tau_u, \tau_c \in \mathbb{R}^n$ .  $\tau_u$  estará dedicada a lidiar con la parte no restringida del movimiento y  $\tau_c$  con la parte restringida.

Para diseñar la ley de control de fuerza, se calcula de (21)

$$\begin{aligned} \dot{Q}_x \dot{x} &= P_x M^{-1}(q)\tau_u + P_x M^{-1}(q)\tau_c \\ &+ P_x M^{-1}(q)J^T(q)J_{\varphi x}^T\lambda - P_x M^{-1}(q)N, \end{aligned} \quad (24)$$

donde se ha utilizado la igualdad (véase la Propiedad 3.1)  $\ddot{x} = Q_x\ddot{x} + \dot{Q}_x\dot{x}$ , o equivalentemente,  $(I - Q_x)\ddot{x} = P_x\ddot{x} = \dot{Q}_x\dot{x}$ . Se define  $\tau_c$  como

$$\tau_c = -J^T(q)J_{\varphi x}^T(\lambda_d + \tau_F), \quad (25)$$

donde  $\lambda_d$  es el valor deseado para  $\lambda$  y  $\tau_F$  es un término a ser diseñado. Definiendo

$$\dot{e}_f = \lambda - \lambda_d \quad \text{y} \quad e_f = \int_0^t (\lambda - \lambda_d) d\theta, \quad (26)$$

se puede reescribir (24), después de multiplicarla por  $J_{\varphi x}$ , como

$$A_F(\dot{e}_f - \tau_F) = -J_{\varphi x} M^{-1}(q)(\tau_u - N) + J_{\varphi x} \dot{Q}_x \dot{x}, \quad (27)$$

donde  $A_F \triangleq J_{\varphi x} J(q)H^{-1}(q)J^T(q)J_{\varphi x}^T$ . Dado que  $J_{\varphi x}$  es de rango completo y el robot no pasa por ninguna singularidad,  $A_F$  es invertible y se puede obtener

$$\dot{e}_f = \tau_F + z_{f1} \quad (28)$$

$$z_{f1} \triangleq -A_F^{-1}(J_{\varphi x} M^{-1}(q)(\tau_u - N) - J_{\varphi x} \dot{Q}_x \dot{x}). \quad (29)$$

La ecuación (28) será utilizada para diseñar la ley de control de fuerza de acuerdo con el Teorema 2.1. Por otra parte, (21) y (23) pueden ser combinadas para obtener

$$\ddot{x} = M^{-1}(q)\tau_u + M^{-1}(q)\{\tau_c + J^T(q)J_{\varphi x}^T\lambda - N\}. \quad (30)$$

Sea  $x_r$  una trayectoria de referencia que satisface la restricción (20). Se define el error de seguimiento como

$$e \triangleq x - x_r \Rightarrow \ddot{e} = M^{-1}(q)\tau_u + z_{u1}, \quad (31)$$

con  $z_{u1} \triangleq M^{-1}(q)\{\tau_c + J^T(q)J_{\varphi x}^T\lambda - N\} - \ddot{x}_r$ . La dinámica del error está completamente descrita por (28) y (31) y entonces el empleo del Teorema 2.1 es directo. Para la parte de control de fuerza, se propone

$$\tau_F = -\Lambda_F \hat{e}_f - \hat{z}_{f1} \quad (32)$$

$$\hat{e}_f = \tau_F + \hat{z}_{f1} + \lambda_{fp} \tilde{e}_f \quad (33)$$

$$\hat{z}_{f1} = \hat{z}_{f2} + \lambda_{f(p-1)} \tilde{e}_f \quad (34)$$

$$\vdots$$

$$\hat{z}_{f(p-1)} = \hat{z}_{fp} + \lambda_{fp} \tilde{e}_f \quad (35)$$

$$\hat{z}_{fp} = \lambda_{f0} \tilde{e}_f, \quad (36)$$

donde  $\Lambda_F, \lambda_{f0}, \dots, \lambda_{fp} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son matrices diagonales positivas definidas. También se define

$$\tilde{e}_f \triangleq e_f - \hat{e}_f. \quad (37)$$

Para la parte de movimiento no restringido, de acuerdo con el Teorema 2.1 se propone

$$\tau_u = M(q)[-2\zeta\omega_n \hat{e}_2 - \omega_n^2 e - \hat{z}_{u1}] \quad (38)$$

$$\dot{e} = \hat{e}_2 + \lambda_{u(r+1)} \tilde{e} \quad (39)$$

$$\hat{e}_2 = M^{-1}(q)\tau_u + \hat{z}_{u1} + \lambda_{ur} \tilde{e} \quad (40)$$

$$\hat{z}_{u1} = \hat{z}_{u2} + \lambda_{u(r-1)} \tilde{e} \quad (41)$$

$$\vdots$$

$$\hat{z}_{u(r-1)} = \hat{z}_{ur} + \lambda_{u1} \tilde{e} \quad (42)$$

$$\hat{z}_{ur} = \lambda_{u0} \tilde{e}, \quad (43)$$

donde  $\zeta, \omega_n, \lambda_{u0}, \dots, \lambda_{u(r+1)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales positivas definidas y  $\tilde{e} \triangleq e - \hat{e}$ . Los esquemas controlador-observador (25), (32)–(43), en lazo cerrado con el sistema (18), resultan en errores de seguimiento y de observación que pueden hacerse arbitrariamente pequeños, tanto para fuerza como para posición. Lo anterior se obtiene siguiendo los pasos de la demostración del Teorema 2.1 que, por motivos de espacio, se omite en este artículo (véase Sira-Ramírez et al. (2010)).  $x_r$  se define como

$$x_r = \begin{bmatrix} {}^0 p_d^T & {}^0 \phi_d^T \end{bmatrix}^T, \quad (44)$$

donde  ${}^0 p_d$  y  ${}^0 \phi_d$  son valores deseados que satisfacen (20).

#### 4. Resultados experimentales

En esta sección se valida experimentalmente la teoría desarrollada en la Sección 3. La plataforma experimental consiste en un manipulador rígido de seis grados de libertad, el robot A465 de CRS Robotics (véase la Figura 1). Sólo se consideran las articulaciones 2, 3 y 5, renombrándolas como 1, 2 y 3, respectivamente. Esto permite mostrar mejor el buen desempeño del enfoque considerado, dado que la salida será la posición



cartesiana  $(x, y)$  del efector final y su ángulo de orientación con respecto a la base  $\phi$ . Se realizaron dos experimentos distintos: el primero consistió en el seguimiento de un segmento de arco de un octavo de circunferencia, *i.e.*, un arco de  $45^\circ$  sobre una superficie esférica y el segundo consistió en el seguimiento de una línea recta sobre una superficie plana.



Figura 1: Manipulador A465 de CRS Robotics con una superficie esférica.

Para implementar el esquema de control de la Sección 3 es necesario conocer la matriz de inercia (véase el Apéndice A). Además, deben tomarse en cuenta los parámetros de los motores que actúan sobre las articulaciones, de tal forma que el modelo (18) se convierte en

$$\begin{aligned} H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) \\ = D_n^{-1}D_k v - \tau_p + J_\varphi^T(q)\lambda, \end{aligned} \quad (45)$$

donde  $D_n = \text{diag} \left\{ \frac{1}{r_1^2}, \frac{1}{r_2^2}, \frac{1}{r_3^2} \right\}$ ,  $D_k = \text{diag} \left\{ \frac{K_{a1}}{R_{a1}r_1}, \frac{K_{a2}}{R_{a2}r_2}, \frac{K_{a3}}{R_{a3}r_3} \right\}$ .  $r_i$  es la relación de reducción de la caja de engranes,  $K_{ai}$  es la constante de par y  $R_{ai}$  es la resistencia de armadura, con  $i = 1, 2, 3$ . Los valores asociados son  $r_1 = r_2 = r_3 = 100$ ,  $K_{a1} = K_{a2} = 0.188$  [Nm/A],  $K_{a3} = 0.053$  [Nm/A],  $R_{a1} = R_{a2} = 0.84$  [ $\Omega$ ] y  $R_{a3} = 2.7$  [ $\Omega$ ].  $v \in \mathbb{R}^n$  es la entrada de voltaje. Por simplicidad no se han incluido algunos parámetros del motor como la inercia del rotor y los efectos de fricción en (45). La matriz Jacobiana  $J(q)$ , necesaria para la implementación, es mostrada en el Apéndice A.

**Comentario 4.1.** Nótese que para implementar el algoritmo propuesto sólo se necesitan las ecuaciones (22), (25), (32)–(36) y (38)–(43), si la entrada es el par articular.

#### 4.1. Experimento 1: Segmento de arco de $45^\circ$

El primer experimento consistió en seguir un segmento de arco de  $45^\circ$  sobre una superficie esférica, mientras se aplica simultáneamente un perfil de fuerza deseado sobre ésta, comenzando en el punto A y terminando en el punto B como se muestra en la Figura 1. Un aspecto importante en la implementación del algoritmo de la Sección 3 son los valores de  $r$  y  $p$  utilizados en los observadores (34)–(36) y (41)–(43), respectivamente.

En general, mientras más pequeños son estos valores, es mejor. Por lo tanto, es conveniente comenzar con valores bajos e incrementarlos hasta que esto no represente ventaja alguna. Para este experimento se encontró que  $p=1$  es suficiente, con las ganancias  $\lambda_{f0} = 100$  y  $\lambda_{f1} = 20$  (*i.e.*, se eligieron los polos en  $p_{f1} = p_{f2} = -10$ ). También para la parte de movimiento restringido, se eligió  $\Lambda_F = 15$ . Para la parte de movimiento no restringido se eligió  $r = 2$ , con las ganancias  $\lambda_{u0} = 1000000I$ ,  $\lambda_{u1} = 30000I$  y  $\lambda_{u2} = 300I$  (*i.e.*, se colocaron los polos en  $p_{u1} = p_{u2} = p_{u3} = -100$ ). Las ganancias del controlador fueron  $\zeta = 3I$  y  $\omega_n = 15I$ . Nótese que la ley de control en (23) cambia a

$$v = D_k^{-1}D_n[\tau_u + \tau_c]. \quad (46)$$

Con el objetivo de comparar el desempeño del esquema propuesto, se ha implementado un controlador tipo PID mediante la realización de unas ligeras modificaciones al algoritmo de la Sección 3. Las ecuaciones (25) y (46) no cambian, mientras que  $\tau_F$  se convierte en

$$\tau_F = -\Lambda_F e_f. \quad (47)$$

De nuevo se elige  $\Lambda_F = 15$ . Por otro lado, en lugar de (38) se tiene

$$\tau_u = M(q) \left[ -K_d \dot{e} - K_p e - K_i \int_0^t e \, dt \right], \quad (48)$$

donde  $K_p = \text{diag} \{ 10000, 10000, 10000 \}$ ,  $K_i = \text{diag} \{ 1000, 1000, 1000 \}$  y  $K_d = \text{diag} \{ 40, 40, 40 \}$ . En este caso se utiliza diferenciación numérica para obtener  $\dot{e}$ . También para propósitos de comparación, se consideró el controlador adaptable reportado en Arimoto et al. (1993). Este esquema está diseñado para trabajar en coordenadas articulares, por lo que es necesario calcular en línea la cinemática inversa (en contraste con el algoritmo propuesto en la Sección 3 y el PID mencionado anteriormente). Sea  $q_d$  la trayectoria deseada equivalente en coordenadas articulares y defínase

$$\dot{q}_r = Q(q)\{\dot{q}_d - \alpha \Delta q\} + \beta J_\varphi^T(q)\Delta F, \quad (49)$$

donde  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\Delta q = q - q_d$  y  $\Delta F = e_f$ , con  $e_f$  dada en (26).  $Q(q)$  y  $J_\varphi^T(q)$  son obtenidas como se describe en la Propiedad 3.1 con la restricción expresada en coordenadas articulares, *i.e.*,  $\varphi(q) = 0$ . La ley de control correspondiente está dada por

$$\begin{aligned} v = D_k^{-1}D_n \{ Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r)\hat{\theta} \\ - J_\varphi^T(\lambda_d - \gamma \Delta F) - K_v s \}, \end{aligned} \quad (50)$$

donde  $\gamma > 0$  y  $K_v$  es una matriz diagonal positiva definida. De acuerdo con la Propiedad 2, se tiene

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r)\hat{\theta} = \hat{H}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{D}\dot{q}_r + \hat{g}(q). \quad (51)$$

La ley de adaptación está dada por

$$\frac{d}{dt}\hat{\theta} = -\Gamma^{-1}Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r)s, \quad (52)$$

donde  $s = \dot{q} - \dot{q}_r$  y  $\Gamma$  es una matriz diagonal positiva definida. La definición del regresor  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r)$  y del vector de parámetros  $\theta$  se presenta en el Apéndice A. Las ganancias se eligieron como  $K_v = \text{diag}\{100, 100, 50\}$ ,  $\Gamma^{-1} = \text{diag}\{0.0001, 0.0001, 0.0001, 0.001, 0.001, 0.001, 0.001, 0.1, 0.1, 0.1, 1.0, 1.0, 0.1\}$ ,  $\alpha = \text{diag}\{100, 100, 50\}$ ,  $\beta = 0.001$  y  $\gamma = 18$ . Debe aclararse que se ha establecido la condición inicial  $\hat{\theta}(0)$  con los parámetros nominales y no con el valor cero, como es usual. La restricción ha sido identificada experimentalmente como  $\phi(x) = (x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2 = 0$ , con  $h = 0.51$ ,  $k = -0.305$  y  $r = 0.119$ . Para el seguimiento de posición, se ha programado un polinomio suave de quinto orden con tiempo final  $t_f = 20$  [s]. El ángulo de rotación deseado se calcula en línea para que el efector final permanezca perpendicular a la superficie. Asimismo, se propone el perfil de fuerza deseado

$$\lambda_d = \begin{cases} 20 + 40 \sin\left(\frac{\pi t}{t_f}\right) \cdot \left(1 + 0.5 \sin\left(\frac{3\pi t}{t_f}\right)\right) \text{ [N]} & t \leq t_f \\ 20 \text{ [N]} & t > t_f. \end{cases}$$

La Figura 2 muestra el seguimiento de las trayectorias de posición y de fuerza para los esquemas mencionados. Para tener una idea del desempeño de los diferentes métodos, en la Figura 3 se muestran los errores correspondientes. En esta figura puede apreciarse que para la coordenada cartesiana  $x$ , el control adaptable tuvo mejor desempeño, aunque todos los algoritmos mantuvieron el error de seguimiento en esta coordenada por debajo de  $\pm 0.25$  [mm] la mayor parte del tiempo. Por otro lado para la coordenada  $y$  los errores son mayores, aunque se mantienen por debajo de 1 [mm] la mayor parte del tiempo. Una razón para que suceda esto podría ser la imprecisión en la descripción de la superficie de restricción  $\varphi(x) = 0$ . En cuanto al error de orientación, el desempeño del algoritmo GPI es mejor, aunque de nuevo todos los algoritmos mantuvieron este error por debajo de  $\pm 0.2^\circ$ , lo que puede considerarse un buen resultado. Finalmente, el seguimiento de fuerza muestra un comportamiento similar para todos los casos. Nótese que en el GPI se presenta un error ligeramente mayor durante el movimiento, pero una vez que el robot deja de moverse el error de seguimiento de fuerza oscila por debajo de  $\pm 1$  [N]. El controlador adaptable muestra un comportamiento similar, aunque las oscilaciones son más rápidas. Por su parte, el algoritmo PID presenta un error residual constante de alrededor de 1 [N].

#### 4.2. Experimento 2: Trayectoria en línea recta

El segundo experimento consistió en el seguimiento de una línea recta sobre un plano con una pendiente de  $80^\circ$  con respecto a la horizontal. El movimiento del efector final fue del punto inicial  $(x_d(0), y_d(0)) = (0.5195, 0.5015)$  [m] al punto final  $(x_d(t_f), y_d(t_f)) = (0.4731, 0.2364)$  [m], ambos sobre la superficie. Un polinomio de quinto orden fue programado para realizar dicha trayectoria con un tiempo final de  $t_f = 25$  [s]. En este caso, el ángulo de rotación es constante, con valor de  $\phi_d = -10^\circ$ . La fuerza deseada se eligió como

$$\lambda_d = \begin{cases} 20 + 30\left(1 - e^{-\frac{t}{1.8}}\right) + 10 \sin\left(\frac{4\pi t}{25}\right) \text{ [N]} & t \leq t_f \\ 50 \text{ [N]} & t > t_f. \end{cases}$$

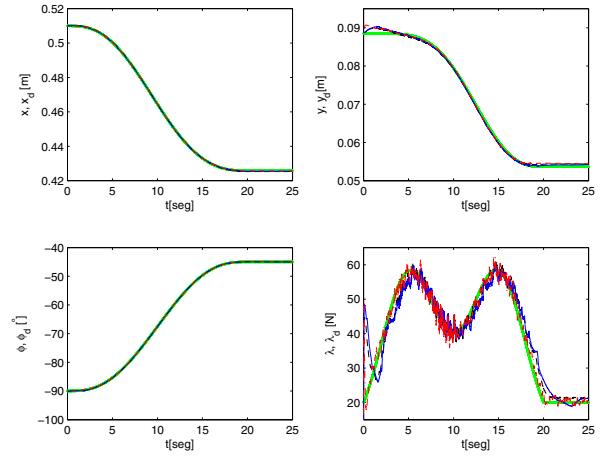


Figura 2: Experimento 1: Coordenadas reales y deseadas ( $\cdots$ ). a)  $x$  vs.  $x_d$ . b)  $y$  vs.  $y_d$ . c) Ángulos de rotación real y deseado.  $\phi$  vs.  $\phi_d$ . d) Fuerzas de contacto real y deseada.  $\lambda$  vs.  $\lambda_d$ . GPI (—), Adaptable (---), PID (···).

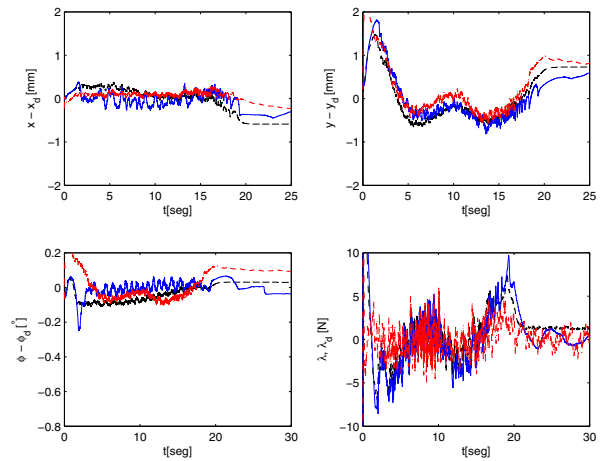


Figura 3: Experimento 1: Errores de seguimiento. a)  $e_x$ . b)  $e_y$ . c)  $e_\phi$ . d)  $\Delta\lambda$ . GPI (—), Adaptable (---), PID (···).

Para el algoritmo GPI se eligió  $p = 3$ , con  $\lambda_{r0} = 0.1$ ,  $\lambda_{f1} = 3.001$ ,  $\lambda_{f2} = 30.03$  y  $\lambda_{f3} = 100.3$  (i.e., se ubicaron los polos del observador en  $p_{f1} = -100$ ,  $p_{f2} = p_{f3} = p_{f4} = -0.1$ ). La ganancia de fuerza fue  $\Lambda_F = 18$ . Para la parte de movimiento no restringido se eligió  $r = 2$ , con  $\lambda_{u0} = 40960000I$ ,  $\lambda_{u1} = 2048000I$ ,  $\lambda_{u2} = 38400I$  y  $\lambda_{u3} = 320I$  (i.e., se colocaron los polos en  $p_{u1} = p_{u2} = p_{u3} = p_{u4} = -80$ ). Se eligieron las ganancias  $\zeta = I$  y  $\omega_n = 0.5I$ . Para el algoritmo PID dado por (47)–(48) se eligieron  $\Lambda_F = 18$ ,  $K_p = \text{diag}\{10000, 10000, 10000\}$ ,  $K_i = \text{diag}\{1000, 1000, 1000\}$  y  $K_d = \text{diag}\{40, 40, 40\}$ . Para el controlador adaptable se eligieron  $\Gamma^{-1} = \text{diag}\{0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 10, 10, 10, 10, 10, 10\}$ ,  $K_v = \text{diag}\{40, 40, 20\}$ ,  $\alpha = \text{diag}\{180, 180, 90\}$ ,  $\beta = 0.001$  y  $\gamma = 18$ . Al igual que en el experimento anterior, la condición inicial  $\hat{\theta}(0)$  se estableció utilizando los parámetros nominales del modelo. Para los tres esquemas, cualquier parámetro no mencionado toma el mismo valor utilizado en el experimento de la Sección 4.1.

La Figura 4 muestra el seguimiento de las trayectorias de posición y de fuerza para los diferentes esquemas. Al igual que antes, el desempeño de todos los algoritmos es similar, aunque esta vez el PID resultó menos preciso en el control de fuerza. Nótese que, en contraposición, este controlador presenta menos *chattering* en el control de posición. Esto puede observarse mejor en la Figura 5, en donde se muestran los errores correspondientes. Puede apreciarse que para la coordenada  $x$ , el algoritmo GPI presenta un menor error que los otros dos esquemas (por debajo de  $\pm 0.51$  [mm] la mayor parte del tiempo), aunque esto parece obtenerse a costa de una pérdida de desempeño para la coordenada  $y$ . Nótese que para todos los casos la magnitud del error es menor a 1 [mm] la mayor parte del tiempo. Para el error de rotación, el algoritmo PID tiene el mejor desempeño, mientras que el GPI y el adaptable tienen comportamientos similares a partir de  $t = 5$  [s]. En los primeros 5 [s] el esquema GPI presenta el peor desempeño. Finalmente, el seguimiento de fuerza es mejor en el caso de los controladores GPI y adaptable. Claramente, el esquema PID presenta el peor desempeño en este aspecto, alcanzando errores de hasta 8.5 [N]. De hecho, existe un error residual cuando el robot ha alcanzado la posición final. Debe notarse que aunque existe un poco de *chattering* en los controladores GPI y adaptable, en el primero la magnitud de las oscilaciones es menor y el error permanece casi constante alrededor de  $-0.5$  [N] cuando el manipulador llega a su posición final.

**Comentario 4.2.** Los grados de los polinomios que sirven como modelo interno para las perturbaciones,  $r$  y  $p$  en (32)–(36) y (38)–(43) están relacionados con la riqueza de las señales a estimar. En general, mientras más grandes sean estas variables se tendrá una mejor estimación, aunque existe un compromiso entre grado de aproximación y carga computacional. En este caso particular, se ha determinado experimentalmente que valores mayores a los elegidos para  $r$  y  $p$  no mejoraban apreciablemente el desempeño.

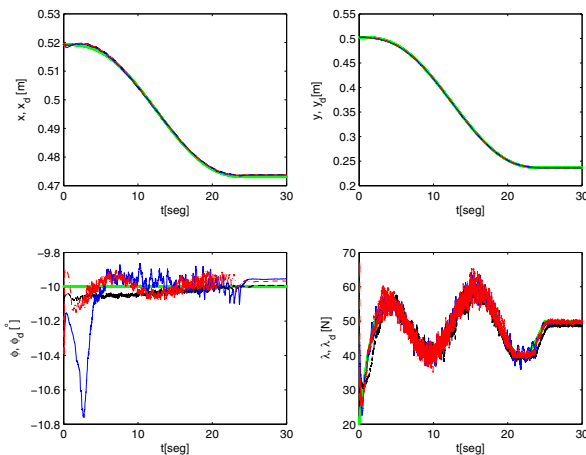


Figura 4: Experimento 2: Coordenadas reales y deseadas ( $\cdots$ ). a)  $x$  vs.  $x_d$ . b)  $y$  vs.  $y_d$ . c) Ángulos de rotación real y deseado.  $\phi$  vs.  $\phi_d$ . d) Fuerzas de contacto real y deseada.  $\lambda$  vs.  $\lambda_d$ . GPI (—), Adaptable (---), PID (···).

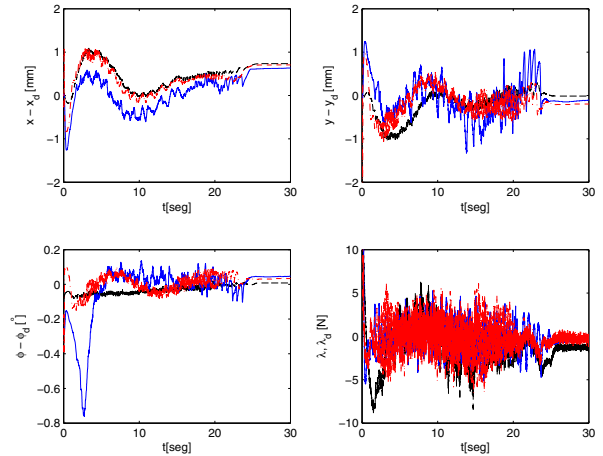


Figura 5: Experimento 2: Errores de seguimiento. a)  $e_x$ . b)  $e_y$ . c)  $e_\phi$ . d)  $\Delta\lambda$ . GPI (—), Adaptable (---), PID (···).

#### 4.3. Discusión

Todos los esquemas considerados en esta comparación experimental han presentado un buen desempeño, incluyendo el algoritmo PID. La desventaja principal de este algoritmo es la presencia de un mayor error en el seguimiento de fuerza en el movimiento en línea recta, aunque el seguimiento en posición y orientación es similar al obtenido utilizando los otros dos algoritmos. En cuanto a los algoritmos GPI y adaptable, puede concluirse que el desempeño es prácticamente el mismo para ambos casos. Sin embargo, el algoritmo GPI tiene la ventaja sobre el controlador adaptable de requerir menos información sobre el modelo del robot, de tal forma que su implementación es más directa. Además, desde un punto de vista teórico, el controlador GPI garantiza sólo el acotamiento final de los errores, cuya meta es claramente alcanzada, mientras que el controlador adaptable garantiza seguimiento exacto, lo que no se presenta en este caso.

#### 5. Conclusiones

En este artículo, se emplearon los observadores Proporcionales Integrales Generalizados (GPI) para diseñar un control de seguimiento de posición y fuerza para robots manipuladores rígidos. Hasta donde los autores saben, no se ha utilizado este enfoque para resolver el problema abordado en este trabajo. Se mostró que los observadores GPI estiman naturalmente, de forma arbitrariamente cercana, las entradas desconocidas del sistema simplificado y un cierto número de sus derivadas temporales. Esta información es utilizada en el diseño de un control lineal para cancelar los efectos de los términos desconocidos. Los términos no lineales desconocidos, aditivos, posiblemente dependientes del estado, son modelados como una sola perturbación aditiva, absolutamente acotada, variante en el tiempo. Para aplicar este enfoque al control de fuerza de robots, el par de entrada es dividido en dos partes, la primera está dedicada a lidiar con el control de movimiento y la segunda es utilizada para lograr la aplicación del perfil de fuerza deseado. Ambas

señales de control pueden elegirse independientemente, siempre y cuando las trayectorias deseadas cumplan con las restricciones impuestas por el sistema. Este procedimiento simplifica ampliamente el diseño del esquema controlador–observador y es logrado expresando los errores de fuerza en términos de ecuaciones diferenciales de primer orden con términos desconocidos de perturbación, mientras que para el seguimiento de posición, la fuerza ejercida es considerada como una perturbación.

Se realizaron dos experimentos para validar el desempeño del enfoque propuesto. El banco experimental constó de un manipulador rígido en contacto con una superficie (se utilizaron una superficie plana y una esférica). En ambos casos la tarea deseada consistió en seguir una trayectoria sobre la superficie correspondiente y, simultáneamente, aplicar sobre ésta una fuerza deseada variante en el tiempo. Con fines de comparación, se implementaron un algoritmo adaptable y un controlador PID. Los resultados muestran un buen desempeño para los tres casos. Sin embargo, para el PID sobre la superficie plana se presenta un error de seguimiento de fuerza mayor, mientras que para los algoritmos adaptable y GPI el desempeño fue mejor. La ventaja del algoritmo GPI es que necesita menos información sobre el modelo del robot (sólo se requiere la matriz de inercia y no requiere de cinemática inversa) y por lo tanto su implementación es más directa. Como trabajo futuro se modificará el algoritmo GPI para hacerlo independiente del conocimiento de la matriz de inercia. Además, se buscará un mejor desacoplamiento de las partes restringida y no restringida del controlador para mejorar el desempeño.

## English Summary

### Generalized Proportional Integral observer–based force control in robot manipulators.

#### Abstract

In this work the design of a linear observer–linear controller robust output feedback scheme is introduced for simultaneous trajectory tracking of position and force in fully actuated robot manipulators. The unknown state–dependent additive nonlinearity influencing the input–output description is modeled as an absolutely bounded “time–varying perturbation”. Generalized Proportional Integral (GPI) observers are shown to naturally estimate the unknown perturbation and a certain number of its time derivatives in an arbitrarily close manner. This information is used to advantage on the linear feedback controller design via a simple cancelation effort. To the best of the authors’ knowledge GPI observers have not been used before for robot force control. A comparison experimental analysis is presented to show the good performance of the proposed approach.

#### Keywords:

Force control, position control, robotic manipulators, state observers, robust control.

## Agradecimientos

Este trabajo se realizó en el marco del proyecto **PAPIIT No. IN116314**. Alejandro Gutiérrez–Giles agradece al **Conacyt** bajo la beca doctoral con CVU No. **334785**. H. Sira–Ramírez agradece al **Cinvestav** (México) y al **Conacyt** bajo el proyecto No. **80777**.

## Referencias

- Arimoto, S., Liu, Y. H., Naniwa, T., 1993. Principle of orthogonalization for hybrid control of robot arms. En: Proceedings of the 12th IFAC World Congress. Vol. 1. pp. 507–512.
- Arteaga-Pérez, M. A., Gutiérrez-Giles, A., 2014. On the GPI approach with unknown inertia matrix in robot manipulators. *International Journal of Control* 87 (4), 844–860.
- Arteaga-Pérez, M. A., Rivera-Dueñas, J. C., July 2007. Force control without inverse kinematics nor robot model. En: Proc. CD ROM, European Control Conference ECC07. Kos Island, Greece, pp. 4385–4392.
- Arteaga-Pérez, M. A., Rivera-Dueñas, J. C., June–July 2008. Testing experimentally the robustness against friction of a force control algorithm. En: Proc. IEEE International Symposium on Industrial Electronics. Cambridge, UK, pp. 1029–1034.
- Cheah, C. C., Hou, S. P., Zhao, Y., Slotine, J.-J. E., 2010. Adaptive vision and force tracking control for robots with constraint uncertainty. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 15 (3), 389–398.
- de Queiroz, M. S., Dawson, D. M., Burg, T., April 1996. Position/force control of robot manipulators without velocity/force measurements. En: Proc. IEEE Conference on Robotics and Automation. Vol. 3. Minneapolis, Minnesota, pp. 2561–2566.
- Diop, S., Fliess, M., December 1991. Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories. En: Proc. of the 36th IEEE Conference on Decision and Control. Brighton, U.K.
- Fliess, M., Join, C., 2006. Intelligent pid controller. En: Proc. of the 16th Mediterranean Conference on Control and Automation. Ajaccio, Corsica, France.
- Fliess, M., Marquez, R., Delaleau, E., Sira-Ramírez, H., 2002. Correcteurs proportionnels intégraux généralisés. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 7 (2), 23–41.
- Han, J., March 2009. From PID to active disturbance rejection control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 56 (3), 900–906.
- Johnson, C. D., 1971. Accommodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC16 (6), 635–644.
- Jung, S., Hsia, T. C., 2010. Reference compensation technique of neural force tracking impedance control for robot manipulators. En: Proceedings of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation. pp. 650–655.
- Katsura, S., Matsumoto, Y., Ohnishi, K., Feb 2007. Modeling of force sensing and validation of disturbance observer for force control. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* 54 (1), 530–538. DOI: 10.1109/TIE.2006.885459
- Martínez-Rosas, J. C., Arteaga-Pérez, M. A., Castillo-Sánchez, 2006. Decentralized control of cooperative robots without velocity-force measurements. *Automatica* 42, 329–336.
- Ohnishi, K., Shibata, M., Murakami, T., March 1996. Motion control for advanced mechatronics. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on* 1 (1), 56–67. DOI: 10.1109/3516.491410
- Parra-Vega, V., Rodríguez – Ángeles, A., Arimoto, S., Hirzinger, G., 2001. High precision constrained grasping with cooperative adaptive handcontrol. *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 32, 235–254.
- Sariyildiz, E., Ohnishi, K., 2014. On the explicit robust force control via disturbance observer. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* PP (99), 1–1. DOI: 10.1109/TIE.2014.2361611
- Siciliano, B., Sciacivico, L., Villani, L., Oriolo, G., 2010. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer–Verlag, London, Great Britain.
- Siciliano, B., Villani, L., 1999. *Robot Force Control*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Sira-Ramírez, H., Ramírez-Neria, M., Rodríguez-Ángeles, A., Dec 2010. On the linear control of nonlinear mechanical systems. En: Proc. of 49th IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta, GA, USA, pp. 1999–2004.



Yoshikawa, T., April 2000. Force control of robot manipulators. En: Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation. San Francisco, USA, pp. 220–226.

### Apéndice A. Modelo nominal del robot CRS A465

En este apéndice se presenta el modelo dinámico del robot CRS A465 y el Jacobiano analítico del mismo. Dado que los parámetros de los motores ya se han dado en la Sección 4, sólo se considerará la parte mecánica. Tomando en cuenta que la matriz de inercia es simétrica, sus elementos están dados por  $h_{11} = \theta_1 + 2(\theta_4 + \theta_5)c_2 + 2\theta_6c_{23} + 2\theta_7c_3$ ,  $h_{12} = (\theta_4 + \theta_5)c_2 + \theta_6c_{23} + 2\theta_7c_3 + \theta_8$ ,  $h_{13} = \theta_6c_{23} + \theta_7c_3 + \theta_9$ ,  $h_{21} = h_{12}$ ,  $h_{22} = \theta_2 + 2\theta_7c_3$ ,  $h_{23} = \theta_9 + \theta_7c_3$ ,  $h_{31} = h_{13}$ ,  $h_{32} = h_{23}$  y  $h_{33} = \theta_3$ . Nótese que  $c_2 = \cos(q_2)$ ,  $c_3 = \cos(q_3)$  y  $c_{23} = \cos(q_2 + q_3)$ . La matriz  $C(q, \dot{q})$  puede ser calculada a partir de la matriz de inercia de acuerdo con Siciliano et al. (2010) y se omitirá en este artículo. Los elementos del vector de fuerzas gravitacionales están dados por  $g_1 = \theta_{13}c_1 + \theta_{14}c_{12} + \theta_{15}c_{123}$ ,  $g_2 = \theta_{14}c_{12} + \theta_{15}c_{123}$  y  $g_3 = \theta_{15}c_{123}$ . La matriz de coeficientes de fricción viscosa se define como  $D = \text{diag}\{\theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{12}\}$ .

Los parámetros correspondientes son  $\theta_1 = m_1l_{c1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2) + m_3(l_1^2 + l_2^2 + l_{c3}^2) + I_1 + I_2 + I_3 + I_{m1}$ ,  $\theta_2 = m_2l_{c2}^2 + m_3(l_1^2 + l_{c3}^2) + I_2 + I_3 + I_{m2}$ ,  $\theta_3 = m_3l_{c3}^2 + I_3 + I_{m3}$ ,  $\theta_4 = m_2l_1l_{c2}$ ,  $\theta_5 = m_3l_1l_2$ ,  $\theta_6 = m_3l_1l_{c2}$ ,  $\theta_7 = m_3l_2l_{c3}$ ,  $\theta_8 = m_2l_{c2}^2 + m_3(l_2^2 + l_{c3}^2) + I_2 + I_3$ ,  $\theta_9 = m_3l_{c3}^2 + I_3$ ,  $\theta_{10} = d_1$ ,  $\theta_{11} = d_2$ ,  $\theta_{12} = d_3$ ,  $\theta_{13} = g(m_1l_{c1} + (m_2 + m_3)l_1)$ ,  $\theta_{14} = g(m_2l_{c2} + m_3l_2)$  y  $\theta_{15} = m_3gl_{c3}$ , donde  $l_i$  es la longitud del eslabón  $i$ ,  $l_{ci}$  es la posición del centro de masa,  $m_i$  es la masa del eslabón,  $I_i$  es el tensor de inercia del eslabón,  $g$  es la constante de aceleración gravitacional y los  $d_i$  son parámetros obtenidos mediante el algoritmo de Denavit–Hartenberg.

Los valores nominales para el robot A465 de CRS Robotics son  $m_1 = 28.5$  [kg],  $m_2 = 16.6$  [kg],  $m_3 = 1.0$  [kg],  $I_1 = 0.85$  [Kg·m<sup>2</sup>],  $I_2 = 0.70$  [Kg·m<sup>2</sup>],  $I_3 = 0.18$  [Kg·m<sup>2</sup>],  $I_{m1} = 0.90376$  [Kg·m<sup>2</sup>],  $I_{m2} = 0.90376$  [Kg·m<sup>2</sup>],  $I_{m3} = 0.049$  [Kg·m<sup>2</sup>],  $l_1 = 0.33$  [m],  $l_2 = 0.35$  [m],  $l_3 = 0.13$  [m],  $l_{c1} = 0.14$  [m],  $l_{c2} = 0.14$  [m],  $l_{c3} = 0.07$  [m],  $d_1 = 2.6$  [N·m·s],  $d_2 = 2.5$  [N·m·s] y  $d_3 = 1.5$  [N·m·s].

El regresor  $Y \triangleq Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q}_r)$  en (51) está dado por

$$Y = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{r1} & 0 & 0 & y_{14} & y_{15} & y_{16} & y_{17} \\ 0 & \ddot{q}_{r2} & 0 & y_{24} & y_{25} & y_{26} & y_{27} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddot{q}_{r3} & 0 & 0 & y_{36} & y_{37} \\ \ddot{q}_{r2} & \ddot{q}_{r3} & \dot{q}_{r1} & 0 & 0 & c_1 & c_{12} & c_{123} \\ \cdots & \ddot{q}_{r1} & \ddot{q}_{r3} & 0 & \dot{q}_{r2} & 0 & 0 & c_{12} & c_{123} \\ \ddot{q}_{r1} & y_{39} & 0 & 0 & \dot{q}_{r3} & 0 & 0 & c_{123} \end{bmatrix}$$

donde  $y_{14} = y_{15} = (2\ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2})c_2 - (\dot{q}_2\dot{q}_{r1} + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_{r2})s_2$ ,  $y_{16} = (2\ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2} + \ddot{q}_{r3})c_{23} - ((\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_{r1} + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)(\dot{q}_{r2} + \dot{q}_{r3}))s_{23}$ ,  $y_{17} = (2\ddot{q}_{r1} + 2\ddot{q}_{r2} + \ddot{q}_{r3})c_3 - (\dot{q}_3(0.5\dot{q}_{r1} + \dot{q}_{r2}) + 0.5(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)\dot{q}_{r3})s_3$ ,  $y_{24} = y_{25} = \ddot{q}_{r1}c_2 + \dot{q}_1\dot{q}_{r1}s_2$ ,  $y_{26} = \ddot{q}_{r1}c_{23} + \dot{q}_1\dot{q}_{r1}s_{23}$ ,  $y_{27} = (2\ddot{q}_{r1} + 2\ddot{q}_{r2} + \ddot{q}_{r3})c_3 - (\dot{q}_3(\dot{q}_{r1} + \dot{q}_{r2}) + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)\dot{q}_{r3})s_3$ ,  $y_{36} = \ddot{q}_{r1}c_{23} + \dot{q}_1\dot{q}_{r1}s_{23}$ ,  $y_{37} = (\ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2})c_3 + (0.5(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2)\dot{q}_{r1} + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_{r2})s_3$  y  $y_{39} = \ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2}$ .

Finalmente, el Jacobiano analítico  $J \triangleq J(q)$  está dado por

$$J = \begin{bmatrix} -l_1s_1 - l_2s_{12} - l_3s_{123} & -l_2s_{12} - l_3s_{123} & -l_3s_{123} \\ l_1c_1 + l_2c_{12} + l_3c_{123} & l_2c_{12} + l_3c_{123} & l_3c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con  $c_1 = \cos(q_1)$ ,  $c_{12} = \cos(q_1 + q_2)$ ,  $c_{123} = \cos(q_1 + q_2 + q_3)$ ,  $s_1 = \sin(q_1)$ ,  $s_{12} = \sin(q_1 + q_2)$  y  $s_{123} = \sin(q_1 + q_2 + q_3)$ .