

Estabilidad de sistemas Takagi-Sugeno bajo perturbaciones persistentes: estimación de conjuntos inescapables

J.L. Pitarch^{a,*}, A. Sala^b, C.V. Ariño^c

^aDepartamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, EII, Universidad de Valladolid. C/ Doctor Mergelina s/n, 47011, Valladolid, ESPAÑA.

^bInstituto de Automática e Informática Industrial (ai²), Universitat Politècnica de València. Camino de Vera s/n, 46022, Valencia, ESPAÑA.

^cDepartamento de Ingeniería de Sistemas Industriales y Diseño, Universitat Jaume I. Av. de Vicent Sos Baynat s/n, 12071, Castellón de la Plana, ESPAÑA.

Resumen

El presente trabajo analiza el comportamiento de sistemas borrosos Takagi-Sugeno ante perturbaciones persistentes (caracterizadas bien por cotas conocidas de amplitud o de potencia en media cuadrática). El análisis se centra en validar que, ante una determinada cota de potencia de perturbaciones y región de condiciones iniciales, existe una región inescapable (contenida en la región donde el modelo TS es válido como modelo de un sistema no lineal subyacente). Algunos de los problemas planteados se formulan como problemas de desigualdades matriciales lineales (LMI), posibles de resolver de forma óptima por programación semidefinida, y otros serán productos de matrices variables de decisión y dos escalares (BMI), que son resueltos de forma iterativa.

Copyright © 2015 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L.U. Todos los derechos reservados.

Palabras Clave:

Takagi-Sugeno, Rechazo a perturbaciones, Conjunto inescapable, Estabilidad local, LMI, Perturbaciones persistentes.

1. Introducción

Los sistemas borrosos Takagi-Sugeno (TS) son ampliamente utilizados hoy en día para modelar localmente procesos no lineales, debido a que existe una metodología sistemática de hacerlo (Tanaka y Wang, 2001) utilizando la técnica denominada “sector nonlinearity” en la literatura en lengua inglesa. Mediante dicha técnica se obtienen modelos TS equivalentes al no lineal en una región de interés compacta Ω . La teoría de estabilidad de Lyapunov es, una vez dichos modelos han sido calculados, la herramienta más utilizada para probar estabilidad local del sistema no lineal original. Para ello se prueba estabilidad global del sistema Takagi-Sugeno utilizando desigualdades matriciales lineales (Wang et al., 1996), que denotaremos con el acrónimo LMI ampliamente establecido en la literatura. El enfoque es extremadamente interesante y prolífico dando lugar a múltiples contribuciones sobre estabilidad de sistemas borrosos con LMI; se remite al lector a los libros (Tanaka y Wang, 2001; Matía et al., 2014), a los artículos de revisión (Guerra et al., 2009; Sala, 2009; Feng, 2006) y las referencias allí contenidas.

Con las soluciones de las LMI, se obtienen estimados del dominio de atracción del origen, basados en las curvas de nivel

de la función de Lyapunov (Khalil, 2002). Trabajos recientes discuten cómo reducir diversas fuentes de conservadurismo en la estimación de dominios de atracción (Chesi, 2011; Pitarch et al., 2012; Hancock y Papachristodoulou, 2013; Pitarch et al., 2014). El concepto de estabilidad y dominio de atracción, no obstante, se aplica únicamente a sistemas sin perturbaciones.

Cuando los sistemas están sujetos a entradas de perturbación, usualmente se plantean condiciones LMI garantizando una norma-2 (integral del cuadrado) acotada de ciertas salidas de interés respecto a la norma-2 de la entrada si dicha norma está acotada (Scherer y Weiland, 2004, Cap.3). Aunque dicha caracterización de la atenuación de perturbaciones tiene importantes interpretaciones (\mathcal{H}_∞ , robustez, etc.), no obstante, si la dinámica es rápida, señales de norma-2 pequeña pueden tener una amplitud grande (si decaen rápidamente). Ello no es problema en modelos globales pero, como un modelo TS deja de ser válido si se abandona la región Ω , para asegurar que un diseño de este tipo es válido debe garantizarse que la energía de las perturbaciones no es suficiente para hacerle abandonar dicha región.

Las cuestiones arriba mencionadas sobre perturbaciones no están abordadas en demasiado detalle en la literatura de análisis no lineal y de sistemas borrosos TS en particular. El concepto de dominio de atracción cuando no hay perturbaciones debe ser cambiado al de *conjunto inescapable* en caso de que éstas estén presentes. El trabajo preliminar de los autores Salcedo, Martínez, y García-Nieto (2008) discute el rechazo (sub)-ópti-

* Autor en correspondencia

Correos electrónicos: jose.pitarch@autom.uva.es (J.L. Pitarch), asala@isa.upv.es (A. Sala), arino@uji.es (C.V. Ariño)

mo de perturbaciones para acotar la norma infinito (máximo de la respuesta temporal) de ciertas salidas cuando lo está el pico de amplitud de la entrada, con una interpretación generalizando el concepto de control \mathcal{L}_1 de sistemas lineales (Bhattacharyya et al., 1995; Tadeo y Grimble, 2002) a los sistemas borrosos. Las condiciones iniciales, no obstante, deben ser supuestas en el origen.

En el trabajo de Wang y Liu (2013) se plantea un análisis local para sistemas TS sujetos a perturbaciones con magnitud acotada o energía finita en donde, además de las condiciones \mathcal{H}_{∞} habituales, se incluyen condiciones para asegurar que ciertos conjuntos son invariantes. Recientemente, Klug et al. (2015) han abordado también dicha problemática para el caso discreto, planteando problemas de optimización (convexa) para dar un estimado del mínimo conjunto alcanzable o una cota de la ganancia en norma-2 entre la entrada de perturbación y la salida controlada. Sin embargo, este trabajo no considera perturbaciones persistentes.

El presente trabajo pretende generalizar las ideas anteriores sobre dominio de atracción y condiciones iniciales, buscando obtener, para el caso de modelos borrosos Takagi-Sugeno, soluciones a los problemas de:

1. Consideración de perturbaciones de potencia RMS acotada en un intervalo de tiempo T dado.
2. Estimación del mínimo conjunto inescapable.
3. Cálculo del conjunto de condiciones iniciales máximo para asegurar que la zona de modelado Ω es inescapable.

Todos los problemas están relacionados y se abordarán con una perspectiva unificada, dado que hay compromisos inherentes.

Por ejemplo, en el segundo caso, si el conjunto inescapable calculado es significativamente menor que la zona de modelado Ω , debería remodelarse el sistema: cuanto más pequeña es la zona de modelado Ω más “estrechos” son los vértices del modelo TS obtenido, y más “lineal” es el comportamiento: remodelar permitirá mejorar las prestaciones garantizadas (y reducir aun más el conjunto inescapable mínimo probado).

En el caso contrario en el que el conjunto inescapable calculado sea mayor que Ω el resultado ya no es válido (el estado puede abandonar la zona donde el modelo es válido). Agrandar Ω permitirá incluir el conjunto inescapable, pero se introduce más incertidumbre y complejidad (Pitarch et al., 2012), con lo que puede darse el caso de que tampoco pueda encontrarse una solución: en efecto, en un sistema no-lineal existen perturbaciones por encima de una cierta cota que pueden inestabilizar un punto de equilibrio localmente estable.

Este trabajo trata de abordar de forma rigurosa los anteriores problemas en el marco de los modelos TS. Una aproximación preliminar a dicha problemática aparece en el artículo de conferencia de los autores (Pitarch et al., 2013).

La estructura del trabajo es la siguiente: la próxima Sección discute conceptos preliminares y el plantearimiento del problema, la Sección 3 discute el resultado central sobre una desigualdad de Lyapunov para perturbaciones persistentes, y define tres conjuntos (inicial, transitorio y estacionario o final) clave en el análisis de los problemas arriba considerados, en la Sección 4 se

resuelven distintas instancias del problema para el caso particular de los sistemas borrosos Takagi-Sugeno con perturbaciones y se plantean una serie de condiciones LMI o BMI (LMI mas exploración en 2 parámetros) y algoritmos adaptados a cada caso. Para terminar, un ejemplo y una sección de conclusiones pone el punto final al trabajo.

2. Preliminares

Considérese el siguiente sistema no lineal:

$$\dot{x} = f(x) + e(x)w \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado y $w \in \mathbb{R}^c$ es un vector de perturbaciones externas¹. Se asumirá que $f(0) = 0$ y que tiene primeras derivadas parciales continuas.

Considérese una región de modelado Ω compacta que incluya al origen. Entonces, empleando la bien conocida técnica de modelado borroso por sector no-lineal (en inglés “sector non-linearity approach” (Tanaka y Wang, 2001)), se puede obtener un modelo borroso Takagi-Sugeno del sistema (1) en la forma:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \mu_i(x) (A_i x + E_i w) \quad (2)$$

donde $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $E_i \in \mathbb{R}^{n \times c}$ son los modelos lineales vértice, $\mu_i(x)$ son sus correspondientes funciones de pertenencia no lineales y r es el número de reglas borrosas. Las funciones de pertenencia pertenecen a $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{R}^r : \sum_{i=1}^r \mu_i = 1, \mu_i \geq 0 \forall i\}$.

Cabe destacar que el anterior modelo TS (2) es *exacto* en la región de modelado Ω , i.e., (2) representa de forma totalmente fiel al sistema (1) en dicha región (Tanaka y Wang, 2001). Como ejemplo, un proceso $\dot{x} = -\sin(x) + w$ puede expresarse como $\dot{x} = (\sin(x)/x) \cdot x + w$ y, considerando $\Omega = [-1, 1]$, como el máximo de $\sin(x)/x$ es 1 y el mínimo es 0.844, escribiendo $\sin(x)/x$ como una interpolación entre los extremos tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\mu_1(x) \cdot 1 + \mu_2(x) \cdot 0.844)x + w \\ \mu_1(x) + \mu_2(x) &= 1, \quad \forall x \in \Omega \end{aligned} \quad (3)$$

Existen metodologías de análisis de estabilidad y de cálculo de cotas a normas del sistema (2) en la literatura, usando LMIs con una función de Lyapunov cuadrática en el estado $V(x) = x^T P x$ (Ksontini et al., 2003; Chen et al., 2007; Salcedo et al., 2008), o con funciones no-cuadráticas (Jaadari, 2013; Johansson et al., 1999).

La localidad en el proceso de modelado plantea, no obstante, determinadas cuestiones en el análisis de estabilidad del sistema no lineal original (1). La trayectoria de (1) sin perturbaciones, con condiciones iniciales x_0 , se denominará como $x(t) =$

¹Dado que el presente trabajo aborda análisis de estabilidad, el objetivo será analizar el comportamiento ante perturbaciones del sistema (1) mediante técnicas borrosas. El diseño óptimo de reguladores, contemplando los desarrollos de en este trabajo, para sistemas $\dot{x} = f(x) + g(x)u + e(x)w$, será objeto de trabajos posteriores. Obviamente, la estabilidad con un controlador conocido $u(x)$ sí puede abordarse directamente con los resultados aquí propuestos.

$\psi(t, x_0)$. Obviamente, si $x(t) \in \Omega \forall t$, coincidirá con las trayectoria de (2), que denotaremos como $x(t) = \psi(t, x_0, \mu(x(t)))$. Como en gran parte de la literatura de control borroso, se tratará de dar propiedades de todas las posibles trayectorias de (2), esto es, $x(t) = \psi(t, x_0, \mu(t))$ para todo posible $\mu(t) \in \Gamma$. De este modo:

- La estabilidad global de (2) sólo implica estabilidad *local* de (1).
- Las condiciones iniciales x_0 deben estar dentro de Ω .
- Las trayectorias $\psi(t, x_0)$ no deben abandonar Ω .

En el caso de sistemas sin perturbaciones, estas cuestiones requieren que se disponga de una metodología para determinar el *dominio de atracción* \mathcal{D} del sistema (1), $\mathcal{D} = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t, x_0) = 0\}$. En un sistema borroso, teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, procede la siguiente definición para todas las posibles trayectorias de (2).

Definición 1. *El Dominio de Atracción Robusto Local (DARL) del sistema (2), referido a una región Ω , se define como el conjunto de condiciones iniciales \mathcal{D}_Ω que cumple:*

$$\mathcal{D}_\Omega = \left\{ x_0 \in \Omega : \begin{array}{l} \psi(t, x_0, \mu) \in \Omega \forall t \geq 0, \forall \mu \in \Gamma \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t, x_0, \mu) = 0, \forall \mu \in \Gamma \end{array} \right\} \quad (4)$$

El término “robusto” en la definición se debe al hecho de que, con modelos TS, \mathcal{D}_Ω tiene que considerar “todas” las posibles μ en el simplex Γ y no únicamente las particulares, probablemente no lineales, $\mu(x)$ que realmente certifican la equivalencia exacta con el sistema no lineal. Esta consideración permite utilizar las técnicas de modelado borroso, pagando el precio de obtener resultados más conservadores debido a la “independencia de la forma” (Sala, 2009). De hecho, basándose en lo anterior, como (2) incluye a (1) en Ω (junto con muchos otros sistemas), entonces $\mathcal{D}_\Omega \subset \mathcal{D}$, es decir, encontrando el DARL de un modelo borroso TS hemos encontrado un estimado interior del dominio de atracción de (1).

Es bien conocido que las curvas de nivel de la función de Lyapunov $V_c = \{x : V(x) \leq c\}$ pertenecen al DARL si $V_c \subset \Omega$, $V > 0$, $\dot{V} < 0 \forall x \in \Omega \sim \{0\}$ (Slotine, 1991). En (Pitarch et al., 2012) se presenta una metodología que permite ampliar el estimado del dominio de atracción a un nivel c de la forma $V_c \cap \Omega$ donde $V_c \not\subset \Omega$. En (Pitarch et al., 2014) se presenta una metodología iterativa basada en sumas de cuadrados para ampliarlo todavía más.

El caso de sistemas con perturbaciones está menos abordado en la literatura de sistemas borrosos. En dicho caso, se debe cambiar el objeto de estudio del DARL a los *Conjuntos Robustamente Inescapables* (CRI):

Definición 2. *Dado un modelo borroso (2) en una región Ω y un conjunto de perturbaciones posibles \mathcal{W} , un conjunto $\Theta \subset \Omega$ es robustamente inescapable a partir de un conjunto de condiciones iniciales Θ_i si cumple:*

$$x(t) \in \Theta \quad \forall x(0) \in \Theta_i, \forall w \in \mathcal{W}, \forall \mu \in \Gamma \quad (5)$$

Obviamente, dependiendo del tamaño de Ω y \mathcal{W} podría no existir ningún CRI si, para alguna condición inicial, existe alguna perturbación capaz de “sacar” a la trayectoria del sistema de Ω desde dicha condición inicial.

Cuando las perturbaciones están acotadas en norma- p , esto es, $\mathcal{W} = \{w : \|w\|_p \leq 1\}$ y Ω también está definido de forma similar² $\Omega = \{x : \|x\|_\infty \leq 1\}$ (donde la norma infinita denota el máximo de los componentes), el problema puede entenderse de forma abstracta como comprobar si se puede acotar la norma inducida $\mathcal{L}_p \rightarrow \mathcal{L}_\infty$. Se tienen resultados en sistemas lineales (Boyd et al., 1994; Abedor et al., 1996; Palhares y Peres, 2000) para las normas $p = 2$ (integral del cuadrado, “energy-to-peak”), $p = \infty$ (cota máxima de la perturbación, “peak-to-peak”) y $p = 1$ (integral de valor absoluto). El diseño de controladores que minimicen la norma \mathcal{L}_1 (peak-to-peak) para sistemas continuos no se puede expresar en términos de LMIs (Abedor et al., 1996). En el citado trabajo, en lugar de minimizar la norma \mathcal{L}_∞ inducida, se minimiza la norma-*: la mejor cota superior de la norma \mathcal{L}_∞ inducida obtenible acotando el conjunto inescapable por elipsoides, mediante la resolución de un problema LMI o BMI, dependiendo del sistema en particular.

La literatura sobre conjuntos inescapables en el ámbito borroso es escasa. Básicamente, los autores sólo tienen constancia de los trabajos de Salcedo et al. (2008); Wang y Liu (2013) y Klug et al. (2015). El primero aborda el rechazo de perturbaciones persistentes con un pico máximo de amplitud ($w^T w \leq \gamma$), generalizando el trabajo de Abedor et al. (1996) al caso borroso, mientras que los restantes dos abordan también el caso de perturbaciones de energía finita ($\int_0^\infty w^T w dt \leq \gamma$).

Nótese que el estudio de estabilidad y dominio de atracción puede ser, en algunos casos, abordado mediante simulación (Genesio et al., 1985). Sin embargo, el garantizar conjuntos inescapables mediante simulaciones no es una tarea fácil, dado que es difícil calcular o “acertar” con las condiciones iniciales particulares y la señal $w(t)$ exacta que constituyen el peor caso en un sistema no lineal. Este peor caso suele ser muy diferente de las simulaciones con perturbaciones aleatorias que en promedio cancelan sus efectos.

2.1. Planteamiento del problema

El objetivo del presente artículo es generalizar los trabajos arriba mencionados incluyendo en \mathcal{W} a perturbaciones de potencia acotada.

En concreto, hablaremos de potencia RMS acotada (entendida como norma acotada durante un cierto periodo de tiempo T), esto es:

$$\int_t^{t+T} w(t)^T w(t) dt \leq \beta \quad \forall t \geq 0 \quad (6)$$

El valor de T se supondrá constante, fijado *a priori* en base a conocimiento sobre el proceso controlado. Existen dos casos límites de interés: (a) amplitud acotada $\|w(t)\|^2 \leq \gamma$, como caso

²Obviamente, con los adecuados escalados, no hay pérdida de generalidad en asumir que la cota es la unidad.

límite cuando $T \rightarrow 0$ y (b) la norma-2 cuando $T \rightarrow \infty$, que se detallarán posteriormente.

En particular, se desea analizar la estabilidad y el comportamiento dinámico del sistema ante dichas perturbaciones, abordando los siguientes problemas:

1. Calcular un estimado del mínimo conjunto inescapable, ante condiciones iniciales en una zona prefijada, denotada como Θ_i , y una cierta cota β .
2. El conjunto de condiciones iniciales Θ_i más grande que asegure la inescapabilidad de Ω y, por tanto, la validez del modelo TS. Cuando la cota β es nula, dicho conjunto de condiciones iniciales será, obviamente, un estimado del dominio de atracción.
3. Estimar la potencia máxima admisible de una posible perturbación que garantice la estabilidad del sistema (inescapabilidad de Ω), dado Θ_i .

Otros resultados de rechazo de perturbaciones en literatura contemplan acotar la norma 2 de ciertas salidas, $y(t)$, como las aplicaciones \mathcal{H}_∞ a casos TS (véase Tanaka y Wang (2001); Liu y Zhang (2003)), pero no consideran regiones de inescapabilidad. A la inversa, en este trabajo, no consideramos cotas de la integral de las salidas, sino limitar su valor instantáneo a una zona. Las LMIs de atenuación \mathcal{H}_∞ , que derivan de minimizar κ sujeto a $\dot{V} + y^2 - \kappa w^2 \leq 0$ podrían ser fácilmente combinadas con las condiciones propuestas en el presente trabajo, si se considerara oportuno en una cierta aplicación.

3. Conjuntos inescapables bajo perturbaciones persistentes

En esta sección se presenta el análisis de estabilidad para sistemas no lineales bajo perturbaciones persistentes de un cierto tipo, cuya característica principal es que proporcionan una potencia RMS limitada durante un cierto periodo de tiempo especificado *a priori*.

Teorema 1. *Asúmase, para el sistema (1), que la perturbación cumple la condición (6) para un periodo temporal T conocido, y que existe una función no negativa del estado $V(x(t))$ que cumple:*

$$\dot{V}(x(t)) + \alpha V(x(t)) - w(t)^T w(t) \leq 0 \quad (7)$$

Entonces, existe un régimen estacionario final donde se verifica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) \leq \frac{\beta}{1 - e^{-\alpha T}} \quad (8)$$

y, durante el transitorio desde una condición inicial $V(0)$, la función $V(t)$ puede ser acotada por:

$$V(t) \leq \max(V(0) + \beta, \frac{\beta}{1 - e^{-\alpha T}}) \quad \forall t \geq 0 \quad (9)$$

Demostración. Considérese la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\dot{V}(t) + \alpha V(t) - w(t)^T w(t) = -g(t)$$

donde en todo instante $g(t) \geq 0$, por (7). Su solución, con condición inicial $V(0)$, es (Murphy, 2011):

$$V(t) = e^{-\alpha t} V(0) + \int_0^t (w(\tau)^T w(\tau) - g(\tau)) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau$$

Como g no es negativa, $V(t)$ puede acotarse, considerando el mayor N tal que $NT < t \leq (N+1)T$, según la expresión:

$$\begin{aligned} V(t) &\leq e^{-\alpha t} V(0) + \int_0^T w(\tau)^T w(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau + \\ &\quad \int_T^{2T} w(\tau)^T w(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau + \dots + \int_{NT}^t w(\tau)^T w(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (10)$$

En el último sumando, como $\tau \leq t$, la exponencial se puede acotar por la unidad de modo que la integral entre NT y t se puede acotar por β . Asimismo, acotando de forma similar la exponencial, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{kT}^{(k+1)T} w(\tau)^T w(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau &\leq \\ e^{-\alpha(t-(k+1)T)} \cdot \int_{kT}^{(k+1)T} w(\tau)^T w(\tau) d\tau &\leq e^{-\alpha(N-k)T} \cdot \beta \end{aligned} \quad (11)$$

De esta manera, después de algunas manipulaciones sencillas, se obtiene una cota de la parte derecha de (10):

$$V(t) \leq e^{-\alpha t} V(0) + (1 + e^{-\alpha T} + \dots + e^{-\alpha NT}) \beta \quad (12)$$

Y como $t > NT$

$$V(t) \leq e^{-\alpha NT} V(0) + (1 + e^{-\alpha T} + \dots + e^{-\alpha NT}) \beta = \psi_N \quad (13)$$

Nótese que a medida que N progresá, la cota del lado derecho de la desigualdad, denotada como ψ_N , es la salida de la ecuación en diferencias de primer orden *discreta* con condición inicial $\psi_0 = V(0) + \beta$:

$$\psi_{N+1} = e^{-\alpha T} \psi_N + \beta$$

Por tanto es una respuesta monótona creciente o decreciente dependiendo de la condición inicial (se trata, al fin y al cabo de una respuesta ante escalón de primer orden ante condiciones iniciales no nulas, bien estudiada en múltiples textos básicos). Si el valor inicial ψ_0 es mayor que el valor de estado estacionario $\psi_\infty = \frac{\beta}{1 - e^{-\alpha T}}$, entonces la cota máxima será el valor inicial $\psi_0 = V(0) + \beta$; en otro caso la cota máxima será el valor estacionario ψ_∞ . A partir de esto, se puede establecer (8) y (9). \square

A la función $V(x)$ le denominaremos función de Lyapunov, con un cierto abuso –usual, de todos modos, en la literatura, dado que, estrictamente, las funciones de Lyapunov fueron definidas por éste para análisis de estabilidad de sistemas *sin* perturbaciones.

Nótese que, de la anterior demostración, el valor de $V(0)$ que cambia la respuesta de creciente a decreciente será

$$V(0) + \beta = \frac{\beta}{1 - e^{-\alpha T}}$$

lo que conduce al siguiente resultado.

Corolario 1. Si se verifica³

$$V(0) \leq \frac{\beta}{1 - e^{-\alpha T}} - \beta = \frac{e^{-\alpha T}\beta}{1 - e^{-\alpha T}} \quad (14)$$

entonces el sistema no abandonará el conjunto inescapable final dado por (8). En caso contrario, podría llegar a $V(t) = V(0) + \beta$ (en particular, recibiendo una entrada impulso $\delta(t)$, de integral igual a β , que es compatible con (6) y es, intuitivamente, el peor caso).

Corolario 2 (Casos particulares). A partir del teorema, se pueden recuperar cotas y condiciones obtenidas en literatura anterior. En particular:

1. Perturbaciones acotadas en norma: si $\|w\|_2 \leq \beta$, el teorema anterior, haciendo $T \rightarrow \infty$, resulta en

$$V(t) \leq V(0) + \beta$$

Si $V(0) = 0$, la cota $V \leq \beta$ en este caso aparece en (Boyd et al., 1994, Cap. 6.1.1).

2. Perturbaciones acotadas en pico: si $w^T w \leq \gamma$, el teorema anterior, haciendo $\beta = \gamma T$ y $T \rightarrow 0$, resulta en

$$V(t) \leq \max(V(0), \frac{\gamma}{\alpha}) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) \leq \frac{\gamma}{\alpha}$$

de modo que, con $V(0) = 0$ se tiene la cota en (Boyd et al., 1994, Cap. 6.1.3) y (Salcedo et al., 2008, Teorema 5.1).

Demostración. La demostración de la primera afirmación es evidente, y la segunda también tomando en consideración que $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\gamma T}{1 - e^{-\alpha T}} = \frac{\gamma}{\alpha}$. \square

Como conclusión de la sección, se observa que, dado un conjunto inicial $\Theta_i = \{V \leq V(0)\}$, el resultado anterior define dos conjuntos importantes (ver Figura 1) en el análisis de sistemas no lineales con perturbaciones:

- un “conjunto inescapable transitorio” Θ_t de (9) en el cual se garantiza que el estado nunca va a salirse en ningún instante,
- un “conjunto inescapable estacionario final” Θ_f de (8), $\Theta_f \subset \Theta_t$, donde el estado va a llegar y permanecer sin escapar finalmente (una vez transcurrido un tiempo suficientemente largo), cuyo cómputo es independiente de $V(0)$.

Obviamente, $\Theta_i \subset \Theta_t$ y $\Theta_f \subset \Theta_t$, pero no existe relación de inclusión necesariamente entre Θ_f y Θ_i ya que Θ_f no depende de las condiciones iniciales.

Definidos los anteriores conjuntos, se pueden plantear algunos problemas de optimización sobre los mismos. Véase la siguiente sección.

³Un caso ampliamente considerado que verifica (14) en la literatura es comenzar en el origen antes de que las perturbaciones actúen, $x(0) = 0$, $V(0) = 0$.

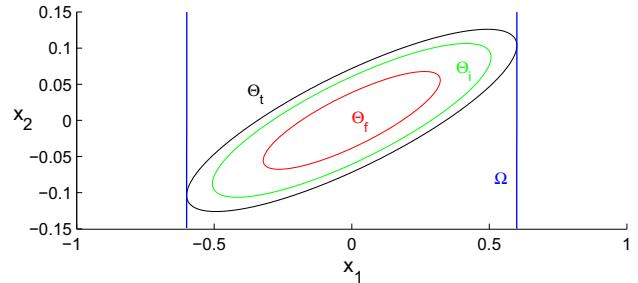


Figura 1: Regiones “inicial” Θ_i , “final” Θ_f y “transitoria” Θ_t , región de modelado Ω .

4. Análisis de modelos borrosos Takagi-Sugeno con perturbaciones

El Teorema 1 se puede aplicar a cualquier sistema no-lineal. No obstante, en sistemas borrosos Takagi-Sugeno, las condiciones (7), (8) y (9) podrán ser especificadas en forma LMI o BMI, con lo que se podrá dar una metodología sistemática de cálculo de dichos conjuntos (con cierto conservadurismo respecto al caso no-lineal genérico, obviamente). Éste es el objetivo de esta sección.

Debido a que los modelos borrosos, calculados mediante la técnica “sector-nonlinearity”, son únicamente válidos de forma local en una región de modelado Ω , los anteriores conjuntos Θ_i , Θ_t no deben abandonar Ω . Así, el Teorema 1 puede ser enunciado, de forma local, como sigue a continuación.

Teorema 2. Dado un conjunto inicial Θ_i , si existe una función $V(x)$ y un nivel de la misma V_0 que satisfacen

$$\Theta_i \subset \{x : V(x) \leq V_0\} \quad (15)$$

$$\{x : V(x) \leq V_0 + \beta\} \subset \Omega \quad (16)$$

$$\{x : V(x) \leq \frac{\beta}{1 - e^{-\alpha T}}\} \subset \Omega \quad (17)$$

$$\dot{V}(x) + \alpha V(x) - w^T w \leq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (18)$$

entonces el sistema (1) no abandona Ω si las condiciones iniciales están en Θ_i y, finalmente, alcanza un régimen estacionario donde no abandona el conjunto definido por la equipotencial $\Theta_f = \{x : V(x) \leq \frac{\beta}{1 - e^{-\alpha T}}\}$.

Demostración. La condición (18) asegura que el conjunto final sea $\Theta_f = \{x : V \leq \frac{\beta}{1 - e^{-\alpha T}}\}$ por el Teorema 1. La condición (15) asegura que la equipotencial de Lyapunov V_0 incluya a la región de condiciones iniciales Θ_i . La condición (16) asegura que la región $\{x : V(x) \leq V_0 + \beta\}$ esté contenida en la región de modelado y la condición (17) asegura que la región $\{x : V \leq \frac{\beta}{1 - e^{-\alpha T}}\}$ esté también contenida en dicha región de modelado. Entonces, las condiciones (16) y (17) juntas implican que el conjunto definido en (9) está incluido en Ω . \square

Con el teorema anterior, se garantiza que la región transitoria Θ_t está contenida en Ω . Entonces, suponiendo que Ω es la región donde un modelo borroso TS es válido para representar al sistema (1), el objetivo de esta sección es particularizar las condiciones del Teorema 2 a los sistemas (2).

Observación 1. Nótese que, para modelos globales, las condiciones (16)–(17) relacionadas con Ω deberían omitirse y la condición (18) debe cumplirse para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Para sistemas inicialmente en equilibrio, la condición (15) también debería despreciarse, dado que $\Theta_i = \{0\}$ y sustituir $V_0 = 0$ en (16).

El teorema anterior sigue siendo válido para cualquier proceso no lineal. Enunciamos ahora algunos problemas interesantes a los cuales se puede aplicar el Teorema 2, considerando el caso particular de modelos borrosos (2), y funciones de Lyapunov cuadráticas $V(x) = x^T Px$. De ese modo, los conjuntos involucrados son elipsoidales y las condiciones del teorema podrán ser expresadas como problemas de valores propios y desigualdades matriciales.

4.1. Condiciones iniciales nulas

Considérese, en primer lugar, el caso de condiciones iniciales nulas $\Omega_i = \{0\}$ y una región de modelado Ω definida⁴ como una bola de radio ρ

$$\Omega = \{x : x^T x \leq \delta\} \quad (19)$$

donde $\delta = \rho^2$.

Corolario 3 (Conjunto estacionario final). *Si existe una función candidata de Lyapunov $V(x) = x^T Px$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que cumpla*

$$P > \epsilon_1 I \quad (20)$$

$$P > \left(\frac{\beta}{1 - e^{-\alpha T}}\right)\delta^{-1} I \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} PA_i + A_i^T P + \alpha P & PE_i \\ E_i^T P & -I \end{pmatrix} + \epsilon_2 I < 0 \quad i : 1, \dots, r \quad (22)$$

donde $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$ son tolerancias definidas por el usuario⁵, entonces el sistema (1) no abandona Ω si las condiciones iniciales están en $\Theta_i = \{x : V \leq \frac{e^{-\alpha T}\beta}{1 - e^{-\alpha T}}\}$ y, además, nunca abandona tampoco la región $\Theta_f = \{x : V \leq \frac{\beta}{1 - e^{-\alpha T}}\}$.

Demostración. Las condiciones (22) aseguran (18) y, junto con (20), comprueban que $V(x)$ es función de Lyapunov del sistema (1) localmente en Ω por el Teorema 2. La condición (21) asegura (17). Si las condiciones iniciales están en $\Theta_i \subset \{x : V \leq \frac{e^{-\alpha T}\beta}{1 - e^{-\alpha T}}\}$, entonces $V_0 \leq \frac{\beta}{1 - e^{-\alpha T}} - \beta$ y la condición (17) será siempre más restrictiva que (16) en el Teorema 2. Por lo tanto, las condiciones (15) y (16) son innecesarias en el corolario. \square

Nótese que las condiciones anteriores no son LMI debido al producto αP . Por tanto deberían resolverse, de forma general, como problemas de optimización no convexa. No obstante, es bien conocido que fijando α , dichos problemas pueden ser resueltos vía herramientas de programación convexa; por ello, la

⁴Regiones de modelado más generales (elipsoidales, intersección de elipsoides o politópicas) podrían considerarse con mínimas modificaciones muy simples, adaptando las condiciones en (Boyd et al., 1994) al caso en estudio. Por ejemplo, para $\Omega = \{x : |x|^2 - x_1^2\}$, sustituyendo la matriz identidad en (21) por $[1 \ 0; 0 \ 0]$. Se emplaza al lector a consultar (Boyd et al., 1994) para más detalles, omitidos por brevedad.

⁵Con el objetivo de asegurar positividad (o negatividad) estricta de matrices en las implementaciones numéricas.

solución óptima, en base a algún criterio, requiere la aplicación de estrategias de bisección o exploración en α , resolviendo el problema de forma iterativa (ver detalles sobre problemas de valores propios generalizados GEVP en (Boyd et al., 1994; Tanaka y Wang, 2001)).

El corolario 3 permite resolver distintos problemas de interés en el análisis de sistemas borrosos bajo perturbaciones.

Potencia de perturbación máxima. Se puede maximizar la potencia de perturbación β , para asegurar que una región prefijada Ω es inescapable partiendo de condiciones iniciales de equilibrio (realmente, desde un pequeño conjunto alrededor del origen cuyo tamaño depende de β). Este es un problema cuasi convexo que se resuelve con exploración en α .

Acotación óptima del conjunto alcanzable por las perturbaciones. En este caso, se trataría de minimizar el tamaño de la región inescapable Ω (en particular, minizar ρ) para unas características de perturbación β , T dadas. Este problema se resuelve explorando en α y maximizando $\psi = \delta^{-1} = \rho^{-2}$ para cada α .

Observación 2. Si $\Theta_i = 0$, la región de interés viene dada por la ecuación de salida $\Omega = \{x : x^T C^T C x \leq \gamma^2\}$ y la perturbación está acotada instantáneamente ($T \rightarrow 0$) por $w^T w \leq \beta$, se obtienen los elipsoides inescapables y las cotas descritas en (Salcedo et al., 2008).

Debido a la posibilidad de remodelar el sistema no lineal original para obtener un mejor modelo borroso (por ejemplo, si el elipsoide inescapable probado no tiene un tamaño similar a la zona de modelado propuesta Ω), para obtener el estimado menos conservador sobre el sistema original se propone un procedimiento iterativo que se detalla a continuación.

La idea clave de la propuesta es empezar analizando los conjuntos inescapables obtenidos mediante el modelo linealizado del sistema (1) en el origen (con lo que la zona de modelado inicial, denotada como $\Omega^{[1]}$ es, de hecho, infinitesimalmente pequeña) y, posteriormente, seguir un procedimiento iterativo de calcular un conjunto $\Theta_f^{[k]}$ y remodelar el sistema para $\Omega^{[k+1]} = \Theta_f^{[k]}$, repitiendo hasta alcanzar convergencia $\Theta_f^{[k]} \subset \Omega^{[k]}$ o no factibilidad del problema. Esta idea se formaliza en el algoritmo descrito a continuación.

Algoritmo 1. Estimación del mínimo conjunto alcanzable desde el origen para un sistema no lineal mediante técnicas TS:

1. Calcular el modelo linealizado $\dot{x} = Ax + Ew$ en $x = 0$ y tomar $k = 1$, $\Omega^{[1]} = 0$.
2. Resolver el siguiente problema cuasi-LMI (LMI + exploración en α ; β y T fijados):

Maximizar $\psi = \delta^{-1}$ sujeto a (20), (21) y (22)
3. Si el problema del paso 2 no es factible, terminar el algoritmo, sin poder probar estabilidad (esto es, existencia de un conjunto inescapable acotado) del sistema (1).
4. Si el problema del paso 2 es factible, obtener $\Theta_f^{[k]} = \{x : V \leq \frac{\beta}{1 - e^{-\alpha T}}\}$. Entonces, si $\Theta_f^{[k]} \subset \Omega^{[k]}$, el algoritmo termina con éxito, y $\Theta_f^{[k]}$ es el mínimo conjunto final encontrado. Si $\Theta_f^{[k]} \notin \Omega^{[k]}$ ir al paso siguiente.

5. Hacer $\Omega^{[k+1]} = \Theta_f^{[k]} * (1 + v)$, esto es, el conjunto de modelado igual al conjunto inescapable anterior escalado por un factor ligeramente superior a uno (fijar v positivo suficientemente pequeño, cuanto más pequeño, mayor número de pasos y mejor precisión del resultado). Obtenir un nuevo modelo TS (2) del sistema (1) en dicha región, con diferentes A_i , E_i . Hacer $k = k + 1$ y volver al paso 2.

4.2. Condiciones iniciales no nulas

A continuación, se discutirán las modificaciones resultantes de considerar un conjunto de condiciones iniciales distinto del origen. Considérese un conjunto de condiciones iniciales definido por una bola de radio ρ_0 , definiendo $\delta_0 = \rho_0^2$ en:

$$\Theta_i = \{x : x^T x \leq \delta_0\} \quad (23)$$

Obviamente, el caso más sencillo es si, con los resultados de la sección 4.1, el conjunto Θ_i es suficientemente pequeño para verificar $\Theta_i \subset \{x : V \leq \frac{e^{-\alpha T} \beta}{1 - e^{-\alpha T}}\}$. En ese caso, los conjuntos inescapables son idénticos a los obtenidos empezando desde el origen. En caso que la citada inclusión pudiera no ser cierta, el siguiente resultado particulariza el Teorema 2 al caso borroso TS.

Corolario 4 (Conjunto inescapable desde condiciones iniciales prefijadas Θ_i). *Si existe una matriz P y escalares positivos γ , δ_0 , δ , que verifican*

$$P > \epsilon_1 I \quad (24)$$

$$P < \delta_0^{-1} I \quad (25)$$

$$P > (1 + \gamma\beta)\delta^{-1} I \quad (26)$$

$$P > \left(\frac{\gamma\beta}{1 - e^{-\alpha T}}\right)\delta^{-1} I \quad (27)$$

$$\begin{pmatrix} PA_i + A_i^T P + \alpha P & PE_i \\ E_i^T P & -\gamma I \end{pmatrix} + \epsilon_{2i} I < 0 \quad i : 1, \dots, r \quad (28)$$

donde $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_{2i} > 0$ son como en el Corolario 3, entonces el sistema (1) no abandona Ω y el estado se mantendrá siempre dentro de $\Theta_f = \{x : V \leq \frac{\beta}{1 - e^{-\alpha T}}\}$ después de un tiempo suficientemente largo. La función $V(x)$ asociada para el Teorema 2 es $V(x) = \gamma^{-1} x^T Px = V_0 x^T Px$.

Demostración. Las condiciones (24) y (28) aseguran que $V(x)$ es función de Lyapunov del sistema (1) localmente en Ω , como en el Corolario 3. Entonces, las condiciones (25), (26) y (27) aseguran (15), (16) y (17) respectivamente. \square

Los problemas de interés que pueden resolverse mediante este corolario son:

Máxima potencia de perturbación. Se trataría de maximizar β para Ω y Θ_i prefijadas, obteniéndose entonces la máxima potencia de perturbación permitida para asegurar que las trayectorias del sistema se mantienen dentro de la región de modelado si comienzan en Θ_i . El problema es LMI con exploración en α .

Maximizar el conjunto de condiciones iniciales. Minimizando ϕ ($\phi = \delta_0^{-1}$) para un determinado β y Ω prefijados, se obtiene el máximo radio del conjunto Θ_i que asegura que el sistema no abandona Ω debido a las perturbaciones. El problema es, como el anterior, LMI con exploración en α .

Acotación del conjunto alcanzable. La tercera opción es minimizar ρ con β y Θ_i conocidas. Ello obtendría un estimado de la mínima región de modelado, i.e., mínimo conjunto inescapable, empezando desde un determinado conjunto de CI y con potencia de perturbaciones conocida.

Este tercer problema requeriría de exploración en dos parámetros (α y $\psi = \delta^{-1}$). Aunque podría ser concebible dicha implementación, en lugar de realizar esta tediosa exploración en 2 parámetros, este problema se considerará como de desigualdades matriciales bilineales (BMI), y se resolverá de forma iterativa con el procedimiento que se expone a continuación.

El procedimiento iterativo de resolución de BMI propuesto se basa en, a partir de una condición inicial fijada (de forma arbitraria o con algún criterio de factibilidad), resolver un problema convexo en cada iteración (Goh et al., 1994) obtenido por linealización. La idea básica es avanzar en la dirección del gradiente de la BMI con cada iteración (Kanev et al., 2004).

Suponiendo que en el problema original aparezca el producto de dos variables de decisión M y K , se propone linealizar dicho producto de la siguiente manera

$$MK = (M_0 + \Delta M)(K_0 + \Delta K) \approx M_0 K_0 + M_0 \Delta K + K_0 \Delta M \quad (29)$$

donde M_0, K_0 son los valores iniciales (o soluciones de la iteración anterior) y $\Delta M, \Delta K$ son sus respectivos incrementos, que serán las nuevas variables de decisión. En la linealización anterior, el término $\Delta M \cdot \Delta K$ ha sido despreciado intencionadamente para aproximar el problema BMI original en un problema LMI. Esta aproximación será aceptable en la práctica siempre y cuando los susodichos incrementos de variables sean suficientemente pequeños entre iteraciones.

En particular, para resolver el tercer problema solventando los productos αP y $\psi \gamma$, se ha diseñado el siguiente algoritmo⁶:

Algoritmo 2. *Mínimo conjunto inescapable desde CI lejos del origen.*

1. Identificar todas las variables de decisión del Corolario 4 que estén involucradas en productos bilineales, tal que en (29), i.e., $\gamma, \psi = \delta^{-1}, \alpha$ y P .
2. Tomar un valor inicial de estas, $\gamma^{[0]}, \psi^{[0]}, \alpha^{[0]}$ y $P^{[0]}$, para la primera iteración ($k = 0$).
3. Sustituir γ, ψ, α y P en (24)–(28) por su expresión en notación incremental (por ejemplo, $\gamma = \gamma^{[k]} + \Delta\gamma$, etc.), y sustituir las expresiones no lineales en ellas por la linearización aproximada.

⁶Una linealización similar a (29) del término $\gamma \cdot (1 - e^{-\alpha T})^{-1}$, approximando su incremento como $\Delta(\gamma(1 - e^{-\alpha T})^{-1}) \approx (1 - e^{-\alpha_0 T})^{-1} \Delta\gamma - \gamma_0 T \cdot e^{-\alpha_0 T} \cdot (1 - e^{-\alpha_0 T})^{-2} \Delta\alpha$, ha sido también utilizada.

4. Resolver el problema LMI de minimizar $\Delta\delta$ sujeto a las anteriores restricciones, donde las nuevas variables de decisión son los incrementos de las variables listadas en el paso 1.
5. Si el problema del paso anterior no es factible, el algoritmo termina aquí sin haber probado estabilidad. Si es factible ir al siguiente paso.
6. Con los valores obtenidos, fijar $\delta = \delta^{[k]} + \Delta\delta$, $\alpha = \alpha^{[k]} + \Delta\alpha$ y remodelar el sistema (1) en la región (19) definida por el nuevo δ .
7. Comprobar factibilidad del problema en el Corolario 4, ahora LMI⁷. Si el problema es factible, hacer $k = k + 1$, $\gamma^{[k]} = \gamma$, $\delta^{[k]} = \delta$, $\alpha^{[k]} = \alpha$, $P^{[k]} = P$ y volver al paso 3. Si no es factible, reducir los incrementos sugeridos por la linealización, en base a un factor de escala libremente elegido $0 < v < 1$, $\Delta\delta = v\Delta\delta$, $\Delta\alpha = v\Delta\alpha$ e ir al siguiente paso.
8. Mientras $|\Delta\delta| > \epsilon$, siendo $\epsilon > 0$ la precisión deseada de acercamiento al óptimo, volver al paso 6. Si $|\Delta\delta| \leq \epsilon$, el algoritmo finaliza y el mínimo estimado de la región inescapable está definido por:

$$\Theta_r = \left\{ x : \max \left(x^T P^{[k]} x \leq 1 + \beta \gamma^{[k]}, x^T P^{[k]} x \leq \frac{\beta \gamma^{[k]}}{1 - e^{-T\alpha^{[k]}}} \right) \right\}$$

Observación 3. Los valores de inicialización de variables en el Algoritmo 2 pueden tomarse de forma arbitraria, incluso que se correspondan con un punto no factible. Sin embargo, este algoritmo solo garantiza convergencia a un mínimo factible (local o global) si los valores de inicialización corresponden a una solución factible del problema BMI (Kanev et al., 2004).

Una vez calculado el mínimo conjunto inescapable partiendo desde un cierto conjunto inicial Θ_i , se puede calcular un estimado del conjunto final Θ_f utilizando las condiciones del Corolario 3. La base de dicho cálculo está en considerar que, una vez se tiene el sistema no lineal modelado en la región inescapable (fijada para el Corolario 4 o calculada por el Algoritmo 2 según el caso), el efecto de las condiciones iniciales desaparece después de un periodo de tiempo suficientemente largo, por tanto nos encontramos en el mismo caso que el de calcular el conjunto estacionario con CI nulas.

Además, existe la posibilidad de remodelar el sistema no lineal original para obtener un mejor modelo borroso, por ejemplo si el elipsoide estacionario final encontrado es sensiblemente más pequeño que la zona de modelado. Por tanto, para obtener el estimado menos conservador sobre el sistema original se propone un procedimiento iterativo similar al Algoritmo 1, reduciendo la región Ω en cada iteración: esto es hacer $\Omega^{[k+1]} = \Theta_f^{[k]}$ mientras $\Theta_f^{[k]} \subset \Omega^{[k]}$. Esto es posible debido al hecho de que, una vez asegurado que las trayectorias del sistema van a acabar entrando en un conjunto inescapable más pequeño (después de una cantidad suficiente de tiempo), podemos remodelar el sistema no lineal en dicho conjunto, obteniendo así unos vértices del modelo TS probablemente más

próximos (reduciendo así conservadurismo en las condiciones LMI dado que los vértices más próximos implican LMIs menos restrictivas). Esta idea se formaliza en el algoritmo descrito a continuación.

Algoritmo 3. Estimación del mínimo conjunto estacionario dado un conjunto transitorio inescapable:

1. Tomar $k = 1$ y elegir el conjunto transitorio inescapable proporcionado como región de modelado, i.e., $\Omega^{[1]} = \Theta$,
2. Calcular el modelo TS (2) del sistema (1) en la región inescapable $\Omega^{[k]}$.
3. Resolver el siguiente problema cuasi-LMI (LMI + explotación en α ; β y T fijados):

Maximizar $\psi = \delta^{-1}$ sujeto a (20), (21) y (22)

4. Obtener $\Theta_f^{[k]} = \{x : V \leq \frac{\beta}{1-e^{-\alpha T}}\}$. Si $\Theta_f^{[k]} \subset \Omega^{[k]}$, hacer $\Omega^{[k+1]} = \Theta_f^{[k]}$, $k = k + 1$ y volver al paso 2. Si $\Theta_f^{[k]} = \Omega^{[k]}$ (o, aproximadamente, $\Theta_f^{[k]} \approx \Omega^{[k]}$ con un criterio de precisión elegido por el usuario), entonces el algoritmo termina y $\Theta_f^{[k]}$ es el mínimo conjunto final encontrado.

5. Ejemplo

Considérese el siguiente sistema no lineal sometido a una entrada de perturbación w :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0,5 \\ 0 & -4,1 + 3,8 \sin(x_1) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0,92 \\ -0,46 \end{bmatrix} w \quad (30)$$

Este sistema se puede representar de forma exacta en una región de modelado $\Omega = \{x_1 : \rho^2 - x_1^2 > 0\}$ como un modelo (2) cuyos vértices son

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \begin{bmatrix} -3 & 0,5 \\ 0 & -4,1 + 3,8 \sin(\rho) \end{bmatrix} \\ \mathcal{A}_2 &= \begin{bmatrix} -3 & 0,5 \\ 0 & -4,1 - 3,8 \sin(\rho) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

si $\rho \leq \pi/2$, o bien con los vértices

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0,5 \\ 0 & -0,3 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0,5 \\ 0 & -7,9 \end{bmatrix} \quad (32)$$

si $\rho > \pi/2$ (en este caso, el modelo es global al haberse acotado el seno por $\{+1, -1\}$ siendo válida la cota en todo \mathbb{R}).

Considérese ahora una perturbación persistente acotada (6) que posee las siguientes características: potencia RMS máxima $\beta = 2,5$ en $T = 1,82$ segundos.

Para estas características de perturbación, los problemas que se plantean resolver en este sistema son:

1. Calcular un estimado del mínimo conjunto inescapable partiendo tanto de condiciones iniciales nulas como de un conjunto prefijado.
2. Dada una región de modelado fija, calcular el máximo conjunto de condiciones iniciales con forma prefijada para que se garantice que las trayectorias del sistema no abandonen la región de validez del modelo TS.

Estos problemas se han resuelto utilizando la base teórica presentada en las anteriores secciones. Los resultados obtenidos se han representado en las Figuras 2 y 3, y pasan a detallarse a continuación.

⁷ Al haberse fijado α y Δ en el paso anterior ya no hay expresiones no lineales en la formulación de las condiciones del Corolario 4.

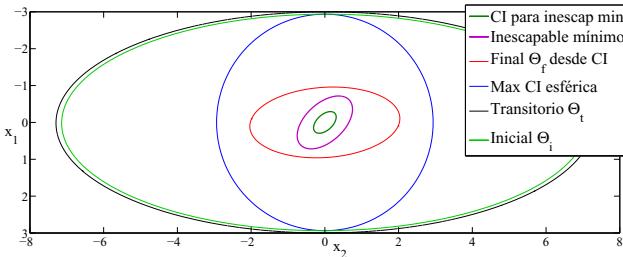


Figura 2: – Máximo círculo de conjunto de condiciones iniciales para Ω fija (azul), elipsoide inicial asociado (verde, exterior) y elipsoide inescapable desde el anterior (negro); –mínimo conjunto inescapable desde el origen (morado) o desde cualquier punto de la región delimitada por la curva verde oscura interior.

Figura 2. En primer lugar, se ha ejecutado el Algoritmo 1 y se obtuvo, para $\alpha = 0,98$, el mínimo conjunto inescapable Θ_f partiendo desde $x(0) = 0$ (elipsoide morado de la Fig. 2). Nótese que, para garantizar dicho conjunto inescapable, no se necesita modelar el sistema (30) más allá de $\Omega = \{x : 0,9^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0\}$. El elipsoide interior verde en la figura representa la curva de nivel (14) del conjunto inicial que los resultados, suponiendo $V(0) = 0$, también garantizan como resultado colateral (Corolario 1). Asimismo, se ha decidido modelar el sistema (30) en una región de interés $\Omega = \{x_1 : 3^2 - x_1^2 \geq 0\}$. Utilizando el modelo (32) y aplicando el Corolario 4, se ha calculado el conjunto de CI mas grande (de forma circular prefijada) desde el cual el sistema se mantiene en la región de modelado borroso, a pesar de la perturbación. Con este procedimiento, para $\alpha = 0,03$ se ha obtenido una región circular de CI de radio $\rho_0 = 2,936$ (circunferencia azul en Fig. 2) que garantiza que el transitorio desde esta región estará siempre contenido dentro de Ω . De hecho, dada la forma elipsoidal de las regiones obtenidas, se ha garantizado que comenzando en el elipsoide verde exterior nunca se saldrá del elipsoide negro.

Además, con el objetivo de comparar, se ha tratado también de obtener el estimado más pequeño de la región estacionaria final Θ_f empezando desde dicha región de modelado $\Omega = \{x_1 : 3^2 - x_1^2 \geq 0\}$. Para ello se utilizó el Algoritmo 3, resultando el elipsoide rojo de la Figura 2.

Nota: Obsérvese que este estimado del conjunto final estacionario es más grande que el obtenido partiendo desde condiciones iniciales nulas (elipsoide morado obtenido con el Algoritmo 1). Esto es debido a que los modelos vértice de (32) se separan rápidamente cuando nos alejamos del origen (la no-linealidad es cada vez más patente). Esta incertidumbre adicional implica que existe la posibilidad de que el sistema sea “menos estable” lejos del origen y por tanto, la energía de la perturbación pueda apartarle más lejos (y no dejarle tiempo a acercarse al origen) que cuando empezamos cerca del origen. Esto es intuitivamente esperable y confirma que los algoritmos propuestos pueden reproducir este tipo de comportamiento previsto.

Figura 3. Se ha seleccionado un conjunto deseado de condiciones iniciales Θ_i como una circunferencia de radio 0,75 (curva azul en Fig. 3). Con dicho conjunto, se ha ejecutado el Algoritmo 2 para calcular el mínimo conjunto inescapable. Los

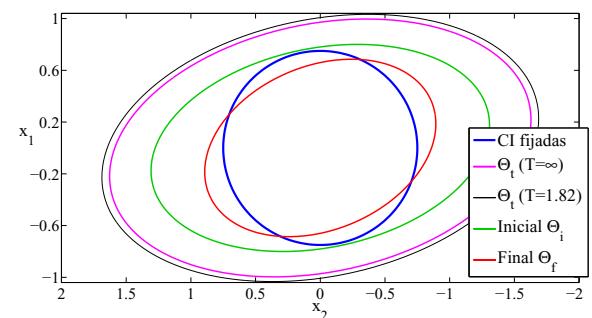


Figura 3: Conjuntos inescapable desde CI fijas: conjunto inicial prefijado (azul), elipsoide inicial (verde), elipsoide inescapable (negro), elipsoide inescapable con $T \rightarrow \infty$ (magenta), elipsoide que delimita la región estacionaria final (rojo).

valores iniciales (arbitrarios) de los parámetros para lanzar el algoritmo son los siguientes: $\delta^{[0]} = 3^2$, $\gamma^{[0]} = 1$, $a^{[0]} = 0,3$ y $P^{[0]} = [1 \ 0; 0 \ 1]$. Después de varias iteraciones, el algoritmo convergió en la solución que se muestra en la Figura 3 donde el elipsoide exterior (negro) es el mínimo conjunto inescapable, i.e., el conjunto Θ_t , y el elipsoide verde es el que incluye al conjunto inicial Θ_i . Nótese también que, para garantizar inescapabilidad desde el conjunto de CI considerado, no se necesita modelar el sistema más allá de $|x_1| \leq 1,03$.

Por comparar, se ha presentado también el conjunto inescapable resultante si $T = \infty$ y se mantuviera β . En ese caso, la peor perturbación posible sería un impulso de tamaño β , y el nivel $V(0) + \beta$: el resultado es la curva de nivel magenta. Esta nueva perturbación de energía total acotada no puede llevar al estado del sistema tan lejos como la perturbación persistente estudiada anteriormente (elipsoide negro). De todos modos, no hay mucha diferencia, porque la estabilidad del sistema empuja al estado hacia el origen disipando en un intervalo T gran parte de la energía aportada por w , según se desprende de los resultados. Empezando por la anterior región de modelado mínima $|x_1| \leq 1,03$, se utilizó el Algoritmo 3 para calcular el conjunto estacionario final Θ_f . Al final del cómputo se ha conseguido llegar a una región de modelado $|x_1| \leq 0,6859$ ($\alpha = 1,26$) y el conjunto final Θ_f obtenido por el algoritmo es el elipsoide rojo que se muestra en la Figura 3.

6. Conclusiones

El presente trabajo discute en detalle distintos problemas de relevancia originados por la presencia de perturbaciones y la validez sólamente local de los modelos borrosos para el control de sistemas no lineales. Se han presentado algoritmos para calcular, iterativamente, estimados elipsoidales de conjuntos inescapables transitorios y conjuntos estacionarios finales. Mediante los resultados presentados se puede validar si la región de modelado es del tamaño adecuado ante una cota de potencia cuadrática de las perturbaciones (en un cierto intervalo) y una zona de condiciones iniciales del estado. Se ha presentado también la resolución de determinados problemas de optimización del tamaño de los estimados de dichas regiones. Los ejemplos

propuestos ilustran la pertinencia y clara interpretación de los resultados de los algoritmos.

English Summary

Stability of Takagi-Sugeno systems under nonvanishing disturbances: estimating inescapable sets

Abstract

The present work analizes the behaviour of Takagi-Sugeno fuzzy systems in front of non-vanishing disturbances (characterized by known amplitude or quadratic-mean power bounds). Such analysis is focused in validating that, in front of a specific disturbance bound and an initial-condition region, there exist an inescapable region (contained in the region where the TS model is valid as a model of the underlying nonlinear system). Some of the stated problems here are cast as linear matrix inequality problems (LMI), efficiently solvable by semidefinite programming. Others, however, will involve nonconvex products of decision-variable matrices and two scalars (BMI), which are solved in an iterative way.

Keywords:

Takagi-Sugeno, Disturbance rejection, Inescapable set, Local stability, LMI, Nonvanishing disturbances.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el MINECO, Gobierno de España, bajo los proyectos de investigación DPI2011-27845-C02-01 y DPI2012-37859.

Referencias

- Abedor, J., Nagpal, K., Poolla, K., 1996. A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 6 (9-10), 899–927.
- Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H., Keel, L. H., 1995. Robust control. Prentice-Hall Upper Saddle River, New Jersey.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., Balakrishnan, V., 1994. Linear matrix inequalities in system and control theory. No. 15 en SIAM studies in applied mathematics. SIAM.
- Chen, C.-W., Yeh, K., Chiang, W.-L., Chen, C.-Y., Wu, D.-J., 2007. Modeling, \mathcal{H}_∞ control and stability analysis for structural systems using takagi-sugeno fuzzy model. *Journal of Vibration and Control* 13 (11), 1519–1534.
- Chesi, G., 2011. Domain of Attraction Analysis and Control Via Sos Programming. Springer Verlag.
- Feng, G., 2006. A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *Fuzzy systems, IEEE Transactions on* 14 (5), 676–697.
- Genesio, R., Tartaglia, M., Vicino, A., ago 1985. On the estimation of asymptotic stability regions: State of the art and new proposals. *IEEE Trans. on Aut. Control* 30 (8), 747 – 755.
- Goh, K., Turan, L., Safonov, M., Papavassilopoulos, G., Ly, J., June 1994. Biaffine matrix inequality properties and computational methods. En: American Control Conference, 1994. Vol. 1. pp. 850–855 vol.1.
- Guerra, T. M., Kruszewski, A., Lauber, J., 2009. Discrete Tagaki-Sugeno models for control: Where are we? *Annual Reviews in Control* 33 (1), 37 – 47.
- Hancock, E. J., Papachristodoulou, A., feb 2013. Generalised absolute stability and sum of squares. *Automatica*.
- Jaadari, A., 2013. Continuous quasi-LPV systems: how to leave the quadratic framework? Tesis doctoral, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis (France), Universitat Politècnica de València (Spain). URL: <http://hdl.handle.net/10251/31379>
- Johansson, M., Rantzer, A., Arzen, K.-E., dec 1999. Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* 7, 713–722.
- Kanev, S., Scherer, C., Verhaegen, M., Schutter, B. D., 2004. Robust output-feedback controller design via local {BMI} optimization. *Automatica* 40 (7), 1115 – 1127.
- Khalil, H. K., 2002. Nonlinear Systems, 3^a Edición. Prentice Hall.
- Klug, M., Castelan, E. B., Coutinho, D., 2015. A T-S fuzzy approach to the local stabilization of nonlinear discrete-time systems subject to energy-bounded disturbances. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* 26 (3), 191–200.
- Ksontini, M., Delmotte, F., Guerra, T.-M., Kamoun, A., Oct 2003. Disturbance rejection using takagi-sugeno fuzzy model applied to an interconnected tank system. En: *Systems, Man and Cybernetics, 2003. IEEE International Conference on*. Vol. 4. pp. 3352–3357 vol.4.
- Liu, X., Zhang, Q., 2003. Approaches to quadratic stability conditions and \mathcal{H}_∞ control designs for ts fuzzy systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* 11 (6), 830–839.
- Matía, F., Marichal, G. N., Jiménez, E. (Eds.), 2014. Fuzzy Modeling and Control: Theory and Applications. Vol. 9 of Atlantis Computational Intelligence Systems. Atlantis Press.
- Murphy, G. M., 2011. Ordinary differential equations and their solutions. Courier Dover Publications.
- Palhares, R. M., Peres, P. L., 2000. Robust filtering with guaranteed energy-to-peaked performance - an lmi approach. *Automatica* 36 (6), 851–858.
- Pitarch, J. L., Sala, A., Ariño, C. V., Apr 2014. Closed-form estimates of the domain of attraction for nonlinear systems via fuzzy-polynomial models. *Cybernetics, IEEE Transactions on* 44 (4), 526–538.
- Pitarch, J. L., Sala, A., Ariño, C. V., Bedate, F., 2012. Estimación del dominio de atracción de sistemas no lineales mediante modelos borrosos polinomiales. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)* 9 (2), 152 – 161.
- Pitarch, J. L., Sala, A., Bedate, F., Ariño, C. V., Sep 2013. Inescapable-set estimation for nonlinear systems with non-vanishing disturbances. En: *3rd IFAC Inter. Conf. on Intelligent Control and Automation Science (ICONS)*. Chengdu, China, pp. 457–462.
- Sala, A., 2009. On the conservativeness of fuzzy and fuzzy-polynomial control of nonlinear systems. *Annual Reviews in Control* 33 (1), 48 – 58.
- Salcedo, J. V., Martínez, M., García-Nieto, S., 2008. Stabilization conditions of fuzzy systems under persistent perturbations and their application in nonlinear systems. *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 21 (8), 1264 – 1276.
- Scherer, C., Weiland, S., 2004. Linear matrix inequalities in control. Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control. URL: <http://www.cs.ele.tue.nl/SWeiland/lmid.pdf>
- Slotine, J.-J. E., 1991. Applied nonlinear control. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Tadeo, F., Grimble, M., Dec 2002. Advanced control of a hydrogen reformer. *Computing Control Engineering Journal* 13 (6), 305–314.
- Tanaka, K., Wang, H. O., 2001. Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach, 2^a Edición. Wiley-Interscience publication. John Wiley and Sons.
- Wang, H., Tanaka, K., Griffin, M., feb 1996. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* 4, 14–23.
- Wang, L., Liu, X., 2013. Local analysis of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy system with disturbances bounded by magnitude or energy: A Lagrange multiplier method. *Information Sciences* 248, 89 – 102.