



## Metodología formal de análisis del comportamiento dinámico de sistemas no lineales mediante lógica borrosa

Antonio Javier Barragán<sup>a,\*</sup>, Basil Mohammed Al-Hadithi<sup>b</sup>, José Manuel Andújar<sup>a</sup>, Agustín Jiménez<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Dep. de Ing. Electrónica, de Sistemas Electrónicos y Automática, Universidad de Huelva.

<sup>b</sup>Grupo de Control Inteligente, Universidad Politécnica de Madrid, Centro de Automatización y Robótica UPM - CSIC

### Resumen

Tener la capacidad para analizar un sistema desde un punto de vista dinámico puede ser muy útil en muchas circunstancias (sistemas industriales, biológicos, económicos, ...). El análisis dinámico de un sistema permite conocer su comportamiento y la respuesta que presentará a distintos estímulos de entrada, su estabilidad en lazo abierto, tanto local como global, o si está afectado por fenómenos no lineales, como ciclos límites o bifurcaciones, entre otros. Si el sistema es desconocido o su dinámica es lo suficientemente compleja como para no poder obtener un modelo matemático del mismo, en principio no sería posible realizar un análisis dinámico formal del sistema. En estos casos la lógica borrosa, y más concretamente los modelos borrosos de tipo Takagi-Sugeno (TS), se presentan como una herramienta muy poderosa de análisis y diseño. Los modelos borrosos TS son aproximadores universales tanto de una función como de su derivada, por lo que permiten modelar sistemas no lineales en base a datos de entrada/salida. Puesto que un modelo borroso es un modelo matemático formalmente hablando, a partir del mismo es posible estudiar aspectos de la dinámica del sistema real que modela tal como se hace en la teoría de control no lineal. En este artículo se presenta una metodología para la obtención de los estados de equilibrio de un sistema no lineal, la linealización exacta de su modelo borroso de estado completamente general, el estudio de la estabilidad local de los equilibrios a partir de dicha linealización, y la utilización de la metodología de Poincaré para el estudio de órbitas periódicas en modelos borrosos. A partir de esa información, es posible estudiar la estabilidad local de los estados de equilibrio, así como la dinámica del sistema en su entorno y la presencia de oscilaciones, obteniéndose una valiosa información del comportamiento dinámico del sistema. Copyright © 2015 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L.U. Todos los derechos reservados.

**Palabras Clave:** Análisis dinámico, estabilidad, estado de equilibrio, linealización, metodología de Poincaré, modelado borroso, sistemas dinámicos, Takagi-Sugeno (TS) model

### 1. Introducción

El análisis dinámico de un sistema permite conocer su comportamiento y la respuesta que el mismo presentará a distintos estímulos de entrada. Si el sistema es desconocido o su dinámica es lo suficientemente compleja como para no poder obtener un modelo matemático del mismo (López-Baldán et al., 2002), en principio no sería posible realizar un análisis dinámico formal del sistema. Si no se posee un modelo matemático, bien sea por desconocimiento del funcionamiento interno del sistema, o por la excesiva complejidad del mismo, se puede generar un modelo en base a datos de entrada-salida del sistema y, a partir de este modelo, estudiar la dinámica del sistema original.

La herencia tradicional de la ingeniería de control ha sido lineal, de hecho, cuando es posible asumir, como ocurre en muchas aplicaciones, que los problemas son suficientemente locales, es permisible obtener su solución usando métodos lineales. Sin embargo, cuando los problemas son de naturaleza global, el uso de métodos no lineales se convierte en una necesidad.

La razón fundamental que exige el uso de modelos no lineales es que la dinámica de los modelos lineales no es lo suficientemente rica como para describir una serie de fenómenos que se dan de forma asidua en la vida real (Marquez, 2003, Andújar et al., 2004, Andújar y Bravo, 2005). El comportamiento dinámico de los sistemas lineales, independientemente de su orden, está gobernado esencialmente por los autovalores de su matriz de estado. Sin embargo, los sistemas no lineales tienen un comportamiento mucho más variado, pudiendo originar oscilaciones autoexcitadas, conocidas como *ciclos límite*, un comportamiento aperiódico y críticamente sensibles a las condiciones iniciales, el *caos* (Wiggins, 2003), así como otros fenóme-

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [antonio.barragan@iesia.uhu.es](mailto:antonio.barragan@iesia.uhu.es) (Antonio Javier Barragán), [basil@etsii.upm.es](mailto:basil@etsii.upm.es) (Basil Mohammed Al-Hadithi), [andujar@iesia.uhu.es](mailto:andujar@iesia.uhu.es) (José Manuel Andújar), [ajimenez@etsii.upm.es](mailto:ajimenez@etsii.upm.es) (Agustín Jiménez)

nos dinámicos exclusivos de los sistemas no lineales, como la existencia de múltiples estados de equilibrio y las bifurcaciones (Sastry, 1999), entre otros.

El punto de partida idóneo en el análisis de un sistema no lineal es su representación mediante un modelo matemático, generalmente un modelo de estado. Cuando el sistema es conocido y su dinámica no es excesivamente compleja, es posible obtener un modelo de estado del sistema; sin embargo, en multitud de ocasiones el sistema objeto de estudio puede ser demasiado complejo, ya sea por su dinámica o por su dimensión, o simplemente porque se desconocen las ecuaciones que gobiernan su funcionamiento. En estos casos, la lógica borrosa se presenta como una poderosa herramienta ya que permite modelar sistemas altamente no lineales a partir de datos de entrada-salida. Esta modelización puede ser cualitativa (Grande et al., 2005, Andújar et al., 2006, Aroba et al., 2007, Jiménez et al., 2009) o estrictamente analítica, aprovechando el hecho de que los sistemas TS son aproximadores universales tanto de la función (Kosko, 1994, Wang, 1992) como de su derivada (Kreinovich et al., 2000, Mencattini et al., 2005). Por lo tanto, aunque el sistema sea desconocido, es factible obtener un modelo borroso del mismo. Un modelo borroso es un modelo matemático formalmente hablando, así pues, a partir de este modelo es posible estudiar aspectos de la dinámica del sistema real siempre que su precisión sea suficiente. Esta forma de abordar el problema permite enfrentarse a sistemas no lineales y de difícil modelización por técnicas matemáticas usuales.

El conocimiento de los estados de equilibrio que posee un sistema, así como la estabilidad de dichos estados, son datos que pueden resultar muy interesantes a la hora de analizar o diseñar un sistema de control. Si se parte de un sistema completamente desconocido, esta información puede aclarar en muchos aspectos el funcionamiento del mismo, así como facilitar el diseño de un sistema de control adecuado.

En este artículo se muestra una metodología para analizar un sistema no lineal general, inicialmente desconocido, a partir de un modelo borroso TS. El artículo está organizado como sigue: en la sección 2 se introduce al lector en la formulación del problema y se presentan las ecuaciones que se utilizarán para la representación del modelo del sistema. En el apartado 3 se presenta la linealización exacta de un modelo TS completamente general. Posteriormente, en la sección 4 se plantea una propuesta de procedimiento para el análisis dinámico del sistema para, en la sección 5 aplicar dicho procedimiento a dos ejemplos. Finalmente se presentan algunas conclusiones.

## 2. Formulación del problema

Sea  $n$  el orden del sistema y  $m$  su número de entradas, un modelo TS equivalente de un sistema continuo puede ser representado por (Takagi y Sugeno, 1985, Babuška, 1995, Babuška y Verbruggen, 1995, Nguyen et al., 1995):

$$R^{(l,i)} : \text{Si } x_1 \text{ es } A_{1i}^l \text{ y } \dots \text{ y } x_n \text{ es } A_{ni}^l \text{ y } u_1 \text{ es } B_{1i}^l \text{ y } \dots \text{ y } u_m \text{ es } B_{mi}^l \text{ Entonces } \dot{x}_i^l = \sum_{k=0}^n a_{ki}^l \tilde{x}_k + \sum_{j=1}^m b_{ji}^l u_j, \quad (1)$$

donde  $l = 1..M_i$  es el índice de la regla y  $M_i$  el número de reglas que modelan la  $i$ -ésima ecuación diferencial del proceso,  $\dot{x}_i$ .  $\tilde{x}_k$  es la  $k$ -ésima coordenada del vector de estado extendido (Andújar y Barragán, 2005, Andújar et al., 2009, 2014a), siendo  $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)^T = (1, x_1, \dots, x_n)^T$ .

De esta forma, la salida del modelo borroso puede calcularse a través de la expresión siguiente, que representa el modelo borroso de estado del sistema (Wang, 1994, 1997):

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^n a_{ki} \tilde{x}_k + \sum_{j=1}^m b_{ji} u_j, \quad (2)$$

donde  $a_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  y  $b_{ji}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  son coeficientes variables (Wong et al., 1997) definidos por:

$$a_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\sum_{l=1}^{M_i} w_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) a_{ki}^l}{\sum_{l=1}^{M_i} w_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{u})}, \quad b_{ji}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\sum_{l=1}^{M_i} w_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) b_{ji}^l}{\sum_{l=1}^{M_i} w_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{u})} \quad (3)$$

$w_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  representa el grado de activación de las reglas del modelo del sistema, y los vectores  $\sigma_i^l$  y  $\alpha_i^l$  representan los conjuntos de parámetros adaptables de los antecedentes de las reglas en los universos de discurso de las variables de estado y las señales de control, respectivamente.

$$w_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \prod_{k=1}^n \mu_{ki}^l(x_k, \sigma_{ki}^l) \prod_{j=1}^m \mu_{ji}^l(u_j, \alpha_{ji}^l) \quad (4)$$

## 3. Linealización de un modelo borroso de estado

La linealización es una de las técnicas más empleadas en el diseño de sistemas de control no lineales. Aunque es una técnica no muy recomendable en muchos casos, ya que se desprecian los efectos de las no linealidades de los sistemas controlados, sí que puede ser válida para controlar sistemas no muy complejos, o cuya dinámica sea conocida, en regiones donde su comportamiento sea aproximadamente lineal.

Además de como método de control, la linealización puede emplearse para obtener información de un sistema no lineal. Es sabido que, con algunas salvedades, el comportamiento de un sistema no lineal en torno a un estado de equilibrio es muy similar al del sistema linealizado en torno a dicho estado (Nijmeijer y Schaft, 1990, Sastry, 1999, Slotine y Li, 1991); por lo tanto, la obtención del sistema lineal equivalente de un modelo borroso no lineal puede ser una herramienta muy útil para obtener información del sistema original.

Sea el modelo de estado genérico de un sistema no lineal dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (5)$$

el desarrollo en serie de Taylor hasta orden 1 de dicho sistema en torno a un punto  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ , determina que éste se puede aproximar por la expresión (6), siendo  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  y  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ , y donde las matrices del sistema lineal se calculan mediante las expresiones (7), (8) y (9).

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) \approx \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(t) \quad (6)$$

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \quad (7)$$

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial x_n} \end{array} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \quad (8)$$

$$\mathbf{B} = \left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial u_m} \end{array} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \quad (9)$$

Si el punto  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  es un estado de equilibrio del sistema, la matriz  $\mathbf{A}_0$  será nula, ya que por definición un estado de equilibrio hace nula la ecuación de estado.

Si el sistema (5) se representa mediante un modelo borroso, su equivalente matemático viene dado por (2). Si se linealiza esta expresión en torno al punto  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ , se puede representar el modelo matemático equivalente de un sistema borroso linealizado como:

$$\dot{\bar{x}}_i \approx f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \sum_{q=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_q} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \bar{x}_q + \sum_{v=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial u_v} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \bar{u}_v, \quad (10)$$

donde  $\bar{x}_q$  y  $\bar{u}_v$  son las componentes de los vectores  $\bar{\mathbf{x}}_0$  y  $\bar{\mathbf{u}}_0$ , respectivamente. Operando con la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_i &\approx f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \sum_{q=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial x_q} \left( \sum_{k=0}^n a_{ki} \bar{x}_k + \sum_{j=1}^m b_{ji} \bar{u}_j \right) \right]_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \bar{x}_q + \\ &+ \sum_{v=1}^m \left[ \frac{\partial}{\partial u_v} \left( \sum_{k=0}^n a_{ki} \bar{x}_k + \sum_{j=1}^m b_{ji} \bar{u}_j \right) \right]_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \bar{u}_v, \end{aligned} \quad (11)$$

que desarrollando se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_i &\approx f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \sum_{q=1}^n \left[ \frac{\partial \left( \sum_{k=0}^n a_{ki} \bar{x}_k \right)}{\partial x_q} + \frac{\partial \left( \sum_{j=1}^m b_{ji} \bar{u}_j \right)}{\partial x_q} \right]_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \bar{x}_q + \\ &+ \sum_{v=1}^m \left[ \frac{\partial \left( \sum_{k=0}^n a_{ki} \bar{x}_k \right)}{\partial u_v} + \frac{\partial \left( \sum_{j=1}^m b_{ji} \bar{u}_j \right)}{\partial u_v} \right]_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \bar{u}_v. \end{aligned} \quad (12)$$

A continuación se resolverán independientemente cada una de las derivadas parciales anteriores. En primer lugar,

$$\frac{\partial \left( \sum_{k=0}^n a_{ki} \bar{x}_k \right)}{\partial x_q} = \sum_{k=0}^n \frac{\partial (a_{ki} \bar{x}_k)}{\partial x_q} = \sum_{k=0}^n \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_q} \bar{x}_k + \sum_{k=0}^n a_{ki} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_q}. \quad (13)$$

Puesto que  $\frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_q} = 1$  si  $k = q$  y 0 en caso contrario:

$$\sum_{k=0}^n a_{ki} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_q} = a_{qi}. \quad (14)$$

Teniendo en cuenta el valor de  $a_{ki}$  dado por (3):

$$\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_q} = \frac{\frac{\partial \left( \sum_{l=1}^{M_i} w_l^l a_{ki}^l \right)}{\partial x_q} \sum_{l=1}^{M_i} (w_l^l) - \frac{\partial \left( \sum_{l=1}^{M_i} w_l^l \right)}{\partial x_q} \sum_{l=1}^{M_i} (w_l^l a_{ki}^l)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_l^l \right)^2}. \quad (15)$$

El grado de activación de las reglas del modelo,  $w_i^l$ , es un valor dependiente del vector de estado y del vector de control, mientras que los elementos  $a_{ki}^l$  son los coeficientes constantes del consecuente de las reglas. De esta forma se puede resolver:

$$\frac{\partial \left( \sum_{l=1}^{M_i} w_l^l a_{ki}^l \right)}{\partial x_q} = \sum_{l=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_l^l}{\partial x_q} a_{ki}^l \right) \quad (16)$$

y

$$\frac{\partial \left( \sum_{l=1}^{M_i} w_l^l \right)}{\partial x_q} = \sum_{l=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_l^l}{\partial x_q} \right), \quad (17)$$

con lo que se puede expresar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_q} &= \frac{\sum_{l=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_l^l}{\partial x_q} a_{ki}^l \right) \sum_{l=1}^{M_i} (w_l^l) - \sum_{l=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_l^l}{\partial x_q} \right) \sum_{l=1}^{M_i} (w_l^l a_{ki}^l)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_l^l \right)^2} \\ &= \frac{\sum_{l=1}^{M_i} \sum_{p=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_l^l}{\partial x_q} a_{ki}^l w_p^p \right) - \sum_{l=1}^{M_i} \sum_{p=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_l^l}{\partial x_q} a_{ki}^p w_p^p \right)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_l^l \right)^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

que simplificando, se obtiene:

$$\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_q} = \frac{\sum_{l,p=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_l^l}{\partial x_q} w_p^p (a_{ki}^l - a_{ki}^p) \right)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_l^l \right)^2}. \quad (19)$$

Por lo tanto, la primera derivada de (12) se obtiene como:

$$\frac{\partial \left( \sum_{k=0}^n a_{ki} \tilde{x}_k \right)}{\partial x_q} = a_{qi} + \sum_{k=0}^n \left( \frac{\sum_{l,p=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial x_q} w_i^p (a_{ki}^l - a_{ki}^p) \right)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)^2} \right) \tilde{x}_k \quad (20)$$

Nótese que en la expresión anterior falta por calcular la derivada del grado de activación de las reglas del modelo borroso con respecto a cada una de las variables de estado. Este punto se resolverá una vez se hayan calculado todas las derivadas de (12).

La segunda de las derivadas a calcular es:

$$\frac{\partial \left( \sum_{j=1}^m b_{ji} u_j \right)}{\partial x_q} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial (b_{ji} u_j)}{\partial x_q} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial b_{ji}}{\partial x_q} u_j + \sum_{j=1}^m b_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial x_q}. \quad (21)$$

En un sistema en lazo abierto las señales de control no son dependientes de las variables de estado, por lo que  $\partial u_j / \partial x_q = 0$ . De esta forma:

$$\frac{\partial \left( \sum_{j=1}^m b_{ji} u_j \right)}{\partial x_q} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial b_{ji}}{\partial x_q} u_j. \quad (22)$$

Operando de forma similar, se puede obtener fácilmente que:

$$\frac{\partial \left( \sum_{j=1}^m b_{ji} u_j \right)}{\partial x_q} = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\sum_{l,p=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial x_q} w_i^p (b_{ji}^l - b_{ji}^p) \right)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)^2} \right) u_j. \quad (23)$$

La tercera derivada a calcular es:

$$\frac{\partial \left( \sum_{k=0}^n a_{ki} \tilde{x}_k \right)}{\partial u_v} = \sum_{k=0}^n \frac{\partial (a_{ki} \tilde{x}_k)}{\partial u_v} = \sum_{k=0}^n \frac{\partial a_{ki}}{\partial u_v} \tilde{x}_k + \sum_{k=0}^n a_{ki} \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial u_v}. \quad (24)$$

Puesto que no existe dependencia entre las señales de control y las variables de estado,  $\partial \tilde{x}_k / \partial u_v = 0$ ,

$$\frac{\partial \left( \sum_{k=0}^n a_{ki} \tilde{x}_k \right)}{\partial u_v} = \sum_{k=0}^n \frac{\partial a_{ki}}{\partial u_v} \tilde{x}_k. \quad (25)$$

Sustituyendo  $a_{ki}$  por su valor:

$$\frac{\partial a_{ki}}{\partial u_v} = \frac{\frac{\partial \left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l a_{ki}^l \right)}{\partial u_v} \sum_{l=1}^{M_i} \left( w_i^l \right) - \frac{\partial \left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)}{\partial u_v} \sum_{l=1}^{M_i} \left( w_i^l a_{ki}^l \right)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)^2}. \quad (26)$$

Puesto que el grado de activación de las reglas del modelo borroso es dependiente del vector de control, y los parámetros  $a_{ki}^l$  son constantes, se tiene que:

$$\frac{\partial \left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l a_{ki}^l \right)}{\partial u_v} = \sum_{l=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial u_v} a_{ki}^l \right), \quad (27)$$

y

$$\frac{\partial \left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)}{\partial u_v} = \sum_{l=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial u_v} \right), \quad (28)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{ki}}{\partial u_v} &= \frac{\sum_{l=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial u_v} a_{ki}^l \right) \sum_{l=1}^{M_i} \left( w_i^l \right) - \sum_{l=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial u_v} \right) \sum_{l=1}^{M_i} \left( w_i^l a_{ki}^l \right)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)^2} = \\ &= \frac{\sum_{l=1}^{M_i} \sum_{p=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial u_v} a_{ki}^l w_i^p \right) - \sum_{l=1}^{M_i} \sum_{p=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial u_v} a_{ki}^p w_i^p \right)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Simplificando se obtiene:

$$\frac{\partial a_{ki}}{\partial u_v} = \frac{\sum_{l,p=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial u_v} w_i^p (a_{ki}^l - a_{ki}^p) \right)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)^2}. \quad (30)$$

Por lo tanto, la tercera de las derivadas de (12) se obtiene como:

$$\frac{\partial \left( \sum_{k=0}^n a_{ki} \tilde{x}_k \right)}{\partial u_v} = \sum_{k=0}^n \left( \frac{\sum_{l,p=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial u_v} w_i^p (a_{ki}^l - a_{ki}^p) \right)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)^2} \right) \tilde{x}_k. \quad (31)$$

En la expresión anterior falta por calcular la derivada del grado de activación de las reglas del modelo borroso con respecto a las señales de control. Este punto se resolverá una vez se hayan calculado todas las derivadas de (12).

Por último, para calcular la cuarta derivada de (12):

$$\frac{\partial \left( \sum_{j=1}^m b_{ji} u_j \right)}{\partial u_v} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial (b_{ji} u_j)}{\partial u_v} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial b_{ji}}{\partial u_v} u_j + \sum_{j=1}^m b_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial u_v}. \quad (32)$$

Puesto que  $\frac{\partial u_j}{\partial u_v} = 1$  si  $j = v$  y 0 en caso contrario:

$$\sum_{j=1}^m b_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial u_v} = b_{vi}. \quad (33)$$

Teniendo en cuenta el valor de  $b_{ji}$  dado por (3):

$$\frac{\partial b_{ji}}{\partial u_v} = \frac{\frac{\partial \left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l b_{ji}^l \right)}{\partial u_v} \sum_{l=1}^{M_i} (w_i^l) - \frac{\partial \left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)}{\partial u_v} \sum_{l=1}^{M_i} (w_i^l b_{ji}^l)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)^2}. \quad (34)$$

Operando como con las derivadas anteriores:

$$\frac{\partial \left( \sum_{j=1}^m b_{ji} u_j \right)}{\partial u_v} = b_{vi} + \sum_{j=1}^m \left( \frac{\sum_{l,p=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial u_v} w_i^p (b_{ji}^l - b_{ji}^p) \right)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)^2} \right) u_j. \quad (35)$$

Sustituyendo las expresiones (20), (23), (31) y (35) en (12), el modelo matemático equivalente de un sistema borroso linealizado en torno a un punto  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  viene dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i \approx & f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \\ & + \sum_{q=1}^n \left[ a_{qi} + \sum_{k=0}^n \left( \frac{\sum_{l,p=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial x_q} w_i^p (a_{ki}^l - a_{ki}^p) \right)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)^2} \right) \tilde{x}_k \right] \tilde{x}_q + \\ & + \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{l=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial x_q} w_i^p (b_{ji}^l - b_{ji}^p) \right) \right] u_j \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \tilde{x}_q + \\ & + \sum_{k=0}^n \left[ \sum_{l,p=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial u_v} w_i^p (a_{ki}^l - a_{ki}^p) \right) \right] \tilde{x}_k \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \bar{u}_v. \end{aligned} \quad (36)$$

Esta ecuación puede escribirse de una forma más compacta como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i \approx & f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \\ & + \sum_{q=1}^n \left( a_{qi} + \sum_{k=0}^n \Gamma_{x_q}^{\mathcal{A}_{ki}} \tilde{x}_k + \sum_{j=1}^m \Gamma_{x_q}^{\mathcal{B}_{ji}} u_j \right) \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \tilde{x}_q + \\ & + \sum_{v=1}^m \left( b_{vi} + \sum_{k=0}^n \Gamma_{u_v}^{\mathcal{A}_{ki}} \tilde{x}_k + \sum_{j=1}^m \Gamma_{u_v}^{\mathcal{B}_{ji}} u_j \right) \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \bar{u}_v, \end{aligned} \quad (37)$$

donde

$$\Gamma_{x_q}^{\mathcal{A}_{ki}} = \frac{\sum_{l,p=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial x_q} w_i^p (a_{ki}^l - a_{ki}^p) \right)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)^2}, \quad (38)$$

$$\Gamma_{x_q}^{\mathcal{B}_{ji}} = \frac{\sum_{l,p=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial x_q} w_i^p (b_{ji}^l - b_{ji}^p) \right)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)^2}, \quad (39)$$

$$\Gamma_{u_v}^{\mathcal{A}_{ki}} = \frac{\sum_{l,p=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial u_v} w_i^p (a_{ki}^l - a_{ki}^p) \right)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)^2}, \quad (40)$$

y

$$\Gamma_{u_v}^{\mathcal{B}_{ji}} = \frac{\sum_{l,p=1}^{M_i} \left( \frac{\partial w_i^l}{\partial u_v} w_i^p (b_{ji}^l - b_{ji}^p) \right)}{\left( \sum_{l=1}^{M_i} w_i^l \right)^2}. \quad (41)$$

### 3.0.1. Derivada del grado de activación de las reglas del modelo borroso

El grado de activación de las reglas del modelo borroso es dependiente del vector de estado y del vector de control, según la expresión (4); de forma que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_q} &= \frac{\partial \left( \prod_{k=1}^n \mu_{ki}^l(x_k, \sigma_{ki}^l) \right)}{\partial x_q} \prod_{j=1}^m \mu_{ji}^l(u_j, a_{ji}^l) + \\ &+ \prod_{k=1}^n \mu_{ki}^l(x_k, \sigma_{ki}^l) \frac{\partial \left( \prod_{j=1}^m \mu_{ji}^l(u_j, a_{ji}^l) \right)}{\partial x_q} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_v} &= \frac{\partial \left( \prod_{k=1}^n \mu_{ki}^l(x_k, \sigma_{ki}^l) \right)}{\partial u_v} \prod_{j=1}^m \mu_{ji}^l(u_j, a_{ji}^l) + \\ &+ \prod_{k=1}^n \mu_{ki}^l(x_k, \sigma_{ki}^l) \frac{\partial \left( \prod_{j=1}^m \mu_{ji}^l(u_j, a_{ji}^l) \right)}{\partial u_v} \end{aligned} \quad (43)$$

En un sistema en lazo abierto las señales de control son independientes del vector de estado, por lo tanto:

$$\frac{\partial \left( \prod_{j=1}^m \mu_{ji}^l(u_j, a_{ji}^l) \right)}{\partial x_q} = 0 \quad (44)$$

y

$$\frac{\partial \left( \prod_{k=1}^n \mu_{ki}^l(x_k, \sigma_{ki}^l) \right)}{\partial u_v} = 0. \quad (45)$$

De esta forma,

$$\frac{\partial w_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_q} = \frac{\partial \left( \prod_{k=1}^n \mu_{ki}^l(x_k, \sigma_{ki}^l) \right)}{\partial x_q} \prod_{j=1}^m \mu_{ji}^l(u_j, \alpha_{ji}^l) \quad (46)$$

y

$$\frac{\partial w_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_v} = \prod_{k=1}^n \mu_{ki}^l(x_k, \sigma_{ki}^l) \frac{\partial \left( \prod_{j=1}^m \mu_{ji}^l(u_j, \alpha_{ji}^l) \right)}{\partial u_v}. \quad (47)$$

Puesto que  $\frac{\partial x_k}{\partial x_q} = 1$  si  $k = q$  y 0 en caso contrario:

$$\frac{\partial w_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_q} = \frac{\partial \mu_{qi}^l(x_q, \sigma_{qi}^l)}{\partial x_q} \prod_{k=1, k \neq q}^n \mu_{ki}^l(x_k, \sigma_{ki}^l) \prod_{j=1}^m \mu_{ji}^l(u_j, \alpha_{ji}^l). \quad (48)$$

De la misma forma, puesto que  $\frac{\partial u_j}{\partial u_v} = 1$  si  $j = v$  y 0 en caso contrario:

$$\frac{\partial w_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_v} = \frac{\partial \mu_{vi}^l(u_v, \alpha_{vi}^l)}{\partial u_v} \prod_{k=1}^n \mu_{ki}^l(x_k, \sigma_{ki}^l) \prod_{j=1, j \neq v}^m \mu_{ji}^l(u_j, \alpha_{ji}^l). \quad (49)$$

Téngase en cuenta que las derivadas de las funciones de pertenencia que aparecen en las expresiones anteriores se pueden obtener directamente de la definición de la propia función. Note que no es necesario que las funciones de pertenencia sean continuamente diferenciables, es suficiente que sean diferenciables a trozos. Aunque las funciones derivables a trozos implican una discontinuidad de salto en su derivada, ya que el conjunto de puntos singulares es un conjunto nulo, en implementaciones numéricas esto no es un problema real. Por ejemplo, sería posible suponer que la derivada es un punto infinitesimalmente cerca a la derecha, a la izquierda, o el promedio de estos valores.

#### 4. Procedimiento de análisis

##### 4.1. Estados de equilibrio y estabilidad local

El primer paso necesario es obtener un modelo borroso de estado del sistema a analizar como el dado por (1) mediante alguna de las muchas técnicas de modelado existentes (Andújar y Barragán, 2014), ya sea en línea (Barragán et al., 2014, Al-Hadithi et al., 2012, 2014, Andújar et al., 2014b), o fuera de línea (Horikawa et al., 1992, Jang, 1993, Babuška, 1995, Angelov y Buswell, 2002, Angelov y Filev, 2004, Denai et al., 2007). A continuación es importante localizar los estados de equilibrio del sistema. La búsqueda de los estados de equilibrio de un sistema de control es uno de los primeros problemas que se deben resolver para proceder con el estudio de su dinámica. Como análisis previo al diseño del sistema de control, la obtención de los estados de equilibrio proporciona una valiosa información sobre el comportamiento de éste, especialmente si se trata de un sistema no lineal, ya que estos puntos son candidatos ideales

para el estudio de estos sistemas mediante técnicas de linealización. Una vez diseñado el controlador, la obtención de los estados de equilibrio del sistema realimentado puede ser útil para comprobar que el diseño se ha realizado adecuadamente, así como para poder aplicar análisis de estabilidad a dichos estados.

Para el caso de los sistemas borrosos, y dada la inherente capacidad de este tipo de modelos para representar dinámicas no lineales, se hace necesaria la utilización de métodos numéricos capaces de resolver el sistema de ecuaciones no lineales que se plantea:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_{k1} \tilde{x}_k + \sum_{j=1}^m b_{j1} u_j &= 0 \\ \sum_{k=0}^n a_{k2} \tilde{x}_k + \sum_{j=1}^m b_{j2} u_j &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{k=0}^n a_{kn} \tilde{x}_k + \sum_{j=1}^m b_{jn} u_j &= 0 \end{aligned} \quad (50)$$

En el análisis de los sistemas dinámicos no lineales, el cálculo de los estados de equilibrio del sistema puede convertirse en un problema de envergadura. A diferencia de los sistemas lineales que tienen uno o infinitos estados de equilibrio, un sistema no lineal puede tener uno, ninguno, cualquier número finito o infinitos estados de equilibrio. En este trabajo se propone emplear métodos numéricos para resolver el sistema de ecuaciones no lineales dado en (50), concretamente el método de Levenberg-Marquardt (Levenberg, 1944, Moré, 1977). Este algoritmo requiere de un punto inicial para comenzar la búsqueda. Con objeto de maximizar las posibilidades de encontrar todos los estados de equilibrio existentes, se procede a inicializar el algoritmo mediante un barrido de puntos a lo largo de todo el universo de discurso, tanto de las variables de estado, como de las variables de entrada del sistema. Existen otras alternativas tanto dentro del ámbito de los algoritmos numéricos como en el de los bioinspirados para poder realizar esta búsqueda, pero los autores se han decantado por el algoritmo de Levenberg-Marquardt por ofrecer una rápida convergencia y precisión en los resultados. Según nuestra propia experiencia, este algoritmo inicializado en una malla de puntos es capaz de encontrar los múltiples estados de equilibrio que pueden presentarse en un sistema no lineal con mayor rapidez que los algoritmos genéticos.

El funcionamiento del algoritmo de Levenberg-Marquardt requiere del uso de la matriz Jacobiana del sistema, la cual puede aproximarse o calcularse de forma explícita para mejorar la convergencia. El cálculo de la matriz jacobiana de un modelo borroso TS se ha resuelto de forma general en la sección anterior, por lo que puede incluirse en el algoritmo numérico para mejorar su precisión y velocidad de convergencia.

La misma matriz jacobiana empleada para la resolución de los estados de equilibrio puede emplearse para linealizar el sistema en cada una de las soluciones obtenidas. De esta forma también es posible estudiar las características de los estados de equilibrio encontrados a partir de los autovalores de la matriz dinámica del sistema linealizado. Este análisis puede ayudar a

comprender la dinámica del sistema, su estabilidad local, y a los ojos de un experto, incluso se pueden observar comportamientos más complejos como bifurcaciones o ciclos límite.

#### 4.2. Localización de oscilaciones. Metodología de Poincaré

Además de los teoremas de Poincaré, Bendixon y Poincaré-Bendixon para el estudio de órbitas periódicas (Slotine y Li, 1991), existen un procedimiento también ideado por Henri Poincaré que permite la localización y el estudio de estabilidad de órbitas periódicas, las secciones de Poincaré o mapa de Poincaré (Abraham y Shaw, 1997). El mapa de Poincaré,  $P(\mathbf{x})$  consiste en reemplazar el flujo de  $n$ -ésimo orden de un sistema de tiempo continuo por un sistema de tiempo discreto de orden  $n - 1$ . Este sistema se construye a partir de las intersecciones de las órbitas del sistema original con una sección transversal, lo que permite distinguir las órbitas periódicas como sucesivos cortes en dicha sección.

Para un sistema autónomo de orden  $n$ , si este posee una órbita periódica  $\Gamma$ , y se aplica una sección  $\Sigma$  que la intercepte, la trayectoria que se inicie en un punto  $\mathbf{x}(0) \in \Sigma$  cortará  $\Sigma$  en sucesivos puntos  $\mathbf{x}(k)$ ,  $k = 1..n$ . Estos puntos constituyen el mapa de Poincaré y nos pueden dar información sobre la naturaleza de las soluciones de la ecuación diferencial, ya que hereda muchas de las propiedades del sistema original (Abraham y Shaw, 1997).

Cuando no se conoce la localización de un punto que pertenezca a  $\Sigma$  y  $\Gamma$ , llamémoslo  $\mathbf{x}_p$ , éste puede localizarse estudiando una secuencia de trayectorias cuyos puntos iniciales pertenezcan a la sección  $\Sigma$ , por ejemplo mediante simulación.  $\mathbf{x}_p$  será aquel punto de origen  $\mathbf{x}(0) \in \Sigma$  cuyo siguiente punto de corte  $\mathbf{x}(1) \in \Sigma$  esté a una distancia nula del original en la superficie de  $\Sigma$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(1)$ . Este punto permitirá caracterizar la oscilación, ya que el periodo de dicha oscilación será igual al tiempo que tarde la trayectoria en cortar  $\Sigma$ .

La estabilidad de la oscilación también puede estudiarse a partir del mapa de Poincaré ya que éste posee las siguientes propiedades:

- Cerca de una órbita periódica, el mapa de Poincaré es monótono  $C^1$ .
- La órbita periódica  $\Gamma$  que se origina en  $\mathbf{x}_p \in \Sigma$  es asintóticamente estable si  $\dot{P}(\mathbf{x}) < 1$ , e inestable si  $\dot{P}(\mathbf{x}) > 1$  para el caso unidimensional. En el caso  $n$ -dimensional, la estabilidad de la órbita  $\Gamma$  vendrá dada por los autovalores de la aproximación lineal de  $P(\mathbf{x})$  en  $\mathbf{x}_p$ .

## 5. Ejemplos

En esta sección se presentan dos ejemplos de análisis a partir de sus modelos borrosos de sistemas no lineales que inicialmente se considerarán desconocidos.

### 5.1. Circuito con diodo túnel

Sea el circuito diodo-túnel mostrado en la figura 1, donde  $R = 1,5 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 2 \text{ pF}$  y  $L = 5 \mu\text{H}$ ,  $x_1(t) = v_C(t)$ ,  $x_2(t) = i_L(t)$  son las variables de estado del sistema, y  $h(v)$  la característica

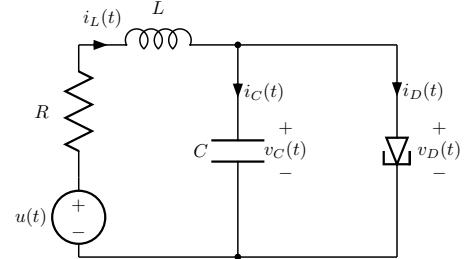


Figura 1: Circuito diodo túnel.

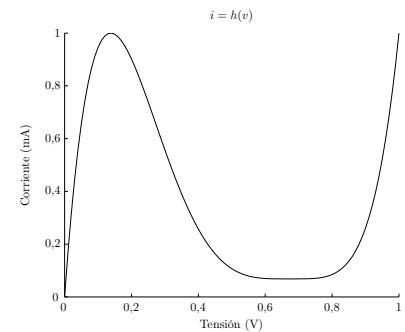


Figura 2: Característica V-I del diodo túnel.

$v_D - i_D$  no lineal del diodo-túnel mostrada en la figura 2 (Chua et al., 1987).

Suponiendo desconocida la dinámica del sistema, el procedimiento a seguir es obtener un modelo borroso del sistema a partir de datos de entrada-salida, y analizar a continuación dicho modelo con objeto de extraer conclusiones sobre la dinámica del sistema.

Para modelar el sistema se ha empleado un conjunto de 3000 datos distribuidos uniformemente en el universo de discurso  $x_1(t) \in [0, 1]$ ,  $x_2(t) \in [0, 2]$  y  $u(t) \in [0, 2]$ . Se han generado 20 reglas mediante el algoritmo de *clustering c-means* (Bezdek et al., 1984) para el modelado de  $\dot{x}_1(t)$  y 2 reglas para  $\dot{x}_2(t)$ . Realizando el ajuste de los parámetros mediante el algoritmo neuroborroso ANFIS (Jang, 1993) se han obtenido unos errores cuadráticos medios (MSE) durante la validación con otro conjunto de datos de  $0,096 \text{ V/ns}$  y  $1,46 \times 10^{-9} \text{ mA/ns}$ , respectivamente.

A continuación se ha empleado el algoritmo de minimización de Levenberg-Marquardt (Levenberg, 1944, Moré, 1977) para buscar las soluciones al sistemas de ecuaciones planteado en (50). Para ello se ha partido de una malla de puntos iniciales cuyos límites coinciden con el universo de discurso de cada una de las variables del sistema, empleando un incremento de 0,05 en todas ellas. En la figura 3 se muestran las soluciones del sistema real junto con las soluciones obtenidas por el algoritmo numérico sobre el modelo borroso, descartando aquellas que se sitúan fuera del universo de discurso por carecer de validez.

Empleando la linealización exacta desarrollada en este artículo se han obtenido los modelos linealizados en cada uno de los estados de equilibrio mostrados en la figura, y se han caracterizado según su comportamiento (según los tipos de autová-

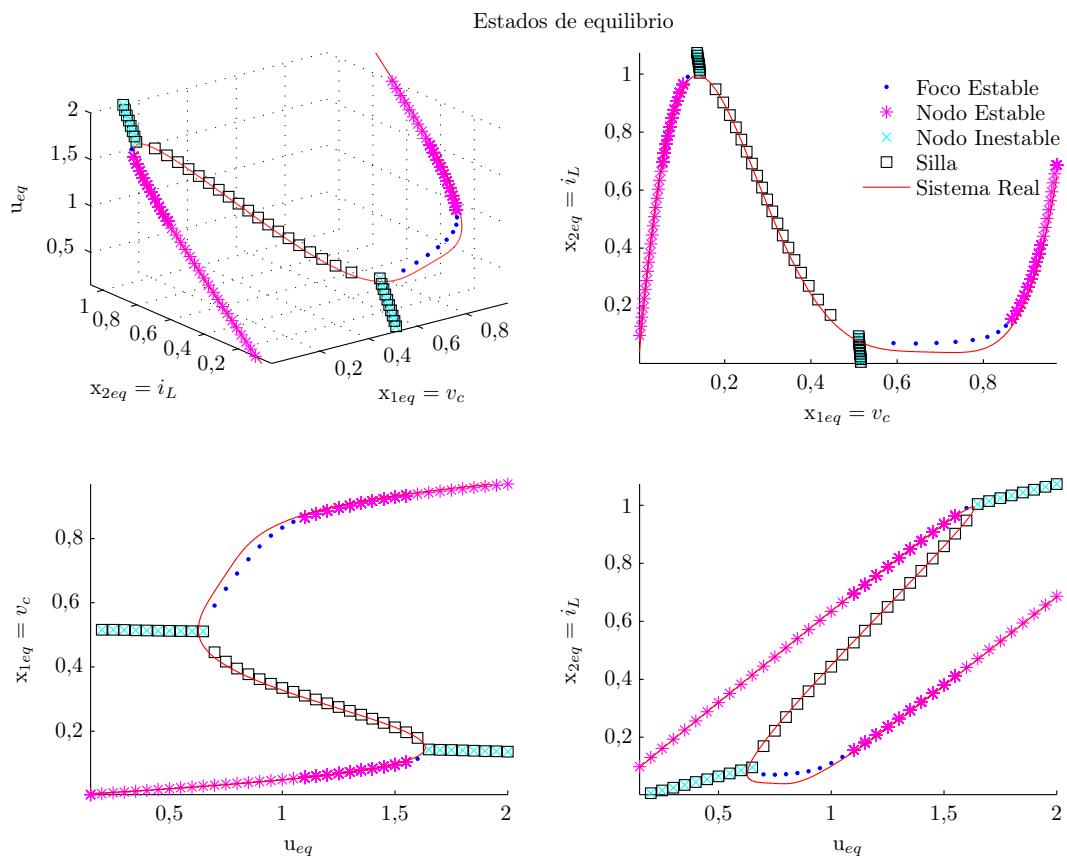


Figura 3: Estados de equilibrio localizados dentro del universo de discurso del modelo borroso.

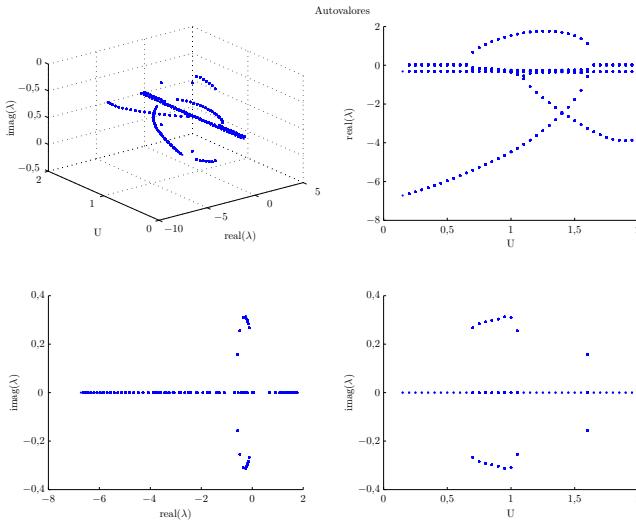


Figura 4: Autovalores de los estados de equilibrio localizados.

lores de la matriz dinámica del sistema linealizado). Como se puede apreciar en la figura, los estados de equilibrios del sistema real han sido hallados con bastante exactitud, incluso su tipo se corresponde con el obtenido a partir del modelo borroso. Cabe mencionar que el algoritmo numérico ha localizado una serie de estados de equilibrio en el modelo borroso que no existen en el sistema real. Este error puede deberse al propio error inherente de modelado o al algoritmo de minimización. Al menos en este caso, estos estados son fácilmente descartables porque, a diferencia del resto, no presentan un tipo de equilibrio coherente entre sí, coincidiendo prácticamente en un mismo punto distinto tipos de estados de equilibrio.

En la figura 4 se muestran los autovalores correspondientes al sistema linealizado en los estados de equilibrio localizados por el algoritmo numérico. Dichos autovalores se han calculado a partir de la linealización del modelo borroso.

Observando los resultados presentados anteriormente, se puede comprobar que es posible obtener una gran cantidad de información sobre un sistema desconocido a partir de un modelo borroso del mismo, por ejemplo la existencia de múltiples estados de equilibrio o la aparición de bifurcaciones relacionadas con su número. Tanto la localización aproximada de los estados de equilibrio, como su estabilidad y comportamientos locales derivados de los autovalores del sistema linealizado, proporcionan una idea general del comportamiento del sistema en un amplio rango de funcionamiento, y puede ayudar al ingeniero de control a interpretar el comportamiento del sistema real e incluso ayudarlo a decidir sobre la estrategia de control a aplicar. Evidentemente, los resultados serán más fiables cuanto menor sea el error del modelo obtenido, y pueden ser completamente erróneos si los errores de modelado son excesivos. La posibilidad de la existencia de este tipo de errores debe ser siempre tenida en cuenta a la hora de analizar un sistema realmente desconocido, para no realizar interpretaciones erróneas sobre el funcionamiento del sistema.

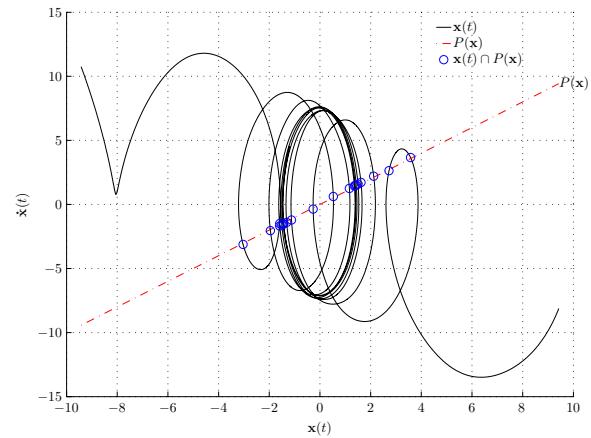


Figura 5: Retrato de Fase y sección de Poincaré.

## 5.2. Localización y estudio de órbitas periódicas

Sea el sistema

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \cos(1,6\pi t) - 2,4\pi \sin(1,6\pi t) \quad (51)$$

supuesto desconocido, pero del que se dispone de un conjunto de datos de entrada/salida, se va a estudiar la presencia de órbitas periódicas en el mismo, caracterizándolas y estudiando su estabilidad en base a un modelo borroso del sistema. Para ello se ha modelado a partir de 1000 datos de entrada/salida distribuidos uniformemente en el universo de discurso de  $x \in [-3\pi, 3\pi]$  mediante un modelo TS. Se han generado 60 reglas mediante el algoritmo de *clustering* c-means (Bezdek et al., 1984), y posteriormente se han ajustado sus parámetros mediante el algoritmo neuroborroso ANFIS (Jang, 1993), obteniéndose un error cuadrático medio (MSE) durante la validación con otro conjunto de datos de 0,182.

El comportamiento del sistema (51) puede observarse en el retrato de fase de la figura 5, realizado a partir del modelo borroso. En esta figura se ha trazado la sección de Poincaré  $P(x)$  que se utilizará para su análisis, y se han dibujado los puntos de corte de dos trayectorias (las iniciadas en  $-3\pi$  y en  $3\pi$ ) con dicha sección. Analizando los incrementos producidos en el sistema discreto  $\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(0) \in P(x)$  para distintos estados iniciales de la simulación, mostrados en la figura 6, es posible localizar un estado inicial perteneciente tanto a la sección de Poincaré como a la oscilación,  $x_p \approx 1,4848$ , y estudiando su periodo, se llega a la conclusión de que el periodo de la oscilación es de 1,2438 segundos. En este caso no se ha obtenido por simulación el punto exacto, por lo que se ha ponderado su valor entre los 2 puntos obtenidos más cercanos. Para el sistema real, este punto está situado aproximadamente en 1,4813 y el periodo de la oscilación es de 1,25 segundos, con lo que el procedimiento sobre el modelo borroso ha proporcionado un valor muy similar al real. En la figura 7 se muestran varias trayectorias y la trayectoria iniciada en  $\mathbf{x}_p$ .

La figura 8 muestra los puntos de intersección de la trayectoria originada en  $\mathbf{x}(0) = -3\pi$  con la sección de Poincaré  $P(x)$ . Finalmente, analizando  $\Delta\mathbf{x}(k)$  puede determinarse la estabilidad de la oscilación. En este caso, en las cercanías del punto  $\mathbf{x}_p$

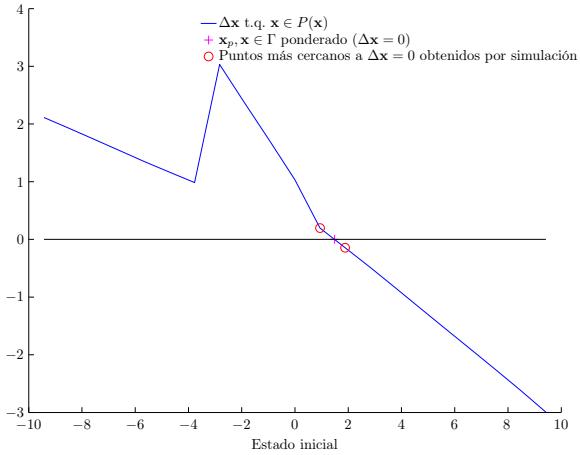


Figura 6: Mapa de Poincaré.

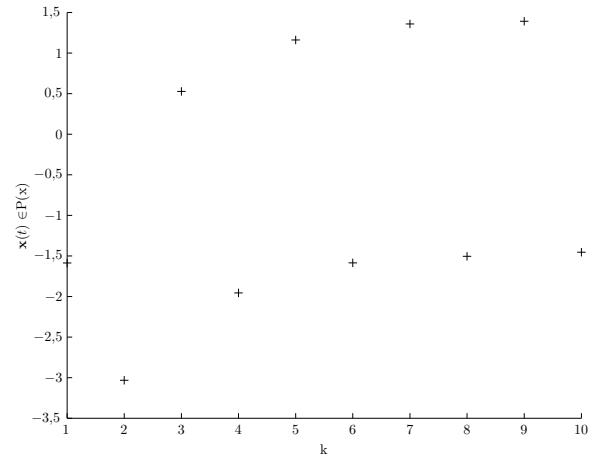
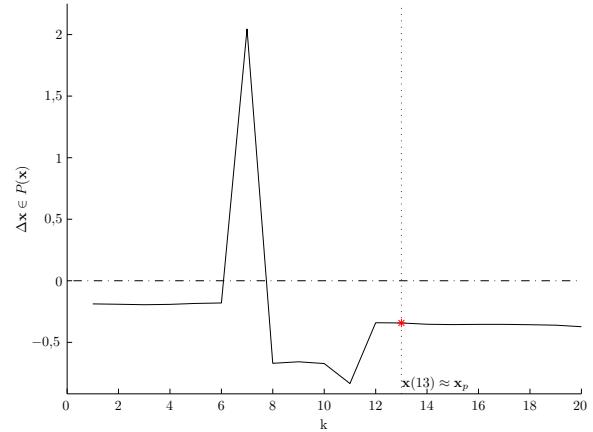
Figura 8: Mapa de Poincaré para la trayectoria  $x(0) = -3\pi$ .

Figura 9: Estudio de estabilidad de la oscilación localizada.

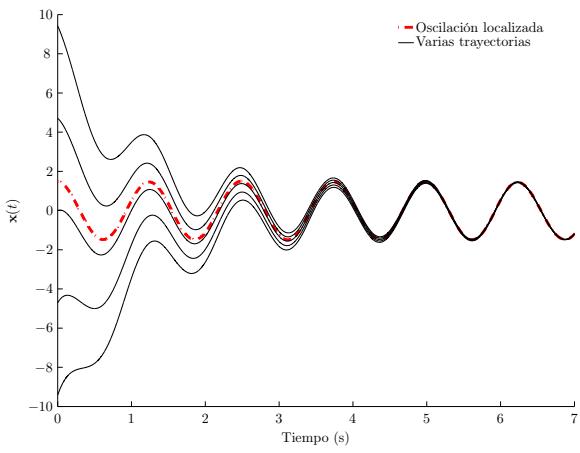


Figura 7: Simulación y oscilación localizada.

$\Delta x(k) < 0$ , por lo que queda demostrada formalmente la estabilidad de la oscilación a partir del estudio del modelo borroso del sistema (ver figura 9).

## 6. Conclusiones

En este artículo se ha planteado el análisis dinámico de un sistema desconocido a través de la obtención de un modelo borroso tipo Takagi-Sugeno a partir de datos de entrada-salida del mismo. Se ha demostrado mediante varios ejemplos cómo se puede extraer información muy valiosa únicamente a partir del análisis del modelo borroso, como la localización de los estados de equilibrio de un sistema y el estudio de su estabilidad local, así como la presencia y estabilidad de oscilaciones en el sistema.

## English Summary

**Formal methodology for analyzing the dynamic behavior of nonlinear systems using fuzzy logic**

Having the ability to analyze a system from a dynamic point of view can be very useful in many circumstances (industrial systems, biological, economical, ...). The dynamic analysis of a system allows to understand its behavior and response to different inputs, open loop stability, both locally and globally, or if it is affected by nonlinear phenomena, such as limit cycles, or bifurcations, among others. If the system is unknown or its dynamic is complex enough to obtain its mathematical model, in principle it would not be possible to make a formal dynamic analysis of the system. In these cases, fuzzy logic, and more specifically fuzzy TS models is presented as a powerful tool for analysis and design. The TS fuzzy models are universal approximators both of a function and its derivative, so it allows modeling highly nonlinear systems based on input/output data. Since a fuzzy model is a mathematical model formally speaking, it is possible to study the dynamic aspects of the real system that it models such as in the theory of nonlinear control.

This article describes a methodology for obtaining the equilibrium states of a generic nonlinear system, the exact linearization of a completely general fuzzy model, and the use of the Poincaré's methodology for the study of periodic orbits in fuzzy models. From this information it is possible to study the local stability of the equilibrium states, the dynamics of the system in its environment, and the presence of oscillations, yielding valuable information on the dynamic behavior of the system.

#### Keywords:

Dynamic analysis dynamic systems equilibrium state fuzzy control linearization fuzzy modeling Poincaré's methodology stability Takagi-Sugeno (TS) model

#### Agradecimientos

Este artículo es una contribución del proyecto DPI2013-43870-R financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad, y del proyecto TEP-6124 financiado por la Junta de Andalucía. Ambos proyectos están cofinanciados con fondos FEDER.

#### Referencias

- Abraham, R. H., Shaw, C. D., 1997. *Dynamics: The Geometry of Behavior*. Aerial Press, Incorporated.
- Al-Hadithi, B. M., Jiménez, A., Matía, F., Andújar, J. M., Barragán, A. J., Aug. 2014. New concepts for the estimation of Takagi-Sugeno model based on extended Kalman filter. En: Matía, F., Marichal, G. N., Jiménez, E. (Eds.), *Fuzzy Modeling and Control: Theory and Applications*. Vol. 9 of *Atlantis Computational Intelligence Systems*. Atlantis Press, pp. 3–24.  
DOI: 10.2991/978-94-6239-082-9\_1
- Al-Hadithi, B. M., Jiménez Avello, A., Matía, F., Sep. 2012. New methods for the estimation of Takagi-Sugeno model based extended Kalman filter and its applications to optimal control for nonlinear systems. *Optimal Control Applications and Methods* 33 (5), 552–575.  
DOI: 10.1002/oca.1014
- Andújar, J. M., Aroba, J., Torre, M. L. d. I., Grande, J. A., Jan. 2006. Contrast of evolution models for agricultural contaminants in ground waters by means of fuzzy logic and data mining. *Environmental Geology* 49 (3), 458–466.  
DOI: 10.1007/s00254-005-0103-2
- Andújar, J. M., Barragán, A. J., Sep. 2005. A methodology to design stable nonlinear fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems* 154 (2), 157–181.  
DOI: 10.1016/j.fss.2005.03.006
- Andújar, J. M., Barragán, A. J., Apr. 2014. Hybridization of fuzzy systems for modeling and control. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)* 11 (2), 127–141.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.riai.2014.03.004>
- Andújar, J. M., Barragán, A. J., Al-Hadithi, B. M., Matía, F., Jiménez, A., Aug. 2014a. Stable fuzzy control system by design. En: Matía, F., Marichal, G. N., Jiménez, E. (Eds.), *Fuzzy Modeling and Control: Theory and Applications*. Vol. 9 of *Atlantis Computational Intelligence Systems*. Atlantis Press, pp. 69–94.  
DOI: 10.2991/978-94-6239-082-9\_4
- Andújar, J. M., Barragán, A. J., Al-Hadithi, B. M., Matía, F., Jiménez, A., Aug. 2014b. Suboptimal recursive methodology for Takagi-Sugeno fuzzy models identification. En: Matía, F., Marichal, G. N., Jiménez, E. (Eds.), *Fuzzy Modeling and Control: Theory and Applications*. Vol. 9 of *Atlantis Computational Intelligence Systems*. Atlantis Press, pp. 25–47.  
DOI: [http://dx.doi.org/10.2991/978-94-6239-082-9\\_2](http://dx.doi.org/10.2991/978-94-6239-082-9_2)
- Andújar, J. M., Barragán, A. J., Gegúndez, M. E., Oct. 2009. A general and formal methodology for designing stable nonlinear fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 17 (5), 1081–1091.  
DOI: 10.1109/TFUZZ.2009.2021984
- Andújar, J. M., Bravo, J. M., Mar. 2005. Multivariable fuzzy control applied to the physical-chemical treatment facility of a cellulose factory. *Fuzzy Sets and Systems* 150 (3), 475–492.  
DOI: 10.1016/j.fss.2004.03.023
- Andújar, J. M., Bravo, J. M., Peregrín, A., Dec. 2004. Stability analysis and synthesis of multivariable fuzzy systems using interval arithmetic. *Fuzzy Sets and Systems* 148 (3), 337–353.  
DOI: 10.1016/issn = 0165-0114, /j.fss.2004.01.008
- Angelov, P., Buswell, R., Oct. 2002. Identification of evolving fuzzy rule-based models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 10 (5), 667–677.  
DOI: 10.1109/TFUZZ.2002.803499
- Angelov, P. P., Filev, D. P., Feb. 2004. An approach to online identification of Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics* 34 (1), 484–498.  
DOI: 10.1109/TSMCB.2003.817053
- Aroba, J., Grande, J. A., Andújar, J. M., De La Torre, M. L., Riquelme, J. C., Sep. 2007. Application of fuzzy logic and data mining techniques as tools for qualitative interpretation of acid mine drainage processes. *Environmental Geology* 53 (1), 135–145.  
DOI: 10.1007/s00254-006-0627-0
- Babuška, R., Mar. 1995. Fuzzy modeling - a control engineering perspective. En: *Proceedings of FUZZ-IEEE/IFES'95*. Vol. 4. Yokohama, Japan, pp. 1897–1902.  
DOI: 10.1109/FUZZY.1995.409939
- Babuška, R., Verbruggen, H. B., Mar. 1995. A new identification method for linguistic fuzzy models. En: *Proceedings of FUZZ-IEEE/IFES'95*. Vol. 4. Yokohama, Japan, pp. 905–912.  
DOI: 10.1109/FUZZY.1995.409939
- Barragán, A. J., Al-Hadithi, B. M., Jiménez, A., Andújar, J. M., May 2014. A general methodology for online TS fuzzy modeling by the extended kalman filter. *Applied Soft Computing* 18 (0), 277–289.  
DOI: 10.1016/j.asoc.2013.09.005
- Bezdek, J. C., Ehrlich, R., Full, W. E., 1984. FCM: The fuzzy c-means clustering algorithm. *Computers and Geosciences* 10 (2-3), 191–203.  
DOI: 10.1016/0098-3004(84)90020-7
- Chua, L. O., Desoer, C. A., Kuh, E. S., 1987. *Linear and nonlinear circuits*. McGraw-Hill series in electrical and computer engineering: Circuits and systems. McGraw-Hill Book Company, New York.
- Denai, M. A., Palis, F., Zeghbib, A. H., Jun. 2007. Modeling and control of nonlinear systems using soft computing techniques. *Applied Soft Computing* 7 (3), 728–738.  
DOI: 10.1016/j.asoc.2005.12.005
- Grande, J. A., Andújar, J. M., Aroba, J., De La Torre, M. L., Beltrán, R., Apr. 2005. Precipitation, pH and metal load in AMD river basins: An application of fuzzy clustering algorithms to the process characterization. *Journal of Environmental Monitoring* 7 (4), 325–334.  
DOI: 10.1039/b410795k
- Horikawa, S.-I., Furuhashi, T., Uchikawa, Y., Sep. 1992. On fuzzy modeling

- using fuzzy neural networks with the back-propagation algorithm. *IEEE Transactions on Neural Networks* 3 (5), 801–806.  
DOI: 10.1109/72.159069
- Jang, J.-S. R., May 1993. ANFIS: adaptive-network-based fuzzy inference system. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 23 (3), 665–685.  
DOI: 10.1109/21.256541
- Jiménez, A., Aroba, J., de la Torre, M. L. d. l., Andújar, J. M., Grande, J. A., 2009. Model of behaviour of conductivity versus pH in acid mine drainage water, based on fuzzy logic and data mining techniques. *Journal of Hydroinformatics* 2 (11), 147–153.  
DOI: 10.2166/hydro.2009.015
- Kosko, B., Nov. 1994. Fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Computers* 43 (11), 1329–1333.  
DOI: 10.1109/12.324566
- Kreinovich, V., Hguyen, H. T., Yam, Y., Jun. 2000. Fuzzy systems are universal approximators for a smooth function and its derivatives. *International journal of Intelligent Systems* 15 (6), 565–574.  
DOI: 10.1002/(SICI)1098-111X(200006)15:6<565::AID-INT6>3.0.CO;2-0
- Levenberg, K., 1944. A method for the solution of certain problems in least squares. En: *Quart. Appl. Math.* Vol. 2. pp. 164–168.
- López-Baldán, M. J., García-Cerezo, A., Cejudo, J. M., Romero, A., Apr. 2002. Fuzzy modeling of a thermal solar plant. *International Journal of Intelligent Systems* 17 (4), 369–379.  
DOI: 10.1002/int.10026
- Marquez, H. J., 2003. Nonlinear control systems. Analysis and design. John Wiley & Sons, Inc.
- Mencattini, A., Salmeri, M., Salsano, A., Aug. 2005. Sufficient conditions to impose derivative constraints on MISO Takagi–Sugeno fuzzy logic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 13 (4), 454–467.  
DOI: 10.1109/TFUZZ.2004.841742
- Moré, J. J., 1977. The Levenberg–Marquardt algorithm: Implementation and theory. En: Watson, G. (Ed.), *Numerical Analysis*. Springer Verlag, Berlin, pp. 105–116.
- Nguyen, H. T., Sugeno, M., Tong, R. M., Yager, R. R., 1995. Theoretical aspects of fuzzy control. John Wiley Sons, New York, NY, USA.
- Nijmeijer, H., Schaft, A. v. d., 1990. *Nonlinear dynamical control systems*. Springer Verlag, Berlin.
- Sastry, S., 1999. *Nonlinear system: analysis, stability, and control*. Springer, New York.
- Slotine, J.-J. E., Li, W., 1991. *Applied nonlinear control*. Prentice-Hall, NJ.
- Takagi, T., Sugeno, M., 1985. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 15 (1), 116–132.
- Wang, L.-X., 1992. Fuzzy systems are universal approximators. En: *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. San Diego, CA, USA, pp. 1163–1170.  
DOI: 10.1109/FUZZY.1992.258721
- Wang, L. X., 1994. *Adaptive fuzzy systems and control*. Prentice Hall, New Jersey.
- Wang, L.-X., 1997. *A course in fuzzy systems and control*. Prentice Hall, New Jersey, USA.
- Wiggins, S., Oct. 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, 2nd Edición. Texts in Applied Mathematics. Springer.
- Wong, L., Leung, F., Tam, P., Jul. 1997. Stability design of TS model based fuzzy systems. En: *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Vol. 1. Barcelona, Spain, pp. 83–86.  
DOI: 10.1109/FUZZY.1997.616349