

## Estabilidad para un control borroso en modo deslizante aplicado a un robot paralelo neumático

Pablo J. Prieto<sup>a</sup>, Nohe R. Cazarez-Castro<sup>a,\*</sup>, Dianelis García<sup>b</sup>, Selene L. Cardenas-Maciel<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Tecnológico Nacional de México - Instituto Tecnológico de Tijuana, Tecnológico Nacional de México, Av. ITR Tijuana y Blvd. Alberto Limón Padilla, S/N, 22510, Tijuana, Baja California, México.

<sup>b</sup>Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas. Carretera de Camajuaní Km. 5 1/2, CP 54830, Santa Clara, VC, Cuba.

### Resumen

Se presenta un controlador borroso tipo Mamdani basado en técnicas en modo deslizante para el posicionamiento de un robot paralelo neumático de dos grados de libertad (2 GDL). Es probado que el sistema es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov y se presentan resultados numéricos y experimentales. Más aún, el controlador diseñado puede ser aplicado en control de trayectoria al ser retroalimentadas la velocidad y la aceleración del sistema. Se presentan además resultados satisfactorios obtenidos en forma experimental para el caso de seguimiento de trayectoria. Copyright © 2015 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L.U. Todos los derechos reservados.

### Palabras Clave:

Control borroso, Control de robot, Estabilidad de Lyapunov, Modos deslizantes.

### 1. Introducción

Algunas de las estrategias recomendadas para el control continuo de sistemas neumáticos es el control por modos deslizante debido a su robustez y comportamiento ante fenómenos altamente no lineales. Control por modos deslizantes consiste en forzar al estado del sistema a un comportamiento deseado, para el presente caso, llevar la dinámica del sistema a una superficie deslizante. El Control por Modos Deslizantes fue desarrollado originalmente por Utkin en 1977 para el control de manipuladores robóticos Utkin et al. (1999); Krivts and Krejnin (2006).

La lógica borrosa se combina con el control en modo deslizante para reducir el efecto de vibraciones mecánicas de altas frecuencias (chattering) y mejorar la precisión, así como la robustez del controlador. Esto se justifica debido a que el control borroso es una ley del control no convencional y robusta, conveniente para sistemas complejos o no lineales caracterizados por fluctuación en sus parámetros o incertidumbres. Cabe destacar entre las ventajas de los sistemas borrosos el no estar ligado al modelo matemático del sistema dinámico a controlar, tal como el caso del control por modos deslizantes clásico.

La incorporación del control borroso ha tenido mucha aceptación desde la industria por ser una estrategia de control basada en resultados prácticos. Sin embargo, al mismo tiempo ha sido ampliamente criticado desde la academia porque en la mayoría de las ocasiones los diseños no se acompañan de las pruebas formales (matemáticas) de estabilidad acostumbradas en las teorías y técnicas tradicionales y modernas de control basadas en un esquema de (i) modelo matemático, (ii) diseño de controladores, (iii) prueba teórica de estabilidad y (iv) experimentación - en la mayoría de los casos.

En lo particular para sistemas borrosos tipo Mamdani (1975) no es común encontrar pruebas de estabilidad que acompañen a los diseños de sistemas de control. En cambio, para sistemas borrosos tipo Takagi and Sugeno (1985), por sus características de la estructura del consecuente en las reglas IF-THEN, es más común encontrar aproximaciones a pruebas de estabilidad relacionadas con Routh (1877)-Hurwitz (1895) y Lyapunov (1892) por mencionar algunos.

La ley de control a diseñar tiene como propósito lograr que el sistema en lazo cerrado sea estable, lo que se consigue al asegurar la convergencia de la dinámica a un punto de equilibrio estable. Para lograr este objetivo se pueden aplicar diversos criterios de estabilidad, como por ejemplo el de Lyapunov. El método de estabilidad de Lyapunov es usualmente utilizado para determinar las propiedades de estabilidad de un punto de equilibrio sin resolver la ecuación diferencial del estado. Se parte de considerar una función candidata de Lyapunov  $V(y(t))$

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [pablojprieto@tectijuana.edu.mx](mailto:pablojprieto@tectijuana.edu.mx) (Pablo J. Prieto), [nohe@ieee.org](mailto:nohe@ieee.org) (Nohe R. Cazarez-Castro), [dianelis@uclv.edu.cu](mailto:dianelis@uclv.edu.cu) (Dianelis García), [lillette.cardenas@ieee.org](mailto:lillette.cardenas@ieee.org) (Selene L. Cardenas-Maciel)

como una función escalar diferenciable definida en un dominio  $D$  que contiene el origen. El método de Lyapunov plantea que la función  $V(y(t))$  es definida positiva en  $V(0) = 0$  y  $V(y(t)) > 0$  para  $t > 0$ , y que su derivada  $\dot{V}(y(t))$  es definida negativa si  $\dot{V}(y(0)) = 0$  y  $\dot{V}(y(t)) < 0$  para  $t > 0$ , Slotine and Li (1991).

En el presente artículo se propone una estrategia de control basada en un sistema borroso tipo Mamdani para resolver el problema de posicionamiento de un sistema neumático. Los sistemas neumáticos presentan altas no linealidades debido a la compresibilidad del aire, cambios bruscos del flujo de aire. Todo ello provoca variaciones de los parámetros del modelo y con ello se añade incertidumbre a la estimación. Se incorporan elementos del control por modos deslizantes debido a la robustez del mismo ante incertidumbres y altas no linealidades del sistema en cuestión. Desde el punto de vista de la lógica borrosa basada en sistemas por modos deslizantes la propuesta es no trivial debido a que no solo brinda solución al problema de chattering, sino que también se asegura solución al problema de seguimiento del sistema hacia una referencia determinada.

Como resultado adicional, el sistema borroso diseñado para resolver el problema de posicionamiento y que resulta ser estable en lazo cerrado, no solo atenúa chattering, sino que también brinda una alternativa para el control de posicionamiento de sistemas neumáticos.

El artículo se organiza como sigue: La Sección 2 brinda una descripción del mecanismo objeto de estudio. La Sección 3 describe aspectos fundamentales del control por modos deslizantes. La Sección 4 presenta una descripción del algoritmo de control borroso en modo deslizante y la prueba de estabilidad correspondiente. Los resultados al problema de posicionamiento y al de seguimiento se presentan en la Sección 5. Finalmente, la Sección 6 reporta conclusiones sobre el presente trabajo.

## 2. Robot paralelo neumático de 2 grados de libertad (2-GDL)

El robot paralelo de 2 grados de libertad (2-GDL) objeto de estudio es el mostrado en la Figura 1 Rubio et al. (2007), está formado por una base fija conectada a una plataforma móvil por dos cadenas cinemáticas gobernadas por cilindros neumáticos de doble efecto del tipo FESTO DNC B-100-320-PPV-A. Estos cilindros son alimentados por válvulas MPYE 5-3/8-010-B. Encoders del tipo LXEP-40 son usados para medir posición; la velocidad y aceleración son estimadas.

Los movimientos de la plataforma móvil se logran mediante la acción de los dos cilindros neumáticos (actuadores) que constituyen articulaciones actuadas cuyos desplazamientos lineales le imprimen al efector final rotaciones sobre dos ejes perpendiculares entre sí. Estas rotaciones simulan las pendientes del mundo virtual, las cuales son visualizadas en un monitor ubicado en la propia cabina.

Las características más importantes del mecanismo están descritas en la Tabla 1.

### 2.1. Modelado de un actuador neumático lineal

El modelo analítico de un actuador neumático comprende las dimensiones dentro de la válvula, dado que el aire no es un

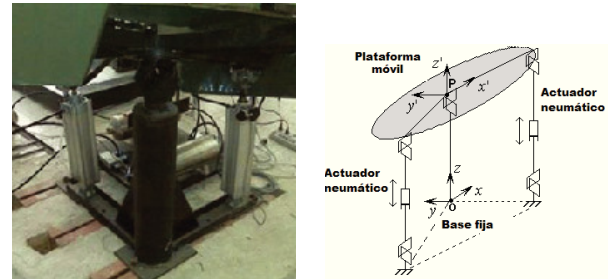


Figura 1: Plataforma de 2-GDL y su arquitectura geométrica.

Tabla 1: Principales características de la plataforma de 2-GDL

Descripción	Parámetros
Ángulo de Ladeo	$\pm 13^\circ$
Ángulo de Cabeceo	$\pm 13^\circ$
Elongación of pistón	320 mm
Diametro del cilindro	100 mm

buen lubricante, la dinámica del flujo del aire a través de las cámaras del cilindro y la dinámica del movimiento de la carga en función de las presiones aplicadas a cada lado del émbolo y las fuerzas externas y de fricción que estén presentes en la estructura mecánica.

La masa de aire a través de los orificios de válvulas dependen de su área efectiva y de las presiones de entrada y salida. Esta es calculada de acuerdo a la norma ISO-6358 (1989) y se establece:

$$Q_m \begin{cases} KAP_{ent} \sqrt{\frac{273}{T}} & 0 < r < rc \\ KAP_{ent} \sqrt{\frac{273}{T}} \sqrt{1 - \frac{r-rc}{1-rc}} & r \geq rc \end{cases}, \quad (1)$$

donde

$$r = \frac{P_{sal}}{P_{ent}} \quad (2)$$

y

$Q_m$ : Flujo másico del aire,

$A$ : Área efectiva del orificio ( $m^2$ ),

$P_{ent}$ : Presión de entrada al orificio ( $Pa$ ),

$P_{sal}$ : Presión de salida del orificio ( $Pa$ ),

$K$ : Constante proporcional de ajuste de unidades ( $kg/s.m^2.Pa$ ),

$r$ : Razón de presión,

$rc$ : Razón de presión crítica que delimita el flujo sónico del subsónico,

$T$ : Temperatura de trabajo.

Los parámetros  $P_{ent}$  y  $P_{sal}$  son las presiones absolutas de la entrada y la salida de los orificios de la válvula (en  $Pa$ ),  $K$  es una constante de proporcionalidad ( $K = 2,43 * 10^3 kg/s.m^2.Pa$ ),  $T$  temperatura de trabajo ( $^\circ K$ ) y  $rc$  representa la razón de presión crítica que defina si la región de trabajo es sónica ( $0 < r < rc$ )

o subsónica ( $r > rc$ ). El factor  $rc$  depende, entre otras cosas, de la geometría de los orificios.

La dinámica de un sistema neumático puede ser resumida como:

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = \frac{RT}{V_1(y)}(Q_{m1} - \frac{P_1 A_1 \dot{y}}{RT}), \\ \dot{P}_2 = \frac{RT}{V_2(y)}(Q_{m2} + \frac{P_2 A_2 \dot{y}}{RT}), \\ \ddot{y} = (P_1 A_1 - P_2 A_2 - P_a A_v - F_f)/M, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \ddot{y}, \end{cases} \quad (3)$$

donde:

$P_1, P_2$ : Presión de las cámaras superior e inferior ( $P_a$ ),

$A_1, A_2$ : Área de las cámaras inferior y superior ( $m^2$ ),

$y$ : Posición del pistón ( $m$ ),

$V_1(y), V_2(y)$ : Volumen de la cámara inferior y superior del pistón ( $m^3$ ),

$M$ : Carga ( $kg$ ),

$A_v$ : Área de la sección transversal del vástago ( $m^2$ ),

$v$ : Velocidad del pistón ( $m/s$ ),

$F_f$ : Fuerza de fricción.

Debido al grado de dificultad que presenta el modelo no lineal de los sistemas electro-neumáticos, se procede a realizar una identificación experimental del sistema válvula-pistón con el objetivo de obtener un modelo linealizado. La propuesta llevada a cabo por Rubio Rubio et al. (2007) se presenta como un función transferencial de tercer orden tipo 1 de la forma:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K w_n^2}{s(s^2 + 2\phi w_n s + w_n^2)}. \quad (4)$$

### 3. Control por Modos Deslizantes

En el caso de aplicaciones con actuadores neumáticos, se deben enfrentar las consecuencias de la no linealidad que provoca movimientos no uniformes de los pistones cuando se realizan avances con carga aplicada y a los efectos indeseables debido a la compresibilidad del aire en las cámaras del pistón. Los sistemas de control por modos deslizantes tienen la capacidad de ser una herramienta eficiente ante plantas complejas de alto orden y dinámicas no lineales que operan bajo condiciones inciertas Krivts and Krejnin (2006).

La ecuación (5) define matemáticamente la estructura de la superficie deslizante  $s(y, t)$ , donde  $\lambda$  es una constante positiva que se selecciona a partir del desempeño del sistema en cuanto a velocidad de respuesta,  $e(t) = y_d(t) - y(t)$  es el error de la salida del sistema, siendo  $y_d(t)$  el estado deseado.

$$s(t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e. \quad (5)$$

donde  $n$  es el orden del sistema.

#### 3.1. Control por modo deslizante para sistemas de 3<sup>er</sup> Orden

Dado un sistema de 3<sup>er</sup> Orden:

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad (6)$$

$$\dot{y}_2 = y_3, \quad (7)$$

$$\dot{y}_3 = f(y, t) + b(y, t)u(t), \quad (8)$$

donde  $y_1, y_2, y_3$  son variables de estado del sistema y  $y(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ y_3(t)]^T$  es el vector de estado,  $u(t)$  es la entrada de control. Por su parte  $f(y, t)$  y  $b(y, t)$  son generalmente funciones dependientes del estado y del tiempo. La función  $f(y, t)$  agrupa los términos no lineales, complejos de modelar y  $b(y, t)$  está integrada por parámetros del modelo del sistema que son poco conocidos.

Se sabe que un sistema de tercer orden tipo 1 puede representar una aproximación de todo el sistema neumático acorde a la literatura referenciada. Esa estimación se plasma en el algoritmo de control SMC. La función de superficie para sistemas de tercer orden queda planteado de la siguiente manera:

$$s(t) = e_3 + 2\lambda e_2 + \lambda^2 e_1, \quad (9)$$

donde:

$e_1$  Error de posición:  $y_{1d} - y_1$ ,

$e_2$  Error de velocidad:  $y_{2d} - y_2$ ,

$e_3$  Error de aceleración:  $y_{3d} - y_3$ ,

cuando el sistema alcanza la superficie deslizante  $s(t) = 0$ , por tanto:

$$e_3 = -2\lambda e_2 - \lambda^2 e_1, \quad (10)$$

y la solución de (10) es:

$$e_r(t) = E_{1,0}e^{-\lambda t} + E_{2,0}te^{-\lambda t}, \quad (11)$$

donde:

$e_r(t)$ : Representa error en el tiempo.

$E_{1,0}$  y  $E_{2,0}$ : Representan condiciones iniciales.

Esta es llamada propiedad de invarianza que parece prometedora para diseñar un control de retroalimentación para plantas dinámicas que operan bajo condiciones inciertas Utkin et al. (1999). El tiempo en que el sistema alcance la referencia deseada, una vez en la superficie deslizante, es equivalente a  $\frac{1}{\lambda}$ ; de allí se deduce que la rapidez del sistema depende de la pendiente  $\lambda$ .

La ley de control se basa en los criterios de Lyapunov. Se selecciona la función  $V(y(t)) = \frac{1}{2}s^2$  debido a que es definida positiva y su derivada debe ser definida negativa cumpliendo la condición representada en (12).

$$s\dot{s} \leq -K|s|, \quad (12)$$

donde  $K$  representa una constante positiva.

Si se deriva la función candidata con respecto a la superficie deslizante  $s(x, t)$  definida en la ecuación (9) es posible obtener una expresión para la ley de control que se debe diseñar, asegurándose la estabilidad del sistema. Finalmente la señal de mando  $u(t)$  del control en modo deslizante está integrada por dos partes:

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_s(t), \quad (13)$$

donde:

$u_{eq}(t)$ : Mando compensado, tiene como función cancelar las no linealidades y los parámetros con incertidumbres del modelo, y  $u_s(t)$ : Mando discontinuo, asegura la robustez del sistema.

La ley de control  $u_{eq}(t)$  se implementa para cumplir con la condición deslizante expresada por la ecuación (12). La ley de control generalizada obtenida para sistemas de 3<sup>er</sup> orden se plantea como:

$$u(t) = \frac{1}{\hat{b}(y)} \left( -\hat{f}(y) + \dot{y}_{d3}(t) + 2\lambda e_3 + \lambda^2 e_2 + K \text{sign}(s(t)) \right), \quad (14)$$

donde  $y_{d3}(t)$  representa la referencia para la aceleración del sistema y:

$$\text{sign}(s(t)) \begin{cases} -1 & \text{para } s(t) < 0 \\ 1 & \text{para } s(t) > 0 \end{cases}.$$

En sistemas con discontinuidades, la solución de la ecuación de movimiento depende de pequeñas constantes de tiempo que presentan los componentes rápidos. Pero a diferencia de los sistemas de control continuo, un controlador discontinuo excita la dinámica no prevista en el modelo, obteniendo por resultado oscilaciones en el vector de estado. Este problema se conoce como *chattering* en la literatura de control. Estas oscilaciones dan por resultado una baja precisión en el control, alta disipación de potencia en los circuitos conmutadores y desgaste en los componentes mecánicos Slotine and Li (1991) Utkin et al. (1999).

Por lo anterior planteado se ha hecho muy difícil eliminar el *chattering* en los sistemas en modo deslizante manteniendo los principales parámetros del SMC en otras variantes creadas para eliminar este. Por otro lado Slotine plantea que si se escoge un valor pequeño de  $K$  la convergencia no es garantizada Slotine and Li (1991).

Por medio de las reglas borrosas, basados en criterios de Lyapunov, puede ser reemplazada la ley de control planteada en la ecuación (14) para los sistemas SMC con el objetivo de eliminar *chattering*.

Mediante el método propuesto en este artículo la ley de control  $u(t)$  sobre la servo-válvula, toma valores en función de  $s(t)$  con el objetivo de forzar la dinámica del sistema hacia la superficie deslizante. Esta vez se establecen reglas borrosas que relacionen ambas variables de manera directa y asegure la convergencia de la planta hacia una referencia dada. En otras palabras, el control en modo deslizante clásico descrito en esta Sección es reemplazado por un sistema de inferencia borrosa tipo Mandami. Es importante destacar que con este algoritmo de control propuesto no se hace necesario la estimación del modelo matemático de la planta, objeto de estudio.

#### 4. Control por modos deslizantes basado en lógica borrosa

Entre las ventajas del control por modos deslizantes basado en lógica borrosa (FSMC por sus siglas en inglés) está el que no está directamente ligado al modelo matemático del sistema como el caso del SMC, asegura estabilidad y reduce el número de reglas borrosas Abdelsalam and Areed (2012). La mayoría

de los algoritmos se enfocan en la sustitución del controlador discontinuo por un bloque de lógica borrosa que toma como entrada el valor del componente  $s(y)$  de la ley de control deslizante y como salida un componente discontinuo  $u_s(t)$ . Otros se basan en añadir, como variable de entrada al bloque borroso, la derivada de la función de superficie deslizante  $s(t)$  en el controlador discontinuo  $u_s(t)$ , con ello aumenta la precisión en el seguimiento de la trayectoria y se acelera la velocidad de respuesta. Mediante una amplia base de reglas heurísticas un controlador de lógica borrosa puede cubrir satisfactoriamente las incertidumbres severas, aunque el número elevado de reglas borrosas, dado por la ecuación, hace complejo el análisis y surge una pesada carga computacional en algunas aplicaciones Nazir and Wang (2010); Amer et al. (2011). Además, el tratamiento con elementos derivativos puede amplificar los ruidos y con ello se puede tener un pobre desempeño del controlador.

Incluso se han desarrollado estrategias más complejas en aras de potenciar la robustez como el diseño de Controladores Borrosos Supervisores para sintonizar dinámicamente parámetros como la Ganancia del control y el valor de  $\lambda$ , pendiente de la superficie deslizante Amer et al. (2011) así como la ganancia de robustez  $K$ . Los principales inconvenientes de este planteamiento son, por un lado la *maldición* de la dimensionalidad, el número de reglas crece geométricamente con el número de variables, y por otro lado aumenta el número de procesos de inferencia que deben ser calculados simultáneamente.

Debido a las limitaciones de los esquemas antes planteados, en este trabajo se propone desarrollar un sistema de inferencia borroso que sustituya no solo a la función signo de la ley de control sino también al control equivalente. El esquema propuesto según la Figura 2 no necesita el modelo matemático del sistema por lo que es relativamente fácil de diseñar. Esta decisión se fundamenta en la existencia de incertidumbres en el modelo matemático del proceso; la lógica borrosa es un modo alternativo eficaz para tratar con dinámicas desconocidas.

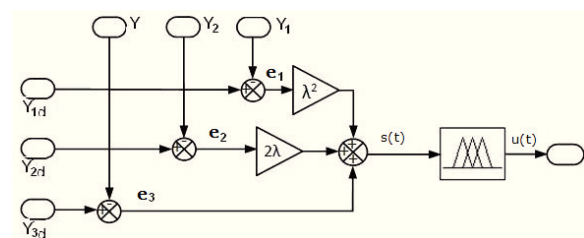


Figura 2: Esquema del control por modo deslizante basado en lógica borrosa.

La ley de control en (15) muestra la relación directa que existe entre  $s(t)$  y  $u(t)$  reemplazando la ley de control en (14).

$$u^{crisp}(t) = u_{borroso}(s(t)). \quad (15)$$

En (15) se puede observar que  $u_{borroso}(s(t))$  es la salida de la inferencia borrosa basada en Mandami.

Las funciones de membresía para las variables entrada y salida son mostradas en la Figura 3, donde las etiquetas lingüísticas son escritas como negativo grande **NG**, negativo medio **NM**,



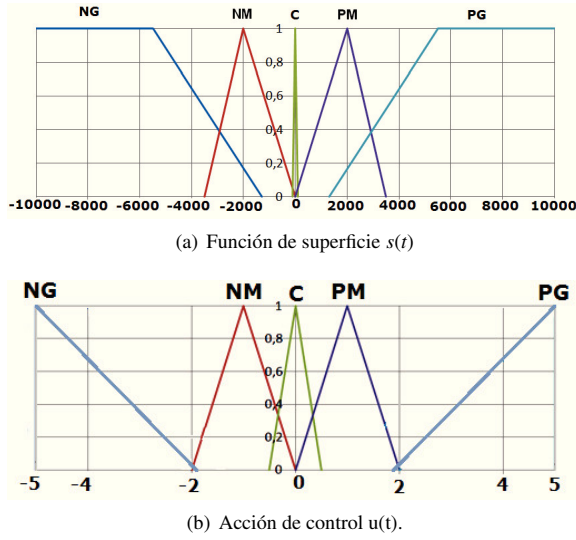


Figura 3: Funciones de membresía para  $s(t)$  como entrada y  $u(t)$  como salida.

cero **C**, positivo medio **PM** y positivo grande **PG**. La forma de las funciones de membresía son triangulares y trapezoidales, que debido a que se basan en funciones lineales son de fácil implementación. A manera de fundamentación se comenta lo siguiente:

1. El estado **NG** representa la situación donde el vector de estado de la planta se encuentra muy lejos de la superficie deslizante en el lado negativo.
2. El estado **NM** representa la situación cuando el vector de estado se encuentra en el lado negativo de la superficie deslizante.
3. El estado **C** merece especial atención. Esta dado cuando en vector de estado de la planta se encuentra en la vecindad de la superficie deslizante. De esta forma cualquier valor muy cercano a  $s(t) = 0$  puede ser aceptado.
4. El estado **PM** representa la situación donde el vector de estado de la planta se encuentra en el lado positivo de la superficie deslizante.
5. El estado **PG** representa la situación donde el vector de estado se encuentra muy lejos en el lado positivo de la superficie deslizante.

Las reglas correspondientes se reportan en la Tabla 2. El universo de discurso de  $X_{s(t)} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-4,5 * 10^6, 4,5 * 10^6]\}$  y  $Y_{u(t)} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \in [-5, 5]\}$ .

De la Tabla 2 se deduce que: si la superficie deslizante  $s(t)$  es **NG**, el control aplicado es **NG** para forzar la dinámica de la planta  $s(t)$  a  $s(t) = 0$ . Por otro lado si la superficie deslizante  $s(t)$  es **C**, el control aplicado es **C** para mantener  $s(t) = 0$ .

#### 4.1. Robustez del control en modo deslizante basado en lógica borrosa

La puesta a punto del control en modo deslizante se basa en la estimación de parámetros pertenecientes al modelo ma-

Tabla 2: Reglas borrosas

Superficie $s(t)$	Acción de control $u(t)$
NG	NG
NM	NM
C	C
PM	PM
PG	PG

temático del sistema. Sin embargo, los parámetros estimados nunca van a corresponder a los modelos propios de la planta real. Dado el sistema de tercer orden y con base a lo expuesto en el epígrafe 3, se tiene que la superficie deslizante  $s(t)$ , su derivada  $\dot{s}(y)$  y la ley de control para un sistema de tercer orden son equivalentes a:

$$s(t) = e_3 + 2\lambda e_2 + \lambda^2 e_1. \quad (16)$$

Al derivar (16) se obtiene:

$$\dot{s}(t) = \dot{y}_{d3} - (f(y) + b(y)u(t)) + 2\lambda e_3 + \lambda^2 e_2. \quad (17)$$

Y sustituyendo (14) en (17) se obtiene:

$$\dot{s}(t) = \Delta \dot{y}_{d3} + \Delta f(y) + \Delta e_3 + \Delta e_2 - \frac{b(y)}{\hat{b}(y)} K \text{sign}(s(t)), \quad (18)$$

donde  $\Delta \dot{y}_{d3} = \dot{y}_{d3}(1 - \frac{b(y)}{\hat{b}(y)})$ ,  $\Delta f(y) = \frac{b(y)}{\hat{b}(y)} \hat{f}(y) - f(y)$ ,  $\Delta e_3 = 2\lambda e_3(1 - \frac{b(y)}{\hat{b}(y)})$ ,  $\Delta e_2 = \lambda^2 e_2(1 - \frac{b(y)}{\hat{b}(y)})$ . Asumiendo que  $b(y)$ ,  $\Delta f(y)$ ,  $\lambda$ , y  $K$  son positivas.

De forma tal que:

$$\frac{b(y)}{\hat{b}(y)} K > \Delta \dot{y}_{d3} + \Delta f(y) + \Delta e_3 + \Delta e_2, \quad (19)$$

Por tanto:

$$K > \frac{\hat{b}(y)}{b(y)} [\Delta \dot{y}_{d3} + \Delta f(y) + \Delta e_3 + \Delta e_2]. \quad (20)$$

De esta forma  $\dot{s}(t)$  siempre presenta signo opuesto con respecto a  $s(t)$ . Al obedecer el teorema de Lyapunov la dinámica del sistema converge hacia la superficie deslizante. Si la ganancia de robustez del algoritmo de control es lo suficientemente alta las incertidumbres de los parámetros se hacen despreciables y el sistema presenta un comportamiento deseable. De esta forma el SMC constituye una estrategia de control robusta ante incertidumbres en los parámetros del modelo, lo cual representa su principal ventaja, Slotine and Li (1991); Van Damme et al. (2009). Por otro lado, según Rubio et al. (2007) la estimación  $\hat{b}$ , a través de una identificación experimental, es tal que conserva el mismo signo de  $b(t)$  lo que garantiza que la parte izquierda de (19) sea positiva y la aproximación  $\Delta f(y)$  sea despreciable. Por otro lado en (19)  $b(y)$  divide a  $\hat{b}(y)$  por ende, ya que ambos presentan el mismo signo, la parte izquierda siempre es positiva.

Por lo planteado se puede afirmar que, basado en la ley de control presentada en (14),  $u(t)$  presenta el mismo signo que  $K \text{sign}(s(t))$  obedeciendo los criterios de Lyapunov. Para la estrategia borrosa en modo deslizante se sigue la misma idea. En este caso  $u(t)$  presenta el mismo signo que  $s(t)$ . Sigue la demostración de la siguiente manera:

$$\dot{s}(t) = \dot{y}_{3d} - \dot{y}_3 + 2\lambda(y_{3d} - y_3(t)) + \lambda^2(y_{2d} - y_2(t)). \quad (21)$$

para un control de posición  $\dot{y}_{3d} = y_{3d} = y_{2d} = 0$ . Se abrevia como

$$\dot{s}(t) = -\dot{y}_3 - 2\lambda y_3(t) - \lambda^2 y_2(t). \quad (22)$$

Sustituyendo (8) en (22) se obtiene

$$\dot{s}(t) = -f(t) - b(t)u_{borroso}(s(t)) - 2\lambda y_3(t) - \lambda^2 y_2(t), \quad (23)$$

y de esta manera siendo  $u^{crisp}(t) = u_{borroso}(s(t))$ , que presenta el mismo signo de  $s(t)$  se cumple  $\dot{s}s < 0$ .

Es importante destacar algunos criterios para el ajuste: si el conjunto de  $\mathbf{C}$  se encuentra muy cerca de  $s(t) = 0$  el chattering se incrementa, por otro lado si el conjunto es grande se garantiza ausencia de chattering pero va a existir un error en estado estable. Por tanto, los conjuntos correspondientes a las funciones de membresía deben ser cuidadosamente definidos.

## 5. Resultados

Se presentan a continuación resultados experimentales y un análisis comparativo para SMC y FSMC.

### 5.1. Experimentos con control por modo deslizante clásico

Para realizar la experimentación correspondiente, el algoritmo de control ha sido implementado en Simulink con la herramienta Real Time Workshop y Real Time Windows Target. La posición de los pistones son obtenidas de la lectura de los encoders; la velocidad y aceleración son estimadas con el uso de la tarjeta de adquisición *Humusoft 624* que opera bajo un tiempo de muestreo de 1 ms.

La manera más común de eliminar chattering es introducir una capa límite reemplazando el término discontinuo  $\text{sign}(s(t))$  en (14) por una función de saturación definida por:

$$\text{sat}(s/\Phi) \begin{cases} \frac{s}{\Phi}, & \text{para } \left| \frac{s}{\Phi} \right| \leq 1 \\ \text{sign}(s(t)) & \text{para } \left| \frac{s}{\Phi} \right| > 1 \end{cases},$$

donde  $\Phi$  representa una constante positiva. De esta forma se establece una capa límite  $\text{sat}(s/\Phi)$  al término  $\text{sign}(s(t))$  en un límite de la vecindad  $s(t) = 0$  Slotine and Li (1991); Utkin et al. (1999). Los principales parámetros del control por modo deslizante implementado se encuentran en la Tabla 3.

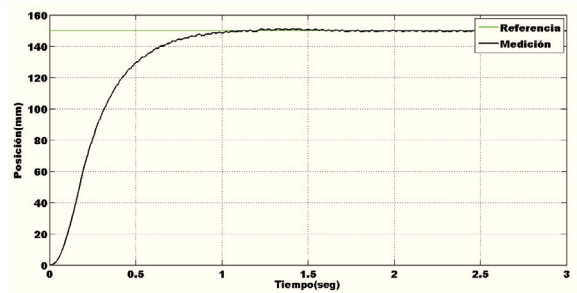
Tabla 3: Parámetros del experimento

Descripción	Valores
$\lambda$	$10 \text{ seg}^{-1}$
$K$	100000
$\Phi$	$100 \frac{\text{mm}}{\text{seg}^2}$

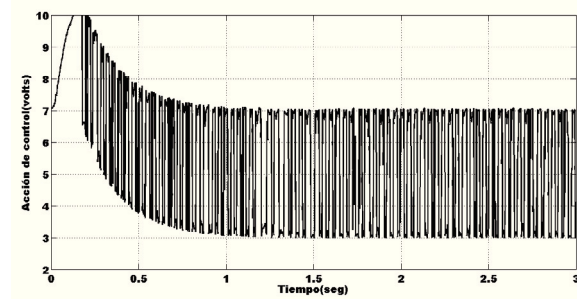
De acuerdo a lo planteado en el epígrafe 3 se parte de un modelo matemático de la planta a partir de una identificación experimental basado en Rubio et al. (2007) aplicado a ambos cilindros. La función transferencial obtenida basado en la ecuación (4) es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1,6 * 10^5}{s(s^2 + 4,102s + 1162)}. \quad (24)$$

La Figura 4 muestra los resultados experimentales para un cilindro del robot paralelo. Se observa la respuesta sobre-amortiguada del sistema y convergente del sistema. Sin embargo, a pesar de que el chattering no alcanza todo el rango de voltaje de la válvula, este no es eliminado cuando el sistema alcanza la referencia y con ello el desempeño del control se ve comprometido.



(a) Posición



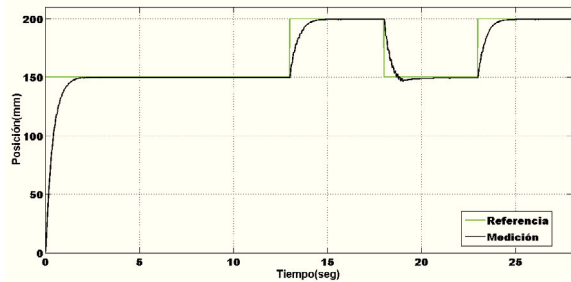
(b) Acción de voltaje.

Figura 4: Respuesta de un actuador neumático del robot paralelo con la sustitución del elemento  $\text{sgn}(s(t))$  por  $\text{sat}(s/\Phi)$

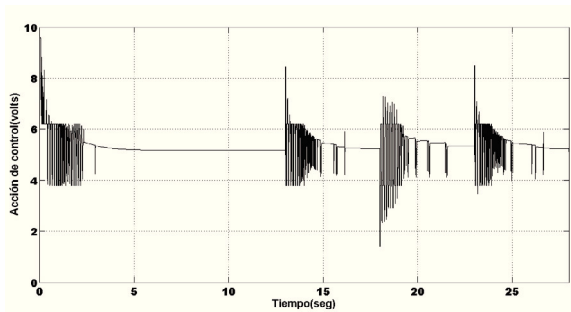
### 5.2. Experimentos con control por modo deslizante basado en lógica borrosa

Respecto a FSMC, la Figura 5 y la Figura 6 muestran la respuesta de los actuadores neumáticos en lo que respecta al control por posicionamiento ante referencia tipo pulsos con el control borroso en modo deslizante propuesto. Se puede observar la respuesta sobre-amortiguada del sistema neumático, característica propia de los sistemas en modo deslizante y la convergencia hacia la respuesta deseada. Cuando la posición del actuador neumático se acerca a la deseada, se aprecia la aparición de oscilaciones de alta frecuencia en el mando solo durante un corto lapso de tiempo y con una magnitud reducida. En este caso el conjunto borroso correspondiente a la etiqueta  $\mathbf{C}$  se fija entre  $[-100 \ 100]$ . Cuando la función de superficie tenga un

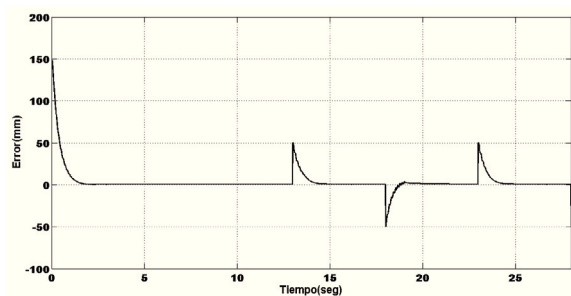
valor perteneciente a conjunto se dispara la acción de control en la servo-válvula  $u(t) = 0$ . Por tanto, el chattering desaparece en la vecindad de la superficie deslizante. Esta es la principal contribución de este algoritmo de control.



(a) Posición.



(b) Acción de voltaje.



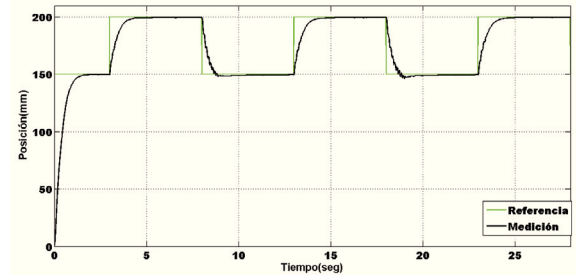
(c) Error de posición.

Figura 5: Respuesta del actuador neumático correspondiente al ángulo de ladoo ante pulsos de referencia en un experimento real.

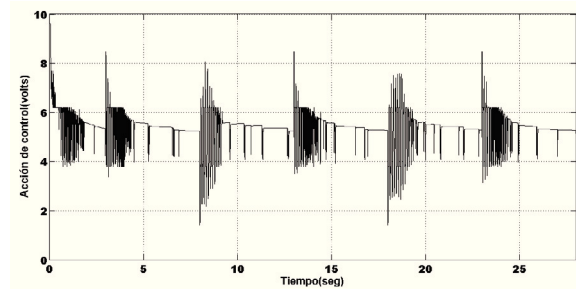
Es importante destacar que a pesar de las altas no linealidades de la planta el chattering es reducido, incluso se puede afirmar que es eliminado. Es interesante saber que el controlador propuesto, no presenta un modelo estimado de la planta, sin embargo, a pesar de la variación constante de los coeficientes del modelo con respecto a la posición, descrito en el epígrafe 2.1 la estabilidad y la habilidad de seguir una referencia es garantizada.

Como elemento adicional para verificar la validez del controlador propuesto, la Figura 7 muestra la derivada de la función candidata de Lyapunov para los cilindros, misma que como se predijo es negativa y por lo tanto el sistema es estable en sentido de Lyapunov.

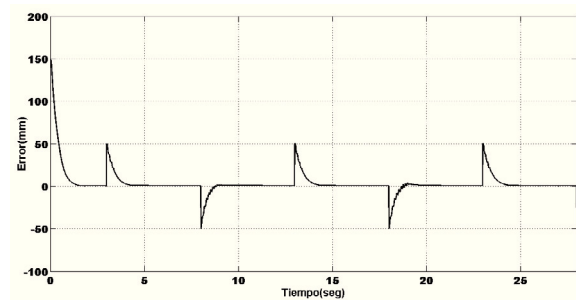
Como resultado adicional es preciso mencionar que el con-



(a) Posición.



(b) Acción de voltaje.



(c) Error de posición.

Figura 6: Respuesta del actuador neumático correspondiente al ángulo de cabeceo ante pulsos de referencia en un experimento real.

trolador por modos deslizantes basado en lógica borrosa propuesto resulta ser tal que es capaz de resolver el problema de seguimiento de trayectorias, lo cual puede ser visualizado en la Figura 8 para un pistón de la plataforma. En esta situación, los errores se generan fundamentalmente ante cambios bruscos de referencia, la función  $s(t)$  tiende a variar en la vecindad de la superficie deslizante, varias reglas son disparadas y se puede observar la conmutación en la acción de mando. Es notable la convergencia de la dinámica hacia la referencia y la reducción del chattering.

## 6. Conclusiones

Un control borroso en modo deslizante ha sido implementado de manera exitosa en una plataforma robótica de 2 grados de libertad. El algoritmo de control propuesto, basado en los criterios de Lyapunov, toma ventajas de los sistemas deslizantes y de la lógica borrosa. Resultados experimentales permiten ver la reducción de chattering, incluso su propia eliminación en el

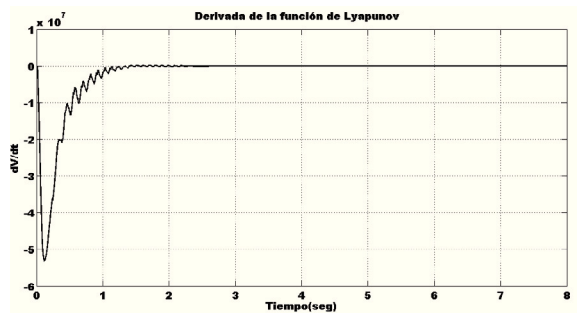
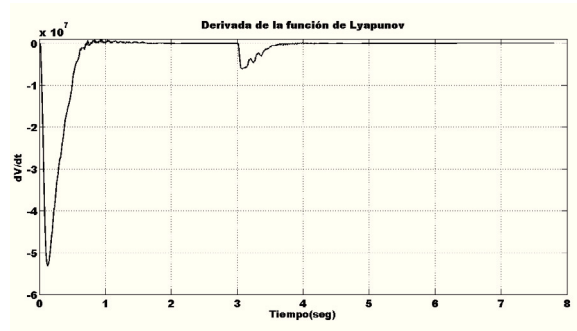
(a)  $\dot{V}$  para el primer cilindro(b)  $\dot{V}$  para el segundo cilindro.

Figura 7: Derivada de la función de Lyapunov  $\dot{V}$  en los primeros instantes de experimentos para ambos cilindros.

control de posicionamiento del robot. El sistema de inferencia borrosa tipo Mamdani garantiza la convergencia del sistema. Las principales ventajas de los sistemas en modo deslizante son mantenidas, tales como su robustez ante incertidumbres y altas no linealidades, propias de los sistemas neumáticos.

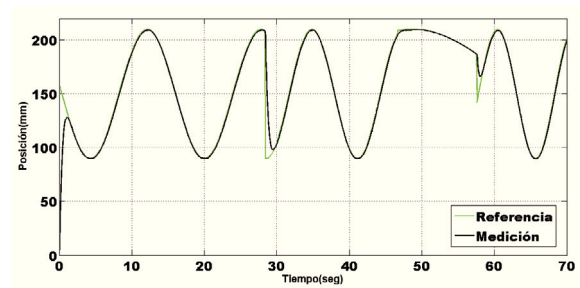
El algoritmo de control propuesto resulta ser genérico y puede ser aplicado a otros sistemas mecánicos ya que no depende de un modelo matemático, es decir, no hay necesidad de realizar una identificación experimental de sistemas. Sin embargo, las reglas borrosas pueden ser mejoradas con el objetivo de eliminar completamente el chattering.

## English Summary

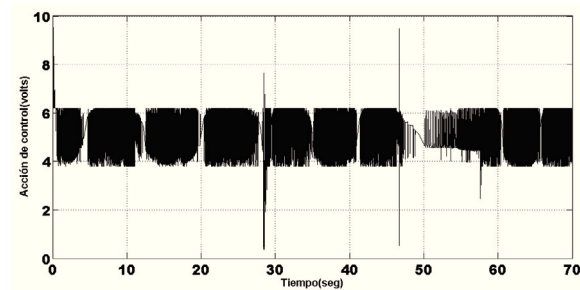
### Stability for a sliding mode fuzzy control applied to a pneumatic parallel robot

#### Abstract

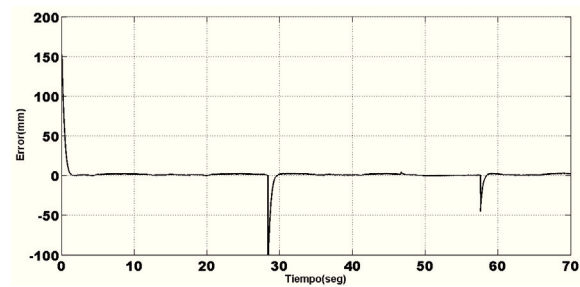
In this paper is reported a Mamdani type fuzzy controller based on sliding mode techniques applied to the regulation of a 2 DOF pneumatic parallel robot. It is proved that the system is stable in Lyapunov sense, and numerical and experimental results are reported. Moreover, the designed controller can be applied to tracking control if speed and acceleration from the system are feedbacked. Also are reported satisfactory experimental results for the tracking case.



(a) Seguimiento de trayectoria.



(b) Acción de voltaje



(c) Error de posición

Figura 8: Respuesta del actuador neumático correspondiente al ángulo de cabeceo ante cambio de referencia en un experimento real.

#### Keywords:

Fuzzy control, Robot control, Lyapunov stability, Sliding mode.

#### Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado parcialmente gracias al apoyo del TecNM con los proyectos 5155.13-P, TIJ-ING-2012-120, 5424.14-P, 5627.15-P y 5424.14.15-PR.

#### Referencias

- Abdelsalam, M. M., Areed, M. F., 2012. Decoupled fuzzy sliding mode control for a synchronous motor speed control. *International Journal of Computer Applications* 47 (11), 29–35.
- Amer, A. F., Sallam, E. A., Elawady, W. M., 2011. Adaptive fuzzy sliding mode control using supervisory fuzzy control for 3 dof planar robot manipulators. *Applied Soft Computing* 11 (8), 4943–4953.
- Hurwitz, A., 1895. über die bedingungen unter welchen eine gleichung nur wurzeln mit negativen reellen teilen besitzt. *Mathematische Annalen* 46, 273–284.



- ISO-6358, 1989. Pneumatic fluid power - Components using compressible fluids - Determinations of flow-rate characteristics.
- Krivts, I. L., Krejnin, G. V., 2006. Pneumatic Actuating Systems for Automatic Equipment. Structure and Design. Taylor & Francis Group, New York.
- Lyapunov, A., 1892. The general problem of the stability of motion (in russian). Phd, Univ. Kharkov.
- Mamdani, E.H; Assilian, S., 1975. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. International Journal of Man-Machine Studies 7 (1), 1 – 13.
- Nazir, M. B., Wang, S., 2010. Optimized fuzzy sliding mode control to enhance chattering reduction for nonlinear electro-hydraulic servo system. International Journal of Fuzzy Systems 12 (4), 291–299.
- Routh, E. J., 1877. A treatise on the stability of a given state of motion: particularly steady motion. Macmillan and Company.
- Rubio, E., Hernández, L., Aracil, R., Saltarén, R., 2007. Modelado, Identificación y Control de Actuadores Lineales Electro-neumáticos. Aplicación en Plataforma de Dos Grados de Libertad. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, 4 (4), 58–69.
- Slotine, J. J., Li, W., 1991. Applied Nonlinear Control. Prentice Hall, New Jersey.
- Takagi, T., Sugeno, M., Jan 1985. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics SMC-15 (1), 116–132.
- Utkin, V., Guldner, J., Shi, J., 1999. Sliding Mode Control in Electromechanical Systems. Taylor & Francis, New Jersey.
- Van Damme, M., Vanderborght, B., Verrelst, B., Van Ham, R., Daerden, F., Lefeber, D., 2009. Proxy-based sliding mode control of a planar pneumatic manipulator. The International Journal of Robotics Research 28 (2), 266–284.