

## Diseño de Sistemas de Control con Restricciones por Realimentación de Salida Aplicado a un Sistema Hidráulico

Carlos A. Cappelletti<sup>a,b</sup>, Eduardo J. Adam<sup>b,\*</sup>

<sup>a</sup>Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Paraná, Almafuerie 1033, Paraná, Argentina.

<sup>b</sup>Universidad Nacional del Litoral, Facultad de Ingeniería Química, Santiago del Estero 2854, Santa Fe, Argentina

### Resumen

En este trabajo se presenta el diseño de controladores para realimentación de salida mediante el uso de LMI tratando de satisfacer criterios de desempeño  $H_2$ ,  $H_\infty$  y ubicación de polos. Basándose en el diseño anterior se muestra como obtener los parámetros de un controlador industrial PID. Los controladores aquí propuestos se aplican a un sistema hidráulico de laboratorio, donde se quiere controlar la altura del líquido en uno de los tanques, manipulando el caudal de entrada en el otro tanque. Mediante simulaciones numéricas se muestra el desempeño de la variable controlada y manipulada cuando se implementa un controlador óptimo lineal y un PID industrial sintonizado en base al anterior. Asimismo, se incluyen ensayos experimentales con el sistema de tanques que compara el desempeño obtenido por el sistema de control cuando se implementa el controlador PID propuesto con el que se obtiene con otros PIDs ajustados mediante técnicas de sintonización tradicionales.

### Palabras Clave:

Control de Procesos, Control PID, LMI, Control Multiobjetivo.

### 1. Introducción

A partir de la década del 90, las ventajas del uso de variables de estado para la descripción de sistemas LTI, se hicieron mucho más notorias cuando se advirtió que un conjunto de especificaciones encontraban un marco común de formulación llamado Desigualdades Matriciales Lineales (LMI).

La principal ventaja de las LMI radica en que éstas definen regiones convexas, es decir, el conjunto de especificaciones de diseño del problema original es transformado en una intersección de regiones convexas. De este modo, planteadas las especificaciones de diseño como restricciones con formato LMI, la solución de encontrar un controlador que las satisfaga se resume a resolver un problema de optimización convexo, para lo cual hay algoritmos de búsqueda especializados, como son los métodos de punto interior.

Otra ventaja, es que al resolver el problema de optimización convexo, se tiene la certeza de que si existe una solución, ésta es única. Si no existe solución el problema es infactible, y en este caso deberán relajarse las restricciones (objetivos o especificaciones del problema original) hasta lograr factibilidad.

Sin embargo, estas herramientas teóricas a pesar de ser muy poderosas, son muy pocas utilizadas en las aplicaciones industriales. La razón de esto se debe a que en la mayoría de los casos, los controladores calculados son de orden elevado, difíciles de implementar y con un costo computacional que puede resultar importante para su implementación en línea.

En contraste con esto, el controlador PID resulta sumamente sencillo de manipular o de sintonizar por los técnicos de control con escasa experiencia en el tema, prolongando su vigencia en la industria a pesar de otras estrategias de control más sofisticadas.

Por lo anteriormente expuesto, la comunidad científica ha comenzado a utilizar herramientas teóricas y computacionales poderosas para sintonizar controladores PID. Por ejemplo, incorporando problemas de optimización que en algunos casos resultan ser no-lineal, no-convexo y con restricciones y haciendo uso de algoritmos evolutivos para solucionar estos complejos problemas (Reynoso-Mesa et al., 2013) o bien, utilizando algoritmos de muestreo y control basado en eventos (Ruiz et al., 2013), entre tantas otras propuestas.

Por lo anteriormente expuesto, uno de los objetivos de este trabajo busca sintonizar controladores PID industriales mediante herramientas teóricas más sofisticadas, como son las LMI, que permitan lograr un desempeño satisfactorio del sistema de control sin llegar a ser óptimo, pero muy superior a la que se

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [ccappelletti@unt.edu.ar](mailto:ccappelletti@unt.edu.ar) (Carlos A. Cappelletti), [eadam@fiq.unl.edu.ar](mailto:eadam@fiq.unl.edu.ar) (Eduardo J. Adam)

URL: [www.fiq.unl.edu.ar/control](http://www.fiq.unl.edu.ar/control) (Eduardo J. Adam)

obtiene mediante una sintonización con métodos clásicos como los de Ziegler and Nichols (1942), Cohen and Coon (1953) y Dahlin (1968), o mediante la parametrización IMC Morari and Zafriou (1989), que no contemplan restricciones en las variables y ubicación de polos al momento del diseño.

Este trabajo se organiza como se detalla a continuación. En la Sección 2 se discuten conceptos básicos conocidos para el diseño de controladores que satisfagan restricciones escritas con el formato de las LMI. Luego, en la Sección 3 se extienden los conceptos de la sección anterior a un sistema de control libre de offset. En la Sección 4, se describe el modelo del sistema experimental de laboratorio a controlar mediante una representación linealizada en espacio de estados, mientras que en la Sección 5 se diseña un controlador para realimentación de salida basándose en las LMI y un controlador PID asociado al diseño anterior. Asimismo, se presentan simulaciones numéricas y ensayos experimentales comparativos. Finalmente, en la Sección 6 se presentan las conclusiones.

## 2. Diseño por realimentación de salida

En variable de estado es común estimar los estados no medibles, y diseñar una ley de control por realimentación de estados utilizando los estados estimados (LQG).

Sin embargo, en este capítulo se diseñarán controladores que satisfacen criterios de desempeño  $H_2$ ,  $H_\infty$  y ubicación de polos que usan solamente las salidas medibles o estados disponibles del sistema, sin necesidad de estimar los estados no medibles. Es importante aclarar que el diseño se hará sólo para sistemas sin incertidumbre, designados también como sistemas ciertos.

### 2.1. Planteo del problema

Considérese el siguiente sistema LTI

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 d(t) + B_2 u(t), \\ y(t) &= C_y x(t) + D_y n(t), \\ z_\infty(t) &= C_1 x(t) + D_{12} u(t), \\ z_2(t) &= C_2 x(t) + D_{22} u(t),\end{aligned}\quad (1)$$

Aquí,  $y(t)$  es la salida medible,  $d(t)$  una perturbación desconocida y  $n(t)$  representa el ruido de medición.  $z_\infty(t)$  y  $z_2(t)$  son salidas auxiliares utilizadas para definir los requisitos  $H_\infty$  y  $H_2$  respectivamente, del sistema realimentado.

Si se considera un controlador escrito bajo una representación de estados, entonces la dinámica de su salida (aquí considerada igual a la manipulada, si el elemento de control final no tiene dinámica)

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(t) &= A_c \sigma(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c \sigma(t) + D_c y(t).\end{aligned}\quad (2)$$

donde  $\sigma$  representa los estados del controlador.

La Fig. 1 muestra el diagrama de bloques del sistema de control basado en las Ecs. (1) y (2), mientras que la Fig. 2 muestra un diagrama de bloques resumido.

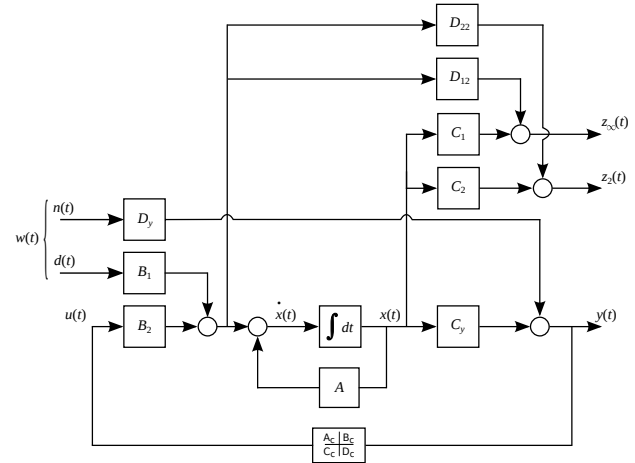


Figura 1: Diagrama de bloques del sistema de control basado en las Ecs. (1) y (2).

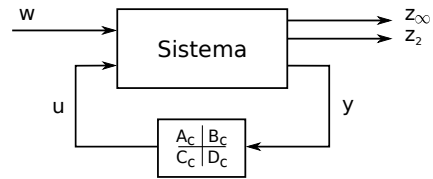


Figura 2: Diagrama de bloques resumido basado en la Fig. 2.

Reemplazando la salida medible expresada en (1) en la Ec.(2), se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(t) &= A_c \sigma(t) + B_c (C_y x(t) + D_y n(t)), \\ u(t) &= C_c \sigma(t) + D_c (C_y x(t) + D_y n(t)).\end{aligned}\quad (3)$$

Reemplazando la acción de control de las Ecs.(3) en el sistema (1), combinando a este sistema con la ecuación de estado del sistema de control y definiendo

$$w(t) \triangleq \begin{pmatrix} d(t) \\ n(t) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

al vector de perturbaciones, se obtiene las ecuaciones de estados y salidas del sistema realimentado como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\sigma}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A + B_2 D_c C_y & B_2 C_c \\ B_c C_y & A_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \sigma(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & B_2 D_c D_y \\ 0 & B_c D_y \end{pmatrix} w(t) \\ \begin{pmatrix} z_\infty(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_1 + D_{12} D_c C_y & D_{12} C_c \\ C_2 + D_{22} D_c C_y & D_{22} C_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \sigma(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & D_{12} D_c D_y \\ 0 & D_{22} D_c D_y \end{pmatrix} w(t).\end{aligned}\quad (5)$$

Es decir, el sistema realimentado, que es una combinación de los sistemas (1) y (2), tiene la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_a(t) &= A_a x_a(t) + B_{1a} w(t), \\ z_a(t) &= C_a x_a(t) + D_a w(t).\end{aligned}\quad (6)$$

donde con el subíndice  $a$  se expresa los vectores y las matrices ampliadas definidas en la Ec. (5).

## 2.2. Restricciones para la Estabilidad Asintótica de $A_a$ Vía LMI

Haciendo uso de las Ecs.(6) y utilizando el teorema de Lyapunov, de acuerdo con los textos clásicos (Ogata, 1997, entre otros), se puede garantizar que el sistema (1) es estabilizado por el controlador dinámico (2) si se satisfacen simultáneamente las siguientes desigualdades matriciales:

$$\begin{aligned} A_a'P + PA_a &< 0, \\ P &> 0. \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $P$  es la matriz de Lyapunov.

Téngase en cuenta que a diferencia con realimentación de estado, en donde sólo se tiene dos matrices incógnitas  $K$  y  $P$ , cuando se usa realimentación de salida se tiene cinco matrices incógnitas, las cuatro del controlador dinámico y  $P$ .

El problema que se presenta, es que estas cinco matrices que son las incógnitas a determinar, no aparecen en forma afín cuando se reemplaza  $A_a$  en la Ec.(7), por lo tanto, para poder determinar las cuatro matrices del controlador ( $A_c$ ,  $B_c$ ,  $C_c$  y  $D_c$ ) vía LMI, es necesario realizar un tratamiento algebraico adicional que se puede consultar en Colmenares and Tadeo (2005); Scherer et al. (1997), entre otros, donde se define

$$P \triangleq \begin{pmatrix} X & U' \\ U & Y \end{pmatrix} \quad (8)$$

y

$$P^{-1} \triangleq \begin{pmatrix} Y & V \\ V' & X \end{pmatrix} \quad (9)$$

siendo  $X$  e  $Y$  definidas positivas y las matrices  $U$  y  $V$  regulares; concluyendo con el teorema que se enuncia a continuación.

**Teorema 1.** *El sistema descrito por las Ecs.(1), puede ser estabilizado por un controlador dinámico descrito por las Ecs.(2), si y sólo si, existen un par de matrices simétricas y positivas definidas ( $X, Y$ ), y un par de matrices regulares ( $U, V$ ) que son soluciones de las siguientes desigualdades matriciales:*

$$\begin{pmatrix} X_A + \hat{B}C_y + X_A' + C_y'\hat{B}' & \Theta \\ \Theta' & Y_A + B_2\hat{C} + Y_A' + \hat{C}'B_2' \end{pmatrix} < 0, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} > 0,$$

donde  $\hat{C} = C_c V'$ ,  $\hat{B} = U' B_c$ ,  $\hat{A} = U' A_c V'$ ,  $A_a(1, 1) = A + B_2 D_c C_y$ ,  $Z = A_a(1, 1)' + X A_a(1, 1) Y + X B_2 \hat{C} + \hat{B} C_y Y$ ,  $X_A = X A_a(1, 1)$ ,  $Y_A = A_a(1, 1) Y$  y  $\Theta = Z + \hat{A}$ .

**Demostración** Los principales pasos para la demostración de la Ec. (10) se pueden consultar en trabajo de Colmenares and Tadeo (2005). □

Obsérvese que las desigualdades (10) son afines respecto a las variables matriciales  $X, Y, X_A, Y_A, \hat{C}, \hat{B}$  y  $\Theta$ , es decir, dichas desigualdades son LMIs, y como tal, definen una región convexa si es que existe.

Si la solución es factible, una vez obtenidas estas siete variables, se pueden calcular las matrices del controlador mediante el siguiente procedimiento:

**Paso 1.** Elegir cualquier matriz  $V$  regular, de dimensiones adecuadas<sup>1</sup>.

**Paso 2.** Obtener  $U = (I - YX)V^{-1}$ .

**Paso 3.** Obtener  $A_a(1, 1) = X_A X^{-1}$ .

**Paso 4.** Obtener  $Z = A_a(1, 1)' + X A_a(1, 1) Y + X B_2 \hat{C} + \hat{B} C_y Y$ .

**Paso 5.** Obtener  $\hat{A} = \Theta - Z$ , y luego  $A_c = (U')^{-1} \hat{A} (V')^{-1}$ .

**Paso 6.** Obtener  $B_c = (U')^{-1} \hat{B}$ , y  $C_c = \hat{C} (V')^{-1}$ .

**Paso 7.** Obtener<sup>2</sup>  $D_c = B_2^* (A_a(1, 1) - A) C_y^*$ .

Para este procedimiento se usó función `hinfmix` de Matlab Gahinet et al. (1995).

## 2.3. Restricciones para Control Óptimo Vía LMI. Minimización de la Norma $H_2$ .

Establecida la condición de estabilidad que debe ser satisfecha, se pretende además que el controlador minimice la energía de los estados del sistema  $x(t)$ , y la energía de la señal de control  $u(t)$ , de manera de garantizar un buen rechazo al ruido del proceso y ruido de medición. En otras palabras, se pretende minimizar

$$\|z_2\|_2^2 = \int_0^\infty z_2^T z_2 dt = \int_{-\infty}^\infty \|T_{zw}\|^2 \|w\|^2 d\omega \quad (11)$$

donde la función de transferencia de  $w$  a  $z_2$  de la Ec. (5) está dada por

$$T_{zw}(s) = C_{2a} (sI - A_a)^{-1} B_{1a} \quad (12)$$

siendo  $z_2(j\omega) = T_{zw}(j\omega)w(j\omega)$  y de acuerdo con la Ec. (5),

$$C_{2a} = \begin{pmatrix} C_2 + D_{22}D_c C_y & D_{22}C_c \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Donde además, el funcional de la Ec. (11) es coincidente con el funcional

$$\|z_2\|_2^2 = J(x, u) = \int_0^\infty (x^T R_x x + u^T R_u u) dt \quad (14)$$

para cuando  $w$  es una señal de entrada de espectro plano y  $C_2$  y  $D_{22}$  son ortogonales entre si.

**Remarca 1.** Si  $C_2 \perp D_{22}$  luego el funcional para control  $H_2$  es coincidente con el funcional definido en control óptimo  $J = \int (x^T Q x + u^T R u) dt$ .<sup>3</sup>

**Demostración** Siendo  $\|z_2\|_2^2 = \int_0^\infty z_2^T z_2 dt$  donde  $z_2 = C_2 x + D_{22} u$  luego,

$$z_2^T z_2 = x^T C_2^T C_2 x + u^T D_{22}^T D_{22} u + x^T C_2^T D_{22} u + u^T D_{22}^T C_2 x$$

Si  $C_2 \perp D_{22}$  y definiendo  $R_x = C_2^T C_2$  y  $D_{22}^T D_{22}$  se prueba la Ec. (14).<sup>4</sup> □

Mediante desigualdades Lineales Matriciales, el problema minimización puede plantearse de dos formas:

<sup>1</sup>El controlador no está parametrizado por  $V$  por tanto, la elección de  $V$  no influye en el computo de la función de transferencia del controlador (Colmenares and Tadeo (2005)).

<sup>2</sup>El asterisco significa pseudo inversa.

<sup>3</sup>Donde  $\perp$  indica que las matrices  $C_2$  y  $D_{22}$  son ortogonales.

<sup>4</sup>Para más detalles ver Cappelletti and Adam (2012).

- Utilizando el gramiano de controlabilidad ( $L_{Ca}$ ) del sistema realimentado, y definiendo las matrices  $P > L_{Ca}$  y  $N = N' > 0$ , la cota para la función de transferencia y la restricción que deben ser satisfechas son

$$\begin{aligned} \text{Cota: } \|T_{zw}\|_2^2 &< \text{traza}(C_{2a}PC'_{2a}) < \text{traza}(N) = \mu^2, \\ \text{Restricción: } A_aP + PA'_a + B_{1a}B'_{1a} &< 0. \end{aligned} \quad (15)$$

- Utilizando el gramiano de observabilidad ( $L_{Oa}$ ) del sistema realimentado, y definiendo la matrices  $P > L_{Oa}$  y  $N = N' > 0$ , la cota para la función de transferencia y la restricción que deben ser satisfechas son

$$\begin{aligned} \text{Cota: } \|T_{zw}\|_2^2 &< \text{traza}(B'_{1a}PB_{1a}) < \text{traza}(N) = \mu^2, \\ \text{Restricción: } A'_aP + PA'_a + C'_{2a}C_{2a} &< 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Mediante la desigualdad de Schur, las LMIs para (15) pueden escribirse como

$$\begin{pmatrix} N & C_{2a}P \\ PC'_{2a} & P \end{pmatrix} > 0, \quad \begin{pmatrix} A_aP + PA'_a & B_{1a} \\ B'_{1a} & -I \end{pmatrix} < 0, \quad (17)$$

la primera LMI se corresponde con la cota pretendida, mientras que la segunda garantiza la estabilidad del sistema realimentado.

Haciendo lo propio con (16), se obtiene

$$\begin{pmatrix} P & PB_{1a} \\ B'_{1a}P & N \end{pmatrix} > 0, \quad \begin{pmatrix} A'_aP + PA'_a & C'_{2a} \\ C_{2a} & -I \end{pmatrix} < 0. \quad (18)$$

Utilizando las desigualdades (16), y realizando un tratamiento algebraico similar al de la subsección anterior, se arriba a,

$$\begin{pmatrix} X & I & X_{B1a} + \hat{B}D_y \\ * & Y & B_2D_cD_y + B_1 \\ * & * & N \end{pmatrix} > 0, \quad \begin{pmatrix} X_A + \hat{B}C_y + X'_A + C'_y\hat{B}' & \Theta & C'_2 + C'_yD'_cD'_{22} \\ * & Y_A + B_2\hat{C} + Y'_A + \hat{C}'B'_2 & Y_{C2a} + \hat{C}'D'_{22} \\ * & * & -I \end{pmatrix} < 0. \quad (19)$$

donde con \* se indica la parte simétrica de la matriz.

Obsérvese que la restricción de estabilidad establecidas por las LMIs (10), está incorporada mediante el complemento de Schur, en las dos primeras filas y columnas de las LMIs (19).

#### 2.4. Restricciones para el Control $H_\infty$ Vía LMI.

Cuando la perturbación no es de espectro plano como sí lo son las señales impulsivas o el ruido gaussiano, la manera de limitar su efecto, es acotar la norma  $H_\infty$  de la función (o matriz) de transferencia que relaciona la perturbación con la salida.

El siguiente teorema (Zhou and Khargonekar, 1988) transforma las especificaciones mencionadas en un problema de factibilidad, mediante el uso de LMI.

#### Teorema 2. Sea

$$T_{zw}(s) = C_{1a}(sI - A_a)^{-1}B_{1a} + D_{1a}, \quad (20)$$

$A_a$  es estable y  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ , si y solo si existe  $P > 0$ , tal que verifique

$$\begin{pmatrix} A'_aP + PA_a & PB_{1a} & C'_{1a} \\ B'_{1a}P & -\gamma I & D'_{1a} \\ C_{1a} & D_{1a} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0. \quad (21)$$

**Demostración** Ver Zhou and Khargonekar (1988).  $\square$

Luego, si se verifica la restricción anterior para el cálculo del controlador, se asegura que el sistema realimentado "γ-atenua" la energía de la perturbación en su salida, esto es,  $\|z\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2$ .

Operando algebraicamente como se hizo anteriormente se obtiene la siguiente LMI,

$$\begin{pmatrix} X_A + \hat{B}C_y + X'_A + C'_y\hat{B}' & \Theta & XB_{1a}(1,1) + U'B_cD_y & C'_1 + C'_yD'_cD'_{12} \\ * & Y_A + B_2\hat{C} + Y'_A + \hat{C}'B'_2 & B_2D_cD_y + B_1 & Y'_{C1a}(1,1) + V'C'_cD'_{12} \\ * & * & -\gamma I & D'_yD'_cD'_{12} \\ * & * & * & -\gamma I \end{pmatrix} < 0. \quad (22)$$

#### 2.5. Restricciones para la Ubicación de Polos o Autovalores de $A_a$ Vía LMI.

La ubicación de los polos del sistema realimentado también puede ser formulada mediante LMIs, según se expresa en el teorema (Chilali. and Gahinet, 1996b) que se presenta a continuación.

**Teorema 3.** Una matriz  $A_a$  es D-estable, es decir tiene todos sus autovalores en el interior de una región D, definida como

$$D \triangleq \{s \in \mathbb{C} : L + sM + s^*M' < 0\}, \quad (23)$$

si y sólo si, existe una matriz P simétrica y positiva definida, tal que la matriz

$$M_D(A_a, P) = L \otimes P + M \otimes (PA_a) + M' \otimes (PA_a)' < 0 \quad (24)$$

donde  $\otimes$  indica el producto de Kronecker.

Así por ejemplo, la condición de que los autovalores de  $A_a$  tengan su parte real menor que  $\alpha$ , puede expresarse como su pertenencia al conjunto D del siguiente modo

$$D = \{\lambda_{A_a} \in \mathbb{C} : \lambda_{A_a} + \lambda_{A_a}^* < 2\alpha\}, \quad (25)$$

siendo  $L = 2\alpha$  y  $M = 1$ , tal condición se satisface, si y solo si, existe  $P > 0$ , tal que satisfaga la siguiente LMI,

$$M_D(A_a, P) = (PA_a) + (PA_a)' + 2\alpha P < 0. \quad (26)$$

Obsérvese que la última ecuación se puede componer a partir de la Ec. 10.

Esta restricción se utilizará para gobernar la velocidad de respuesta del sistema realimentado.

Hasta aquí se han planteado las restricciones, vía LMI, que deben satisfacerse para lograr un regulador dinámico por realimentación de salida, que cumpla con los requisitos de estabilidad, desempeño  $H_2$ ,  $H_\infty$  y ubicación de polos.

En la siguiente sección se extienden estos conceptos al problema de seguimiento, en donde el problema de control se transforma en uno de regulación, al modificar la planta con el agregado de un integrador.

### 3. Diseño Libre de Offset vía LMI

Resulta de suma importancia en el control de procesos (Ogata, 1997; Adam, 2014, entre otros) la performance en estado estacionario, es decir su capacidad de absorber perturbaciones sin alejarse del punto de operación deseado o bien, lograr alcanzar sin error el estado estacionario de nuevos puntos de operación (Muske and Badgwell, 2002; Mäder and Morari, 2007; González et al., 2008). También en la literatura de sistemas de control (Ogata, 1997, entre otros) aparecen alternativas que combinan el diseño óptimo por realimentación de estados y la eliminación de offset.

La Fig.(3) muestra la realimentación de estados propuesta para un sistema lineal tipo cero con la ley de control óptimo, de acuerdo con Ogata (1997). Note que se ha incluido un integrador con el objeto de eliminar offset.

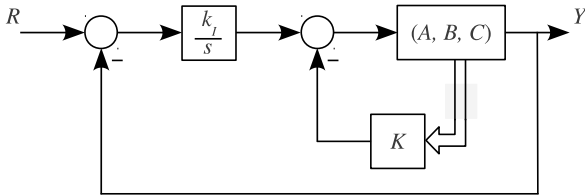


Figura 3: Realimentación de estados que incluye un modo integral.

De manera similar en el diseño por realimentación de salida, al incluir el integrador en la trayectoria directa del lazo de control, se diseña vía LMI, un controlador para gobernar al sistema  $\tilde{G}(s) = \frac{G(s)}{s}$  (Fig. 4).

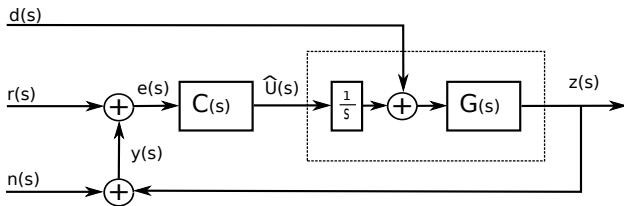


Figura 4: Realimentación de salida que incluye un modo integral.

Una vez calculado dicho controlador, éste minimizará la norma  $H_2$  sujeto a restricciones en  $H_\infty$  y regiones escritas vía LMI. El mismo dispondrá de un modo integral para eliminar offset.

Para este objetivo, el primer paso consiste en representar a  $\tilde{G}(s)$  en variable de estado, que según la Fig.(4), el sistema con

integrador queda representado como:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 d(t) + B_2 u(t), \\ \dot{u}(t) &= \hat{u}(t),\end{aligned}\quad (27)$$

y en forma matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} d(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{u}(t).\quad (28)$$

De esta manera, el sistema con integrador (tipo uno) resulta

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_{1i} d(t) + B_{2i} \hat{u}(t).\quad (29)$$

siendo

$$\begin{aligned}x_i(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} A & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B_{1i} &= \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{2i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (30)$$

Con respecto al controlador, ahora se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(t) &= A_c \sigma(t) + B_c e(t) \\ \hat{u}(t) &= C_c \sigma(t) + D_c e(t),\end{aligned}\quad (31)$$

siendo

$$e(t) = r(t) - y(t), \quad y(t) = C_{yi} x_i(t) + D_y n(t).\quad (32)$$

Combinando las Ecs. (29), (31), y (32), el sistema realimentado resulta

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i(t) \\ \dot{\sigma}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i - B_{2i} D_c C_{yi} & B_{2i} C_c \\ -B_c C_{yi} & A_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i(t) \\ \sigma(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1i} & -B_{2i} D_c D_y & B_{2i} D_c \\ 0 & -B_c D_y & B_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(t) \\ n(t) \\ r(t) \end{pmatrix}.\quad (33)$$

Las salidas auxiliares para los requerimientos de desempeño resultan

$$\begin{aligned}z_{\infty}(t) &= C_{1i} x_i(t) + D_{12i} \hat{u}(t), \\ z_2(t) &= C_{2i} x_i(t) + D_{22i} \hat{u}(t),\end{aligned}\quad (34)$$

y por tanto se obtiene

$$\begin{pmatrix} z_{\infty}(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1i} - D_{12} D_c C_{yi} & D_{12} C_c \\ C_{2i} + D_{22} D_c C_{yi} & D_{22} C_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i(t) \\ \sigma(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -D_{12i} D_c D_y & D_{12i} D_c \\ 0 & -D_{22i} D_c D_y & D_{22i} D_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(t) \\ n(t) \\ r(t) \end{pmatrix},\quad (35)$$

definiendo al vector de perturbaciones, que ahora tiene incorporado el set-point, como  $w = [d \ n \ r]^T$  y las variables  $x_{ai} = [x_i \ \sigma]^T$  y  $z_{ai} = [z_{\infty} \ z_2]$ , el sistema realimentado con el integrador incorporado al que se le aplican las restricciones LMI, resulta

$$\begin{aligned}\dot{x}_{ai}(t) &= A_{ai} x_{ai}(t) + B_{1ai} w(t), \\ z_{ai}(t) &= C_{ai} x_{ai}(t) + D_{ai} w(t).\end{aligned}\quad (36)$$



#### 4. Caso de Estudio. Sistema Hidráulico de Tanques en Cascada

En esta sección se presenta el diseño de un control de nivel de un sistema hidráulico, por realimentación de salida. Para este sistema, se pretende que no tenga offset ante cambios en consigna del tipo escalón. Adicionalmente, se desea que el sistema se vea poco afectado por perturbaciones externas que ingresan en los caudales de entrada junto a la acción de control, ya que puede existir cambios de presión en la red de suministro de agua debido, por ejemplo, a variaciones en la demanda.

Como se dijo en la introducción, todas estas especificaciones de diseño encuentran en las LMI un marco común de formulación. A tal efecto, la ley de control surge de considerar tres LMIs las que tienen en cuenta una condición de estabilidad asintótica, una minimización de normas y la ubicación de polos en regiones preestablecidas.

Considérese el sistema hidráulico experimental de laboratorio de dos tanques con interacción representado en la Fig.(5), donde sus características físicas y operativas se informan en la Tabla (1).

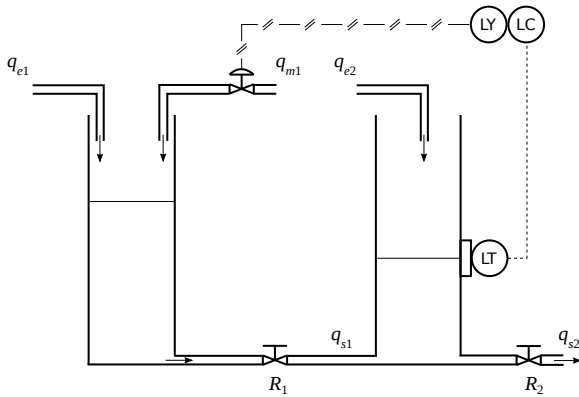


Figura 5: Sistema de tanques experimental de laboratorio que interactúan entre sí.

Tabla 1: Dimensiones físicas del sistema hidráulico de tanques.

Dimensiones	
Díámetros	$d_1 = d_2 = 0.04\text{m}$
Rango de caudales	$0\text{--}3.3\text{l/min}$
Alturas máximas	$h_{1\text{max}} = h_{2\text{max}} = 0.60\text{m}$
Resist. Hidráulicas	$R_1 = 90000\text{ms/m}^3$ $R_2 = 144000\text{ms/m}^3$

Antes de presentar el modelo matemático no lineal y lineal del sistema de tanques con interacción de la Fig.(5), resulta importante remarcar la siguiente hipótesis de modelo relacionada con la interacción entre los tanques:

**Hipótesis de Modelo.** Cuando el caudal del líquido se dirige del tanque 1 al 2 (esto es  $h_1 \geq h_2$ ) dicho caudal es función de la diferencia de presión entre ellos y es aceptablemente modelado mediante la expresión,  $q_{s1} = C_{v1} \sqrt{h_1 - h_2}$ . Si hay una inversión

de flujo (esto es,  $h_1 < h_2$ ) dicho caudal se modela como,  $q_{e3} = C_{v1} \sqrt{h_2 - h_1}$ .

Las ecuaciones de balance que definen un modelo matemático no lineal en variables de desviación se resume a,

$$A_1 \frac{d\bar{h}_1}{dt} = -(C_{v1} \sqrt{h_1 - h_2} - q_{s1}^0) + \bar{q}_{e1} + \bar{q}_{m1}, \quad (37)$$

$$A_2 \frac{d\bar{h}_2}{dt} = (C_{v1} \sqrt{h_1 - h_2} - q_{s1}^0) - (C_{v2} \sqrt{h_2 - h_2} - q_{s2}^0) + \bar{q}_{e2},$$

con condiciones iniciales  $h_1(t=0) = h_1^0$ , y  $h_2(t=0) = h_2^0$  o bien,  $\bar{h}_1 = 0$  y  $\bar{h}_2 = 0$ , y donde aquella variable indicada como  $\bullet$  representa a la variable escrita como desviación del estado estacionario inicial.

Linealizando por serie de Taylor y reordenando las ecuaciones se obtiene el modelo matemático lineal en el dominio del tiempo, resultando éste

$$A_1 \frac{d\bar{h}_1}{dt} = -\frac{1}{R_1} \bar{h}_1 + \frac{1}{R_1} \bar{h}_2 + \bar{q}_{e1} + \bar{q}_{m1}, \quad (38)$$

$$A_2 \frac{d\bar{h}_2}{dt} = \frac{1}{R_1} \bar{h}_1 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \bar{h}_2 + \bar{q}_{e2},$$

donde  $R_1$  y  $R_2$  son las resistencias hidráulicas de las válvulas manuales indicadas en la Fig.(1) y cuyos valores experimentales se resumen en la Tabla (1).

Nótese que las Ecs.(38) se pueden llevar a la forma de representación de estados,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 d(t) + B_2 u(t), \\ z(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (39)$$

donde se define  $x \triangleq [x_1 x_2]'$ ,  $x_1(t) \triangleq \bar{h}_1(t)$ ,  $x_2(t) \triangleq \bar{h}_2(t)$  e  $y(t) \triangleq x_2(t)$ , y por tanto se tiene que,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/R_1 A_1 & 1/R_1 A_1 \\ 1/R_1 A_2 & -(1/A_2)(1/R_1 + 1/R_2) \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/A_1 & 0 \\ 0 & 1/A_2 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/A_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [c_1 \ c_2] = [0 \ 1].$$

Aquí  $u(t)$  es la variable manipulada ( $q_{m1}$ ) y  $d(t) \triangleq [q_{e1} \ q_{e2}]^T$  las perturbaciones de entrada.

Si bien los estados  $x_1$  y  $x_2$  son medibles ya que representan los niveles de líquido en los tanques, para los objetivos pretendidos en este trabajo, sólo se realimentará el nivel de salida  $x_2$ .

#### 5. Síntesis del Controlador Vía LMI para el Sistema de Tanques

Con el integrador incorporado, el sistema representado en las Ecs.(1) queda expresado como

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_{1i} d(t) + B_{2i} \hat{u}(t), \\ y(t) &= C_{yi} x_i(t) + D_y n(t), \\ z_{\infty}(t) &= C_{1i} x_i(t) + D_{12i} \hat{u}(t), \\ z_{22}(t) &= C_{2i} x_i(t) + D_{22i} \hat{u}(t). \end{aligned} \quad (41)$$

El modelo del sistema en variables de estados a controlar utilizando los valores de la Tabla (1), resulta

$$\dot{x}_i(t) = \begin{pmatrix} -0,084 & 0,084 & 0,0133 \\ 0,084 & -0,1437 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_i(t) + \begin{pmatrix} 0,0133 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{u}(t). \quad (42)$$

con  $d(t) = q_{e1}(t)$ .

Mientras que la salida medible, y las salidas auxiliares sobre las que rigen las especificaciones  $H_2$  y  $H_\infty$ , resultan

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x_i(t) + n(t),$$

$$z_\infty(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x_i(t) = z(t),$$

$$z_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} x_i(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{u}(t). \quad (43)$$

El funcional a minimizar en este caso resulta,

$$J = \int_0^\infty \left[ \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ u \end{pmatrix} + \hat{u}^2 \right] dt \quad (44)$$

Note que, en la última ecuación la variable  $q$  es un peso que actúa sobre  $u$  por tanto,

- si  $q = 0$  se minimiza las energías de los estados  $x$  del sistema (sin integrador) y de la acción de control  $\hat{u}$  en el funcional (11), mientras que,
- si  $q = 1$  minimiza las energías de los estados ampliados  $x_i$  del sistema que incluye el integrador que representa  $u = \int \hat{u} dt$ , y de la acción de control  $\hat{u}$ .
- Si  $0 < q < 1$  se minimiza las energías de los estados ampliados  $x_i$  del sistema desenfatiando  $u = \int \hat{u} dt$  ya que al mismo tiempo se pide minimizar la acción de control  $\hat{u}$ .

### 5.1. Especificaciones para el Controlador

Como se ha dicho, se desea que el sistema no tenga offset ante cambios de consigna tipo escalón, para lo cual se ha agregado el integrador.

También, se desea minimizar la norma  $H_2$  del sistema realimentado, cuya transferencia es  $T_{zr} = -T_{zn}$  (Fig. 4), para obtener el mejor rechazo ante perturbaciones de espectro plano, como lo son el ruido del proceso y el ruido de medición.

Además de garantizar la estabilidad del sistema realimentado, la optimización anterior debe satisfacer dos requerimientos adicionales simultáneos, a saber:

- Fijar un tiempo de establecimiento inferior a 350 segundos, para lo cual se ubican en los polos en una región tal que,  $\Re(s) < -0,012$ .

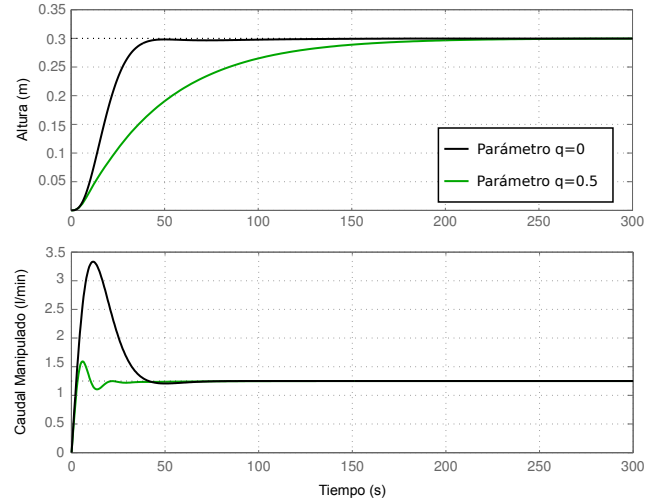


Figura 6: Respuesta al escalón y caudal manipulado.

- Rechazar perturbaciones en uno de los caudales de suministro, para ello se acota la norma  $H_\infty$  de la función de transferencia  $T_{zd}(s)$ . Imponiendo la restricción  $\|T_{zd}\|_\infty < 0,2$  lo que representa -14dB, con lo que se asegura que la energía de la perturbación presente en la salida, será menor al 4 % de su valor original.

### 5.2. Simulaciones Numéricas

Para satisfacer las especificaciones requeridas, según lo visto en la Sección 2, deben satisfacerse las LMIs (19), (22), (21) y (26) para el sistema con integrador. El software utilizado para obtener las cuatro matrices,  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $C_c$  y  $D_c$  del controlador, es el LMI toolbox de Matlab® Gahinet et al. (1995).

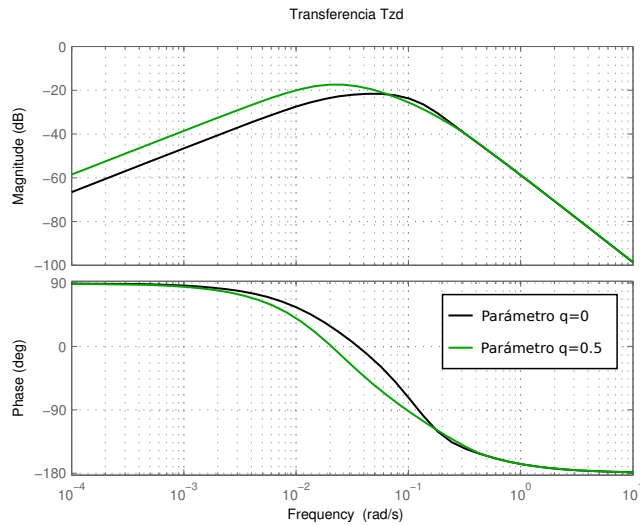
Con las restricciones previamente enunciadas se estudia el comportamiento dinámico del sistema realimentado sintetizando dos controladores adoptando  $q = 0$  y 0.5 en la Ec. (43). En la Fig.(6) se observan las respuestas de los sistemas realimentados ante una entrada escalón (con un salto de 0,3 metros) y los caudales manipulados, para los controladores propuestos.

La diferencia entre ambos sistemas de control propuestos radica en cómo fue seleccionada la salida  $z_2(t)$  cuya energía se desea minimizar.

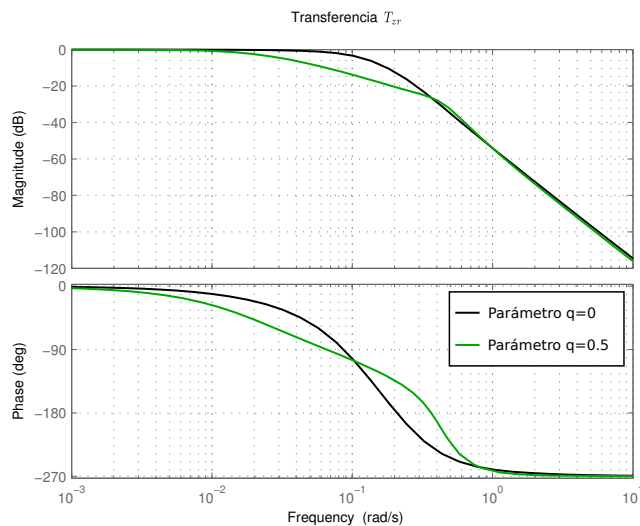
Se puede observar que si  $q = 0,5$  se obtiene una respuesta al escalón más lenta en comparación con  $q = 0$ . Note que, en el primer caso, se eligió  $z_2 = [x_1 \ x_2 \ \frac{u}{2} \ \hat{u}]'$  mientras que, en el segundo caso se eligió  $z_2 \triangleq [x_1 \ x_2 \ 0 \ \hat{u}]'$ . El hecho que  $z_2$  incluya a  $u$  y  $\hat{u}$  se penaliza mucho la acción de control lo que se puede visualizar en la Fig. 6.

En la Fig.(7), se representan las respuesta en frecuencia de la transferencias  $T_{zd}(s)$  de la Fig. 4 utilizando ambos controladores. De la comparación se observa, que el controlador más agresivo ( $q = 0$ ) produce un mejor rechazo a las perturbaciones en el caudal de suministro ya que  $\|T_{zd}\|_\infty^{q=0} < \|T_{zd}\|_\infty^{q=0,5}$  si bien ambos controladores cumplen con el requisito pedido.

En la Fig.(8), se representan las respuestas en frecuencia de la transferencias  $T_{zr}(s)$  de la Fig. 4 utilizando ambos controladores. De la comparación se observa, que el controlador más

Figura 7: Respuesta en frecuencia de la transferencia  $T_{zr}(s)$ .

agresivo tiene mayor ancho de banda, lo que produce mayor velocidad de respuesta, a costa de un mayor ruido de medición.

Figura 8: Respuesta en frecuencia de la transferencia  $T_{zr}(s)$ .

En base a lo expuesto, se optó por el controlador con  $q = 0$ , cuya función de transferencia resultó ser:

$$C_{LMI}(s) = \frac{1,582 s^3 + 8,956 \cdot 10^6 s^2 + 3,955 \cdot 10^6 s + 8,103 \cdot 10^4}{s^4 + 5,659 \cdot 10^6 s^3 + 1,99 \cdot 10^6 s^2 + 3,801 \cdot 10^5 s} \quad (45)$$

### 5.2.1. Síntesis de un Controlador PID

Como se comentó al principio el controlador (45) es no resulta sencillo de implementar, principalmente por la magnitud de sus coeficientes. Por lo tanto, se propuso sintetizar un controlador PID cuya respuesta en frecuencia aproxime a la del controlador (45) y para ello se utilizó la función magshape de Matlab®.

La comparación de la respuesta en frecuencia de ambos controladores se muestra en la Fig.(9), y la función de transferencia del controlador  $PID + Filtro$  resultó ser

$$C_{PID+F}(s) = \frac{1,629 s^2 + 1,106 s + 0,01152}{s^3 + 0,6786 s^2 + 0,08079 s} \quad (46)$$

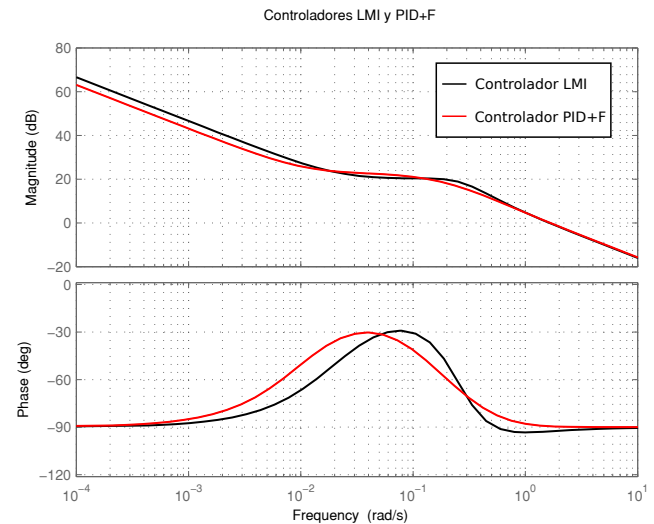


Figura 9: Bode de ambos controladores.

La Fig.(10), permite comparar el desempeño de la salida controlada del sistema ante una entrada escalón en la consigna, cuando se implementan los controladores (45) y (46). También, en dicha figura, puede observarse los caudales manipulados que se aplican al sistema en ambos casos.

En la Fig.(11), se muestra cómo responde la salida  $h_2(t)$  del sistema realimentado, cuando se aplican dos cambios en la consigna.

En la Fig.(12), se muestra cómo responde dicha salida, ante una perturbación en el caudal de suministro  $d(t)$  de acuerdo con la Fig. 4, que ingresa junto al caudal manipulado en los instantes  $t = 500$  y  $t = 600$ .

En la Fig.(13), se muestra cómo los efectos del ruido de medición  $n(t)$  son filtrados sobre la salida del sistema realimentado.

Finalmente, la Fig.(14), muestra cómo responde la salida  $h_2(t)$  del sistema, cuando están presente todas las entradas antes mencionadas  $r(t)$ ,  $d(t)$ , y  $n(t)$ . Mientras que en la Fig.(15) se muestra cómo evoluciona el caudal manipulado para este caso.

### 5.3. Resultados Experimentales

Con el objeto de comparar el desempeño del sistema de control con el controlador PID sintonizado por el método aquí propuesto, con el que se obtiene cuando se sintoniza el controlador PID mediante otros métodos existentes en la literatura clásica, se propone una serie de ensayos de laboratorio para tal fin. Dichos experimentos consisten en registrar las respuestas al escalón para diferentes cambios en consigna con el sistema experimental de control de nivel, mencionado en la Sección 4, utilizando controladores PIDs sintetizados mediante los métodos



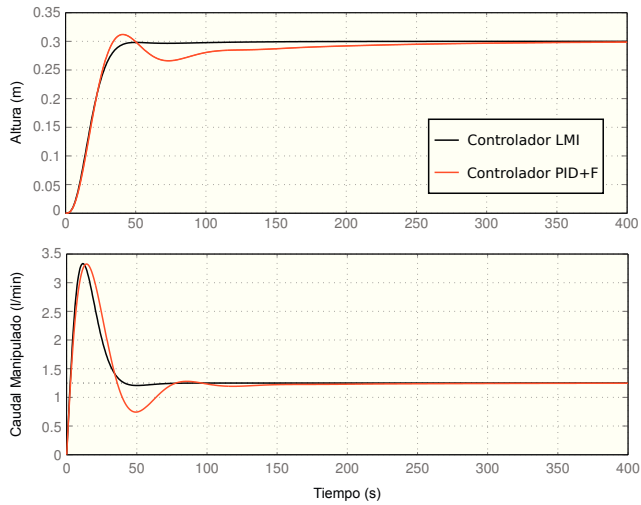


Figura 10: Comparación de desempeño de las alturas y caudal manipulado con controladores LMI vs. PID.

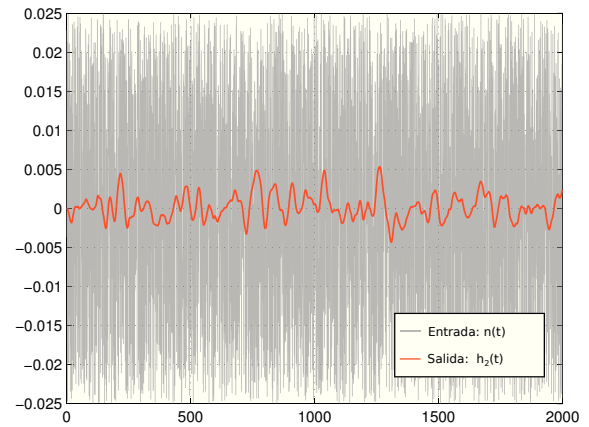


Figura 13: Filtrado de ruido por el sistema de control con el PID+F.

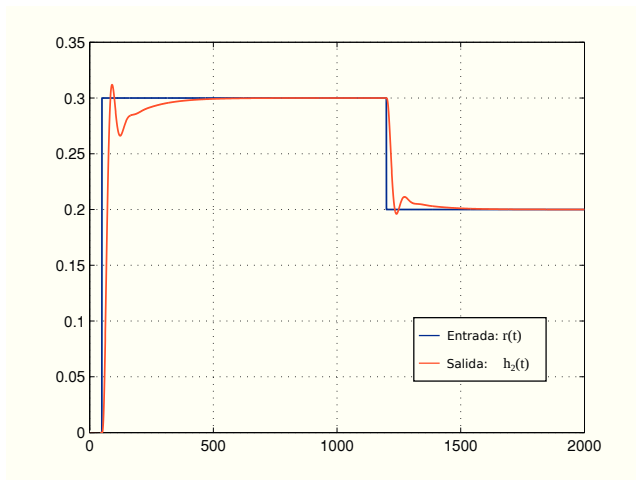


Figura 11: Respuesta a cambios de consigna escalón del sistema de control con el PID+F

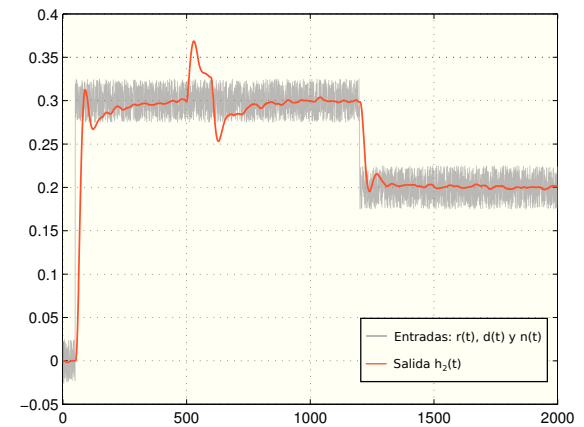


Figura 14: Respuesta del sistema a cambios simultáneos en  $r(t)$   $d(t)$  y  $u(t)$ .

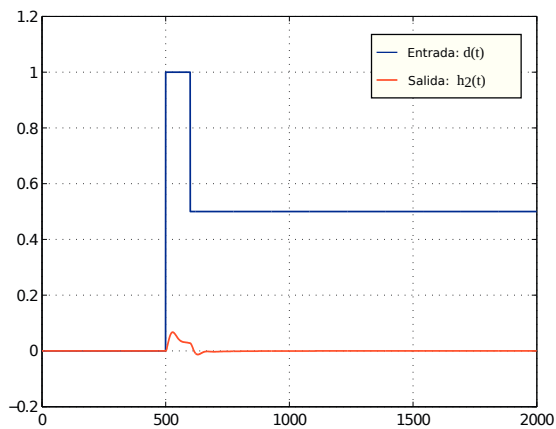


Figura 12: Respuesta a la perturbación en el caudal de suministro del sistema de control con el PID+F.

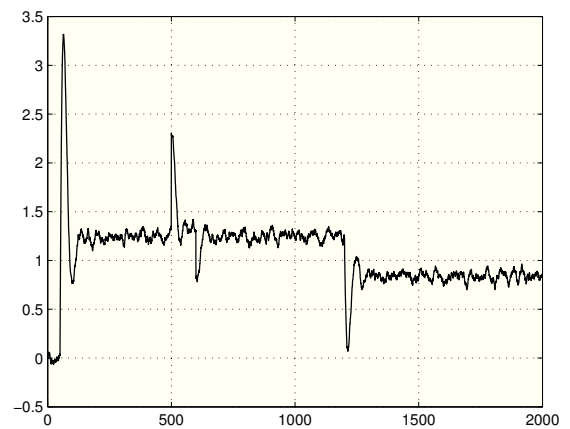


Figura 15: Caudal manipulado para los casos estudiados en la Fig. 14.

de Ziegler and Nichols (1942) basado en la curva de reacción (CR), de Dahlin (1968) conocido como método  $\lambda$ , de Skogestad (2003) conocido como método SIMC, basado en las reglas de parametrización de controladores PID por control con modelo interno (IMC) propuesta por Morari and Zafriou (1989), y el método aquí propuesto. Particularmente para los métodos  $\lambda$  y SIMC se siguieron recomendaciones de Åström and Hägglund (2009). Un resumen de los métodos aquí utilizados para la comparación pueden ser encontrados en los trabajos de Åström and Hägglund (2009) y Guzmán et al. (2014).

Es de destacar que todos los métodos escogidos utilizan la respuesta al escalón a lazo abierto para así disponer de un modelo que permita sintonizar los controladores PID. Mediante este ensayo se identificaron dos funciones de transferencia que fueron usadas para tal fin,

$$G_1(s) = \frac{1,2600 e^{-13,353s}}{(38,395s + 1)} \quad (47)$$

y

$$G_2(s) = \frac{1,254 e^{-1,9949s}}{(23,840s + 1)(23,856s + 1)} \quad (48)$$

con un salto escalón en caudal de 10 l/h.

La Tabla 2 muestra los parámetros de los controladores PID sintonizados por las técnicas anteriormente citadas.

Tabla 2: Parámetros de los Controladores PID.

Método	$K_r$	$T_I$	$T_D$
CR (Ziegler and Nichols, 1942)	2.7385	26.706	6.6765
$\lambda$ (Dahlin, 1968)	1.7859	45.072	5.6875
SIMC (Skogestad, 2003)	4.7649	15.959	23.856
Propuesta PID vía LMI	4.8408	14.419	7.9687

La Fig. 16 muestra el desempeño de los niveles de líquidos del primer ( $h_1$ ) y del segundo tanque (variable controlada,  $h_2$ ), la referencia y la presión neumática en la cabeza de la válvula de control para cuando se implementa el método de la CR propuesto por Ziegler and Nichols (1942). Note que todas las señales están expresadas en porcentaje. Particularmente, la presión neumática de la válvula de control entre 3 y 15psi con un comportamiento no lineal en diferentes regiones de trabajo y una leve histéresis. Esto último explica la diferencia de comportamiento del sistema en las distintas regiones de trabajo, como se observa en la Fig. 16 y siguientes.

Similarmente, las Figs 17, 18, 19 muestran el desempeño de las mismas variables cuando se implementan los métodos  $\lambda$ , SIMC y el aquí propuesto.

De acuerdo con las Figs. 16 y 17 puede verse que cuando se utiliza los controladores sintonizados por los métodos de la CR y  $\lambda$  se ve que tiene un alto tiempo de establecimiento pero al mismo tiempo el esfuerzo de la manipulada es menor, con un buen filtrado de los ruidos de medición. Esto se condice con lo informado en la Tabla 2 que muestra valores pequeños de  $K_r$ , grandes de  $T_I$  y pequeños de  $T_D$  en comparación con el método SIMC y el aquí propuesto. Por otro lado, de acuerdo con la Fig. 18 el controlador ajustado por método SIMC proporciona un

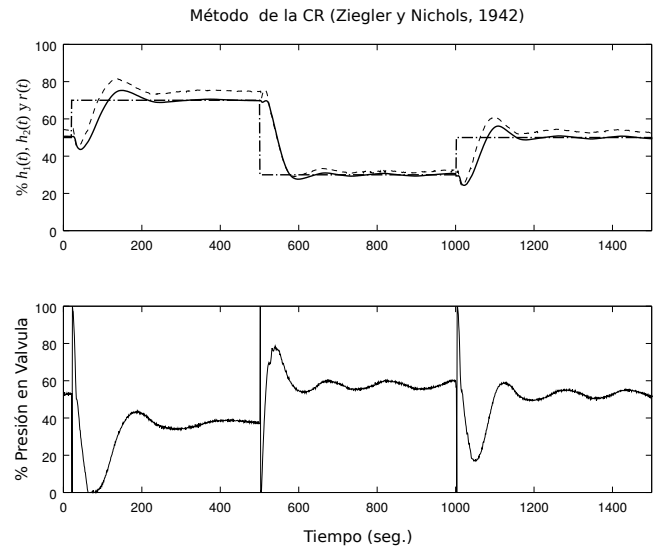


Figura 16: Desempeño de las variables  $h_1$  (línea de trazo) y  $h_2$  (línea continua), la referencia (línea de punto y raya) y presión en cabeza de válvula, expresadas en porcentaje. Los rangos de valores de las variables se corresponden con los informados en la Tabla 1.

menor tiempo de establecimiento que en los dos casos anteriores pero un alto esfuerzo de la manipulada, con una presión en cabeza de válvula muy ruidosa, alcanzando importante saturación al inicio de los cambios. Esto también es consistente con lo informado en la Tabla 2 ya que posee un  $K_r$  alto, una fuerte acción integral con  $T_I$  bajo y un  $T_D$  muy alto en comparación con los métodos de la CR y  $\lambda$  que explica la presencia de ruidos en la manipulada. Además, hay que recordar que la parametrización IMC busca un buen desempeño de seguimiento y eliminación de perturbaciones pero como consecuencia de ello se tiene un mal filtrado de ruidos, una particularidad que muestran muchos autores en textos clásicos de control de procesos. Por último, la Fig. 19 muestra que el controlador PID ajustado por método aquí propuesto tiene una respuesta más rápida en comparación con los tres métodos anteriores y tiene un movimiento de manipulada menos agresivo que con el método SIMC logrando un mejor desempeño que con este último. Esto se explica ya que el método de sintonización propuesto buscó compensar la norma  $H_2$  de la variable controlada con la ubicación de polos del sistema realimentado.

La Fig. 20 compara el desempeño de las variables controladas ( $h_2$ ) y la Tabla 3 compara el desempeño de los sistemas de control, con los controladores PID sintonizados de acuerdo con los cuatro métodos estudiados, midiendo la integral del error al cuadrado (ISE), la integral del valor absoluto del error (IAE) y la integral del tiempo por el valor absoluto del error (ITAE), evaluadas para el intervalo de tiempo entre 0 y 500 segundos.

De acuerdo con la Fig. 20 puede visualizarse una respuesta dinámica al cambio escalón en consigna mucho más rápida para el método aquí propuesto, mientras que se tiene una respuesta muy conservadora con los métodos de la CR y  $\lambda$ . Asimismo, de acuerdo con la Tabla 3, puede verse que la relación entre

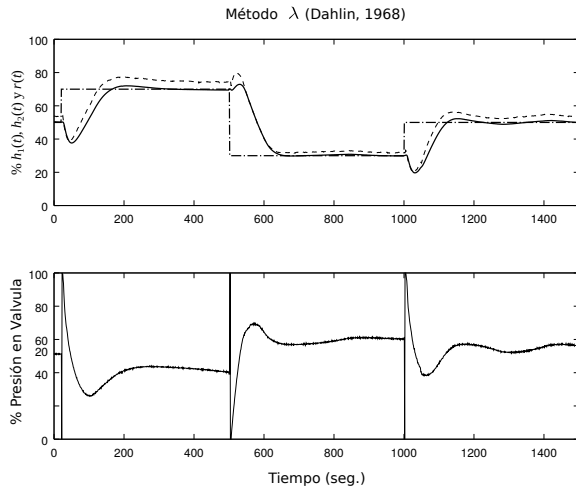


Figura 17: Desempeño de las variables  $h_1$  (línea de trazo) y  $h_2$  (línea continua), la referencia (línea de punto y raya) y presión en cabeza de válvula, expresadas en porcentaje.

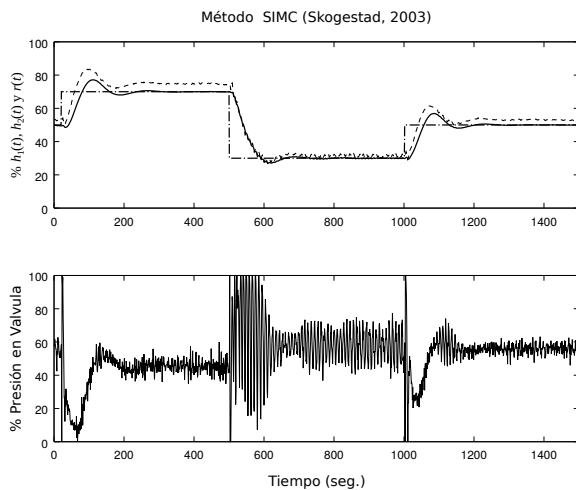


Figura 18: Desempeño de las variables  $h_1$  (línea de trazo) y  $h_2$  (línea continua), la referencia (línea de punto y raya) y presión en cabeza de válvula, expresadas en porcentaje.

Tabla 3: Índice de Desempeño de los Sistemas de Control PID.

Técnica	$\frac{ISE}{ISE_{min}}$	$\frac{IAE}{IAE_{min}}$	$\frac{ITAE}{ITAE_{min}}$
	$ISE_{min}$	$IAE_{min}$	$ITAE_{min}$
CR (Ziegler and Nichols, 1942)	2.4095	1.9649	2.4477
$\lambda$ (Dahlin, 1968)	4.4695	2.7550	3.4773
SIMC (Skogestad, 2003)	1.1892	1.2895	1.4899
Propuesta PID vía LMI	1.0000	1.0000	1.0000

las ISEs son aproximadamente un 19 % mayor para el caso del método SIMC, un 241 % y un 447 % para los métodos CR y  $\lambda$  respectivamente, en comparación con el método aquí propuesto. Similares tendencias pueden observarse con los índices de desempeño IAE e ITAE.

Todo esto, corrobora el mejor desempeño transitorio del sistema de control de nivel para cuando se sintoniza el controlador

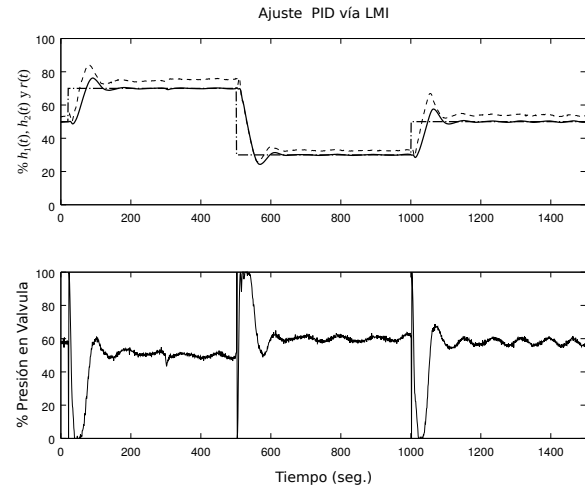


Figura 19: Desempeño de las variables  $h_1$  (línea de trazo) y  $h_2$  (línea continua), la referencia (línea de punto y raya) y presión en cabeza de válvula, expresadas en porcentaje.

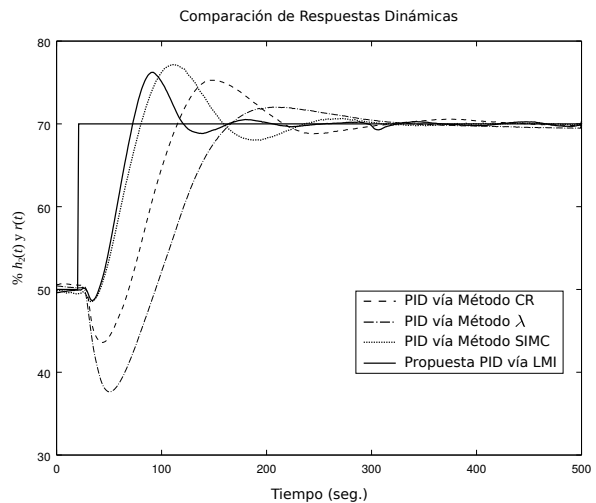


Figura 20: Comparación de las respuestas al escalón en consigna de la variable controlada ( $h_2$ ) obtenidas por los distintos métodos aquí estudiados.

PID de acuerdo con el método aquí propuesto.

## 6. Conclusiones

En este trabajo se presentó primeramente, la sintonización de controladores para realimentación de salida basados en una formulación que se apoya en la teoría de desigualdades matriciales lineales, permitiendo así que el sistema de control satisfaga especificaciones de diseño multiobjetivo. Un resultado interesante de destacar es la propuesta del parámetro  $q$  que puede ser usado como un parámetro de ajuste adicional para atenuar las respuestas dinámicas de las variables de control y manipulada, ya que dicho parámetro impacta directamente sobre el funcional de la norma  $H_2$ .

Adicionalmente, se muestra como lograr la sintonización de controladores PID basados en los resultados anteriores. Es de

destacar que para esto último, la estrategia aquí propuesta no se limita a un orden particular del sistema como lo plantean Ge et al. (2002), ni requiere el uso de una reducción del orden del mismo, y no utiliza métodos iterativos como lo plantean otros autores (Colmenares and Tadeo, 2005).

También, para ensayar la bondad del controlador propuesto, se consideró un sistema hidráulico experimental de laboratorio, mostrando mediante simulaciones numéricas y ensayos experimentales el buen desempeño obtenido por el sistema de control.

Los resultados alcanzados alientan a continuar trabajando en esta línea de investigación así como la implementación práctica de los mismos.

## English Summary

### Control System Design by Output Feedback with Constraints Applied to an Hydraulic System

#### Abstract

This paper presents the controller design for output feedback by using LMI to fulfill  $H_2$  and  $H_\infty$  performance criteria and pole placement. Based on the above design, it is shown how to compute the parameters of a PID industrial controller. The controllers here proposed are applied to a level control of an hydraulic system of laboratory scale, where the level of one tank is controlled by manipulating the inlet flow to the other tank. Through numerical simulations, it is shown the performance of the controlled and manipulated variables for the linear optimal controller and PID controller are implemented. Also, experimental tests are included with the tank system in order to compare the performance obtained by the control system when the proposed PID controller and another PIDs adjusted by traditional tuning techniques are implemented.

#### Keywords:

Process control, PID control, LMI, Multiobjective Control.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al financiamiento económico recibido de la Universidad Nacional del Litoral mediante su Programa CAI+D para apoyo a las tareas de investigación

y desarrollo.

## Referencias

- Adam, E. J., 2014. Instrumentación y Control de Procesos. Notas de Clases, 2nd Edition. Ediciones UNL, ISBN 978-987-657-284-2.
- Åström, K. J., Hägglund, T., 2009. Control PID Avanzado. Pearson - Prentice Hall.
- Cappelletti, C. A., Adam, E. J., Oct. 3-5 2012. Sintonización robusta de controladores mediante el uso de LMI. In: XXIII Congreso Argentino de Control Automático.
- Chilali, M., Gahinet, P., 1996b. Hinf design with pole placement constraints: an Lmi approach. IEEE Transactions on Automatic Control 41 (3), 358–367.
- Cohen, G. H., Coon, G. A., 1953. Theoretical consideration of retarded control. Trans. ASME 75, 827–834.
- Colmenares, W., Tadeo, 2005. Apunte Sobre Control Robusto Multiobjetivo de Sistemas. Equinoccio.
- Dahlin, E. B., 1968. Designing and tuning digital controllers. Instruments and Control Systems 42, 77–83.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J., Chilali, M., 1995. LMI Control Toolbox. For Use with MATLAB. The MathWorks, Inc.
- Ge, M., Chiu, M.-S., Wang, Q.-G., 2002. Robust PID controller design via LMI approach. Journal of Process Control 12, 3–13.
- González, H. A., Adam, E. J., Marchetti, J. L., 2008. Conditions for offset elimination in state space receding horizon controllers: A tutorial analysis. Chemical Engineering and Processing: Process Intensification 47, 2184–2194.
- Guzmán, J. L., Hägglund, T., Åström, K. J., Dormido, S., Dormido, S., Piguet, Y., 24–29, August 2014. Understanding PID design through interactive tools. In: 19th World Congress The International Federation of Automatic Control (IFAC). Cape Town, South Africa.
- Mäder, U., Morari, M., December 2007. Offset-free reference tracking for predictive controllers. In: IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, USA.
- Morari, M., Zafriou, E., 1989. Robust Process Control. Prentice Hall.
- Muske, K. R., Badgwell, T. A., 2002. Disturbance modeling for offset-free linear model predictive control. Journal of Process Control 12, 617–632.
- Ogata, K., 1997. Modern Control Engineering. Prentice Hall.
- Reynoso-Mesa, G., Sanchis, J., Blasco, X., Martínez, M., 2013. Evolutionary algorithms for PID controller tuning: Current trends and perspectives. RIAI - Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 10 (3), 251–268.
- Ruiz, A., Jiménez, J., Sánchez, J., Dormido, S., 2013. Event-based control for FOPTD systems. RIAI - Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 10 (3), 302–312.
- Scherer, C., Gahinet, P., Chilali, M., 1997. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. IEEE Transaction on Automatic Control 42, 896–911.
- Skogestad, S., 2003. Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. Journal of Process Control 13, 92–102.
- Zhou, K., Khargonekar, P., 1988. An algebraic Riccati equation approach to Hinf optimization. System and Control Letters 11, 85–91.
- Ziegler, J. G., Nichols, N. B., 1942. Optimum settings for automatic controllers. Trans. ASME 64 (11), 759–768.