

Análisis de un Sistema de Control Híbrido Adaptativo que Estabiliza Órbitas Periódicas Inestables Embebidas en Atractores Caóticos

Manuel Prian Rodríguez^{*}, Manuel J. López Sánchez, J. Francisco Moreno Verdulla

Dpto de Ingeniería en Automática, Electrónica, Arquitect.y Redes de Computadores. Universidad de la Cádiz.. Avda de la Universidad nº 3. 11510. Pto Real, Cádiz, España.

Resumen

En este trabajo, se propone un método de control híbrido adaptativo, que estabiliza sistemas caóticos en la vecindad de órbitas periódicas inestables embebidas en atractores extraños. El método está basado en la acción conjunta de dos controladores (uno en tiempo continuo y otro en tiempo discreto) así como en el fenómeno de sincronización adaptativa de la planta con un modelo de referencia conducido. El método permite utilizar, en determinadas ocasiones, un modelo parcial de referencia conducido. Se realiza un análisis de estabilidad del sistema de control y se implementa un algoritmo para facilitar la aplicación del método. Finalmente, se muestran resultados de simulación numérica. Copyright © 2015 CEA. Publicado por Elsevier España. S.L.U. Todos los derechos reservados

Palabras Clave:

Control híbrido, control adaptativo, órbita periódica inestable, modelo de referencia, sincronización, sistemas caóticos

1. Introducción

El control de los sistemas dinámicos caóticos ha despertado un interés creciente desde la década de los 90. La compleja dinámica inherente a dichos sistemas, tales como, ser hipersensibles a pequeños cambios en las condiciones iniciales, o la extrema sensibilidad a algunos de sus parámetros, son un problema añadido para el uso de las técnicas tradicionales de control. Las órbitas periódicas inestables (“Unstable Periodic Orbits”, UPOs) son ciclos límite inestables que se encuentran embebidos en el atractor extraño de un sistema caótico. La estabilización de UPOs asociadas a los atractores extraños ha fomentado una investigación multidisciplinar muy activa. El primer control del caos fue propuesto por Ott, Grebogi y Yorke (OGY) (Ott *et al.*, 1990) y estabiliza sistemas caóticos en torno a UPOs conocidas a priori mediante la utilización de pequeñas perturbaciones discontinuas de un parámetro. Años después K. Pyragas (Pyragas, 1992) presenta su método de control basado en retroalimentación del vector de estados empleando una señal de control proporcional a la diferencia entre el estado retrasado un tiempo T (igual al periodo de la UPO a estabilizar) y el estado actual. Los métodos de control relacionados con el control impulsivo, permiten en ocasiones obtener UPOs y pueden verse en (Matías *et al.*, 1994), (Kozlov *et al.*, 1997), (González, 1998), (Yang, 1999), (Piccardi *et al.*, 2000), (Sun *et al.*, 2003), (Guan *et al.*, 2004), (Tian *et al.*, 2004), (López *et al.*, 2006), y (Verdulla *et al.*, 2009, 2011). Un método de control que utiliza un modelo de

referencia de la planta, basado en la sincronización adaptativa, fue propuesto por H. Fatechi, (Fatechi, *et al.*, 2009) y permite estabilizar sistemas caóticos en torno a órbitas periódicas estables y puntos de equilibrio que pertenecen a su dinámica de bucle abierto. No obstante, en dicho método, la señal de control no tiende a reducir su amplitud con el tiempo en ausencia de perturbaciones que afecten a los parámetros y variables de estado de la planta. En este trabajo se propone un método de control híbrido adaptativo que permite estabilizar sistemas caóticos en la vecindad de una de sus UPOs. El método permite reducir el esfuerzo de control necesario para la estabilización de la planta, puesto que, parte de la señal de control tiende a disminuir su amplitud con el transcurso del tiempo en ausencia de perturbaciones que afecten a los parámetros y/o variables de estado de la planta.

El método de control híbrido adaptativo propuesto está basado en la integración del método de control híbrido del caos que puede verse en (Prian, *et al.*, 2011), y del método de control adaptativo propuesto en (Prian, *et al.*, 2012). El acoplo propuesto, ver Fig. (1), de los dos métodos de control citados, permite que el sistema de control adquiera una nueva propiedad emergente, a saber, la estabilización robusta de la planta en la vecindad de una UPO perteneciente a su dinámica de bucle abierto.

El trabajo se ha organizado de la siguiente manera: en la sección segunda, se definen dos leyes de control en tiempo continuo y una ley de adaptación de parámetros, así como una ley de control en tiempo discreto, y también algunos conceptos necesarios para la síntesis del método de control propuesto. La sección tercera muestra un análisis de estabilidad del sistema de control. En la sección cuarta se implementa un algoritmo que facilita el ajuste de los parámetros del sistema. En la sección

^{*} Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: manuel.prian@uca.es (Manuel Prian Rodríguez), manueljesus.lopez@uca.es (Manuel J. López Sánchez), francisco.verdulla@uca.es (J. Francisco Moreno Verdulla)

quinta se muestran resultados de simulación numérica. En la sección sexta se dan las conclusiones.

2. Método de control híbrido adaptativo

2.1. Descripción funcional del sistema de control híbrido adaptativo

Los sistemas sincronizados con un submodelo de referencia conducido pueden verse en (Pecora *et al.*, 1990). Partiendo de este concepto se define el modelo de referencia conducido (MRC) como un modelo de referencia (MR) de la planta, en el cual, se han sustituido las n variables de estado de su vector de campo por medidas de las correspondientes variables de estado de la planta. Un modelo parcial de referencia conducido (MPRC) es un submodelo de un MRC.

En la Fig. (1) se muestra el diagrama de bloques estructural del sistema de control híbrido adaptativo. Se observan, en líneas discontinuas, los bloques que forman parte del controlador en tiempo continuo y del controlador en tiempo discreto. El controlador en tiempo continuo se compone de los siguientes bloques: un MRC por las medidas de las variables de estado de la planta o proceso a controlar, una condición de evento, una ley de adaptación de parámetros y dos leyes de control en tiempo continuo, la primera de ellas escalar. El controlador en tiempo discreto está formado por un solo bloque que genera una ley de control escalar en tiempo discreto.

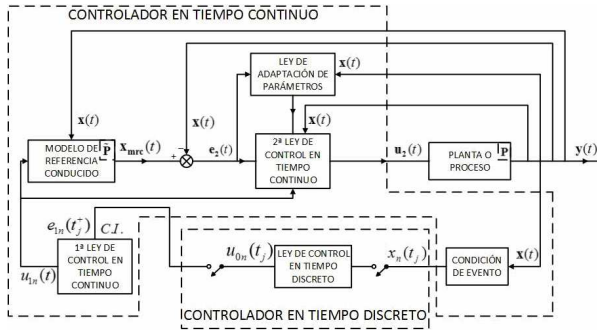


Figura 1: Diagrama de bloques estructural del sistema de control híbrido adaptativo

Funcionalmente, el sistema de control opera de la siguiente manera: cuando el vector de estado de la planta $x(t)$ en bucle cerrado verifique una determinada condición llamada de eventos de control (CEC, ver subsección 2.4), en ciertos instantes de tiempo t_j ($j=1,2,\dots$), la medida de la componente n -ésima del vector de estados $x(t)$ de la planta toma el valor $\tilde{x}_n(t_j)$, usado para generar la ley de control escalar en tiempo discreto $u_{0n}(t_j)$ que se emplea para cambiar la condición inicial de la primera ley de control en tiempo continuo $u_{1n}(t)$, en los instantes t_j^+ siendo $t_j^+ = t_j + \delta_j$ ($j=1,2,\dots$) donde δ_j es un cierto retardo asociado al procesamiento de la señal. Esta primera ley de control en tiempo continuo se aplica al MRC, sin pérdida de generalidad, por su entrada n -ésima. El vector de error $e_2(t)$, dado por la

diferencia entre la variable de estado $x_{mrc}(t)$ del MRC y el vector de estado medido de la planta a controlar, se emplea en la ley de adaptación de parámetros y en la segunda ley de control en tiempo continuo $u_2(t)$, siendo esta última aplicada a la planta a través de sus entradas de control. El proceso descrito permite estabilizar la planta de forma robusta en torno a una de sus UPOs, empleando parámetros adaptativos.

2.2. Planta o proceso a controlar

Se considera que la planta o proceso a controlar queda definida por un sistema dinámico n -dimensional no lineal en tiempo continuo cuya representación de estados viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= F(x(t), u_2(t)) = f(x(t)) + P g(x(t)) + u_2(t) \\ y(t) &= x(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Con $x(t) \in U$, U es un conjunto abierto de \mathbb{R}^n donde $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ es el vector de estado de dimensión $(nx1)$, $u_2(t) = [u_1(t), \dots, u_n(t)]^T$ es el vector de entradas de control de dimensión $(nx1)$, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial expresado por el vector función de dimensión $(nx1)$ $F(x(t), u_2(t)) = [F_1(x(t), u_2(t)), \dots, F_n(x(t), u_2(t))]^T$; $f(x(t))$ es una función vectorial expresada por el vector función $f(x(t)) = [f_1(x(t)), \dots, f_n(x(t))]^T$ de dimensión $(nx1)$; $g(x(t)) = [g_1(x(t)), g_2(x(t))]^T$ es un vector función de dimensión $(2nx1)$, siendo $g_1(x(t)) = [g_{11}(x(t)), \dots, g_{n1}(x(t))]$ y $g_2(x(t)) = [g_{12}(x(t)), \dots, g_{n2}(x(t))]$ vectores de dimensión $(1xn)$; $P = [P_1 P_2]$ es una matriz de dimensión $(nx2n)$ con estructura de bloques matriciales, donde $P_1 = \text{diag}(P_{11}, \dots, P_{n1})$ y $P_2 = \text{diag}(P_{12}, \dots, P_{n2})$ son matrices diagonales de dimensión (nxn) cuyos elementos son los parámetros de la planta en valor absoluto, habiéndose incorporado los signos de dichos parámetros en los elementos del vector función $g(x(t))$; $y(t)$ es el vector de salida de la planta que se supone igual al vector de estado $x(t)$ el cual es medible. Se asume que las medidas realizadas a las variables de estado de la planta no presentan ruido de medida. Se asume también que los parámetros de la planta se han desviado de sus valores nominales, y que la misma en bucle abierto presenta comportamiento caótico para unas determinadas condiciones iniciales y valores concretos de sus parámetros.

2.3. Hipersuperficie de control

La hipersuperficie de Poincaré, en adelante, hipersuperficie de control (HSC), se implementa en el bloque detector de la condición de evento, ver Fig. (1). La HSC viene dada por:

$$\Sigma_p = \{x \in Q : S_p(x) = 0\}. \quad (2)$$

Donde Q es un conjunto abierto de \mathbb{R}^n , $S_p: Q \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^k , $k \geq 1$ tal que $\nabla S_p(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in \Sigma_p$ y $p \in (1, 2, \dots, n)$ indica una determinada hipersuperficie. Dicha HSC debe cumplir la condición de ser transversal en el abierto Q al flujo de la planta en bucle cerrado, cuya medida del vector de campo y dimensión ($n \times 1$) viene dado por $[\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_2(t))]^T$, siendo $\mathbf{u}_2(t)$ la segunda ley de control en tiempo continuo. Por consiguiente, el producto escalar del vector gradiente $\nabla S_p(\mathbf{x})$ y dicho vector de campo deben cumplir, en los instantes de impacto t_k ($k=1, 2, \dots$) la condición $\langle \nabla S_p(\mathbf{x}(t_k)), \mathbf{F}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}_2(t_k)) \rangle \neq 0 \forall \mathbf{x}(t_k) \in \Sigma_p$. La HSC debe contener al menos un punto de una determinada UPO para que la respuesta de la planta controlada pueda ser estabilizada en un entorno de la misma.

2.4. Condiciones de impactos y de eventos de control

Se asume que la HSC Σ_p define dos regiones en el espacio de estados de la planta bajo control, $\Sigma_{p-} = \{\mathbf{x} \in H_- : S_p(\mathbf{x}) < 0\}$ $\Sigma_{p+} = \{\mathbf{x} \in H_+ : S_p(\mathbf{x}) > 0\}$ siendo $\Sigma_{p-} \cup \Sigma_p \cup \Sigma_{p+} \subset \mathbb{R}^n$. Cuando la trayectoria trazada por el vector de estado $\mathbf{x}(t)$ de la planta, viaja por el espacio de estados en el sentido de Σ_{p-} hacia Σ_{p+} , cortando la HSC Σ_p en los instantes de impacto t_k ($k=1, 2, \dots$) se dice que se ha cumplido una condición de impacto ascendente (CIA). En estos términos, cualquier subconjunto $\{t_j\}$ de instantes de impacto ascendente $\{t_k\}$, se denomina subconjunto de eventos de control ascendente, y a los instantes correspondientes t_j , instantes de evento de control ascendente (IECA). A la expresión $S_p(\mathbf{x}(t_j))^{\uparrow} = 0$ se denomina condición de evento de control ascendente (CECA). Asumiendo que $\{t_j\} = \{t_k\}$ para mayor claridad en la exposición del método, el subíndice j de la condición de evento tomará los valores ($j=k=1, 2, \dots$). De forma análoga se definen la condición de impactos descendente (CID), los instantes de evento de control descendente (IECD) y la condición de evento de control descendente (CECD) $S(\mathbf{x}(t_j))^{\downarrow} = 0$.

2.5. Ley de control en tiempo discreto

La ley de control en tiempo discreto $u_{0n}(t_j)$ se sintetiza mediante un filtro de evento discreto, que opera sobre la medida realizada a la n -ésima variable de estado de la planta cuando se verifique una determinada condición de evento y viene dada por:

$$\begin{aligned} u_{0n}(t_j) &= z_n(t_j) - x_n(t_j) \\ z_n(t_j) &= x_n(t_j) + a_n \sin(z_n(t_{j-1}) - x_n(t_j)) \end{aligned} \quad (3)$$

Donde $z_n(t_j) \in \mathbb{R}$ es la salida del filtro no lineal de evento discreto; $x_n(t_j)$ denota la componente n -ésima del vector de

estado de la planta en los instantes de evento de control t_j ; $\sin(\cdot)$ es la función senoidal y a_n es un parámetro de ajuste.

2.6. Primera ley de control en tiempo continuo

La primera ley de control en tiempo continuo $u_{1n}(t)$ es escalar y viene expresada por:

$$\begin{aligned} u_{1n}(t) &= K_{1n} e_{1n}(t) \\ \frac{de_{1n}(t)}{dt} &= -K_{1n} e_{1n}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Donde K_{1n} es el parámetro de control. La condición inicial dada en los instantes t_j^+ ($j=1, 2, \dots$) a la expresión $de_{1n}(t)/dt = -K_{1n} e_{1n}(t)$ viene dada por los valores $u_{0n}(t_j)$ ($j=1, 2, \dots$) de la ley de control en tiempo discreto, siendo t_j^+ los instantes de eventos de control retardados (IECR) expresados por $t_j^+ = t_j + \delta_j$ ($j=1, 2, \dots$) los cuales son instantes posteriores a los IEC, y donde δ_j es el tiempo de retardo empleado en el procesamiento de la medida $x_n(t_j)$ más el tiempo en cambiar la condición inicial. La primera ley de control dada por (4) es, según la presente definición, una ley de control continua a trozos de la forma $u_{1n}(t) = K_{1n} u_{0n}(t_j) \exp(-K_{1n}(t - t_j^+))$ para $t_j^+ \leq t < t_{j+1}^+$ ($j=1, 2, \dots$), y se aplica al MRC por su entrada n -ésima. El intervalo de tiempo que transcurre entre dos IEC consecutivos es el tiempo de vuelo, y el que transcurre entre el IECR y el IEC se denomina tiempo de vuelo reducido, éste último viene dado por:

$$T_j = t_{j+1} - t_j^+. \quad (5)$$

Dado que $T_j = (t_{j+1} - t_j^+) = t_{j+1} - t_j - \delta_j$, cuando sea $\delta_j = 0$ se tiene el tiempo de vuelo.

2.7. Modelo de referencia conducido

Como se dijo anteriormente, un MRC es un MR de la planta en el cual se han sustituido las n variables de estado de su vector de campo por medidas de las correspondientes variables de estado de la planta. El MRC genera el estado calculado $\mathbf{x}_{mrc}(t)$ que posibilita a la planta sincronizarse adaptativamente con él. Dicho MRC viene expresado por la siguiente ecuación de estado:

$$\frac{d\mathbf{x}_{mrc}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{u}_1(t). \quad (6)$$

Donde $\mathbf{x}(t) \in U$, U es un abierto en \mathbb{R}^n siendo $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ el vector de estado medido de la planta; $\mathbf{x}_{mrc}(t) = [x_{mrc1}, \dots, x_{mrcn}]^T$ es el vector de estado del MRC; $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{B}u_{1n}(t)$ es el vector de entradas de control de dimensión

($nx1$) siendo $\mathbf{B}=[0,0,\dots,0,1]^T$; $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ es una función vectorial expresada por el vector función $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))=[f_1(\mathbf{x}(t)),\dots,f_n(\mathbf{x}(t))]^T$ de dimensión ($nx1$); $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))=[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}(t)),\mathbf{g}_2(\mathbf{x}(t))]^T$ es un vector función de dimensión ($2nx1$), siendo $\mathbf{g}_1(\mathbf{x}(t))=[g_{11}(\mathbf{x}(t)),\dots,g_{n1}(\mathbf{x}(t))]$ y $\mathbf{g}_2(\mathbf{x}(t))=[g_{12}(\mathbf{x}(t)),\dots,g_{n2}(\mathbf{x}(t))]$ vectores de dimensión ($1xn$); $\tilde{\mathbf{P}}=[\tilde{\mathbf{P}}_1 \tilde{\mathbf{P}}_2]$ es una matriz de dimensión ($nx2n$) con estructura de bloques matriciales, siendo $\tilde{\mathbf{P}}_1=\text{diag}(\tilde{P}_{11},\dots,\tilde{P}_{n1})$ y $\tilde{\mathbf{P}}_2=\text{diag}(\tilde{P}_{12},\dots,\tilde{P}_{n2})$ matrices diagonales de dimensión (nxn) cuyos elementos pueden ser iguales a los parámetros originales de la planta, siendo $\tilde{P}_{i1}>0$, $\tilde{P}_{i2}>0$ ($i=1,2,\dots,n$), ya que sus signos se consideran incluidos en las correspondientes componentes del vector función $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$.

Si el MRC tiene algunas de sus ecuaciones diferenciales cuyos parámetros son constantes, y además, la primera ley de control en tiempo continuo no se aplica a ninguna de ellas, entonces, dichas ecuaciones dinámicas se pueden suprimir del MRC, ya que en éstas tampoco se aplicaría la segunda ley de control en tiempo continuo, y por consiguiente, el MRC sería parcial, es decir, se tendría un modelo parcial de referencia conducido (MPRC).

El error entre las variables de estado del MRC y el vector de medidas de la planta viene dado por:

$$\mathbf{e}_2(t)=\mathbf{x}_{mrc}(t)-\mathbf{x}(t). \quad (7)$$

2.8. Ley de adaptación de parámetros

La ley de adaptación de parámetros empleada en el sistema de control queda expresada por la expresión con estructura de bloques matriciales siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{P}}(t)}{dt} &= [\mathbf{w}_1(t) \ \mathbf{w}_2(t)] \\ \mathbf{w}_1(t) &= \text{diag}[-C_{i1}g_{i1}(\mathbf{x}(t))e_{2i}(t)] \\ \mathbf{w}_2(t) &= \text{diag}[-C_{i2}g_{i2}(\mathbf{x}(t))e_{2i}(t)] \end{aligned} \quad (i=1,2,\dots,n). \quad (8)$$

Donde $\hat{\mathbf{P}}(t)$ es la matriz de parámetros adaptativos de dimensión ($nx2n$), $\mathbf{w}_1(t)$ y $\mathbf{w}_2(t)$ son matrices diagonales de dimensión (nxn) siendo los elementos de la diagonal principal los productos indicados en la misma y donde $e_{2i}(t)$ ($i=1,2,\dots,n$) son las componentes del vector de error $\mathbf{e}_2(t)$; $g_{i1}(\mathbf{x}(t))$ y $g_{i2}(\mathbf{x}(t))$ son las componentes del vector función $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$ y $C_{i1}>0$ y $C_{i2}>0$ son los parámetros de velocidad de adaptación.

2.9. Segunda ley de control en tiempo continuo

La segunda ley de control en tiempo continuo es la que finalmente se aplica a la planta por sus entradas de control y viene expresada por:

$$\mathbf{u}_2(t)=(\tilde{\mathbf{P}}-\hat{\mathbf{P}}(t))\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))+\mathbf{u}_1(t)+\mathbf{K}_2\mathbf{e}_2(t). \quad (9)$$

Donde $\mathbf{K}_2=\text{diag}(K_{211},\dots,K_{2nn})$ es una matriz diagonal de dimensión (nxn) cuyos elementos son los parámetros de la segunda ley de control en tiempo continuo.

3. Análisis de estabilidad

El siguiente análisis de estabilidad del sistema de control se realiza para encontrar un procedimiento que permita el ajuste de los parámetros del mismo. Dicho análisis se efectúa en cuatro fases: en la primera se estudia la sincronización adaptativa de la planta con el MRC, en la segunda se obtiene un sistema equivalente una vez pasado el transitorio de sincronización entre el MRC y la planta, en la tercera se analiza la estabilidad de un sistema auxiliar con una nueva ley de control, y en la cuarta fase, se muestra, que si el sistema auxiliar obtenido en la fase tres es asintóticamente estable, entonces el sistema equivalente de la fase dos también lo será.

3.1. Primera fase: Sincronización adaptativa de la planta con el MRC

La dinámica de error entre MRC y planta se haya derivando (7) con respecto del tiempo y sustituyendo los miembros de la parte derecha de (1) y (6) en la expresión resultante $d\mathbf{e}_2(t)/dt=d\mathbf{x}_{mrc}(t)/dt-d\mathbf{x}(t)/dt$, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_2(t)}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))+\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))+\mathbf{u}_1(t)- \\ &\quad -(\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))+\mathbf{P}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))+\mathbf{u}_2(t)). \end{aligned} \quad (10)$$

Sustituyendo ahora (9) en (10) se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{d\mathbf{e}_2(t)}{dt}=(\hat{\mathbf{P}}(t)-\mathbf{P})\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))-\mathbf{K}_2\mathbf{e}_2(t). \quad (11)$$

Se realiza en (11) el cambio de variable $\mathbf{P}'(t)=\hat{\mathbf{P}}(t)-\mathbf{P}$ con objeto de trasladar su punto de equilibrio al origen, obteniéndose conjuntamente con (8) el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_2(t)}{dt} &= \mathbf{P}'(t)\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))-\mathbf{K}_2\mathbf{e}_2(t) \\ \frac{d\mathbf{P}'(t)}{dt} &= [\text{diag}(-C_{i1}g_{i1}(\mathbf{x}(t))e_{2i}(t)) \ \text{diag}(-C_{i2}g_{i2}(\mathbf{x}(t))e_{2i}(t))] \\ &\quad (i=1,2,\dots,n). \end{aligned} \quad (12)$$

Donde el origen de coordenadas $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ es un equilibrio trivial.

Se emplea a continuación el segundo método de Lyapunov o método directo, para verificar que dicho equilibrio puede ser asintóticamente estable, bajo ciertas restricciones de sus parámetros. Se elige para ello una función V de Lyapunov definida en el espacio de estados de (12) siendo $V:L\rightarrow\mathfrak{R}$ ($L\subset\mathfrak{R}^{3n}$) de clase C^1 y definida positiva en el abierto L que contiene al origen de coordenadas. La función V de Lyapunov elegida es:

$$V(\mathbf{e}_2(t), \mathbf{P}'(t)) = \frac{1}{2} \left\{ e_{21}^2(t) + \dots + e_{2n}^2(t) + \frac{(P'_{11}(t))^2}{C_{11}} + \dots + \frac{(P'_{n1}(t))^2}{C_{n1}} + \frac{(P'_{12}(t))^2}{C_{12}} + \dots + \frac{(P'_{n2}(t))^2}{C_{n2}} \right\}. \quad (13)$$

Diferenciando (13) a lo largo de la trayectoria de (12) se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{dV(\mathbf{e}_2(t), \mathbf{P}'(t))}{dt} = & \frac{1}{2} \left\{ 2e_{21}(t) \frac{de_{21}(t)}{dt} + \dots + 2e_{2n}(t) \frac{de_{2n}(t)}{dt} + \right. \\ & + \frac{2P'_{11}(t)}{C_{11}} \frac{dP'_{11}(t)}{dt} + \dots + \frac{2P'_{n1}(t)}{C_{n1}} \frac{dP'_{n1}(t)}{dt} + \\ & \left. + \frac{2P'_{12}(t)}{C_{12}} \frac{dP'_{12}(t)}{dt} + \dots + \frac{2P'_{n2}(t)}{C_{n2}} \frac{dP'_{n2}(t)}{dt} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Sustituyendo en (14) los segundos miembros de (12) por las derivadas $de_{2l}(t)/dt$ y $dP'_{il}(t)/dt$ ($i=1,2,\dots,n$), ($l=1,2$) y simplificando se obtiene:

$$\frac{dV(t)}{dt} = -K_{211}e_{21}^2(t) - K_{222}e_{22}^2(t) - \dots - K_{2nn}e_{2n}^2(t). \quad (15)$$

Y asumiendo que:

$$K_{211} > 0, K_{222} > 0, \dots, K_{2nn} > 0. \quad (16)$$

Se concluye que el punto de equilibrio $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es asintóticamente estable en el conjunto abierto $L \forall t$, y por tanto, se cumplirá que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_{mrc}(t) - \mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}$, lo cual indica, que las trayectorias de la planta y del MRC se sincronizan. Otro resultado útil del análisis efectuado se deduce del siguiente hecho: como el punto de equilibrio $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es asintóticamente estable, también se verifica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{P}}(t) - \mathbf{P}) = \mathbf{0}$, lo cual indica, que los coeficientes de la matriz de parámetros adaptativos $\hat{\mathbf{P}}(t)$ tienden a anular a los correspondientes de la planta conforme el tiempo tiende a infinito, es decir, se sincronizan, y por tanto, la planta se sincronizará con el MRC debido a que la segunda ley de control en tiempo continuo contiene el término $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$. Lógicamente, la planta también se sincronizaría con un MPRC, lo cual se deduce de (16), sin más que igualar a cero aquellos coeficientes K_{2nn} cuyos subíndices no se encuentren en las ecuaciones del MPRC.

3.2. Segunda fase: Sistema equivalente

En el análisis de la primera fase, se observa, que la sincronización de la planta con el MRC es independiente de la primera ley de control en tiempo continuo, esto facilita el estudio de estabilidad del sistema de control por lo siguiente:

Si se sustituye en (1) la expresión dada en (9) para la segunda ley de control en tiempo continuo, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = & \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{P}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{u}_2(t) = \\ & = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{P}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + (\tilde{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{P}}(t))\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{K}_2\mathbf{e}_2(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Puesto que se verifica la igualdad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_{mrc}(t) - \mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}. \quad (18)$$

Y también:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{P}}(t) - \mathbf{P}) = \mathbf{0}. \quad (19)$$

Se obtiene finalmente para la dinámica de la planta la siguiente expresión equivalente una vez sincronizada con el MRC:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}\mathbf{u}_{1n}(t). \quad (20)$$

Es decir, (20) es la expresión resultante de (17) una vez pasado el transitorio correspondiente al proceso de sincronización entre planta y MRC.

La expresión (20) es idéntica a la del MRC dada por:

$$\frac{d\mathbf{x}_{mrc}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}\mathbf{u}_{1n}(t). \quad (21)$$

Ello es debido a que ambas están sincronizadas completamente, es decir, que $\mathbf{x}_{mrc}(t) = \mathbf{x}(t)$. Entonces, el sistema de control resultante puede escribirse ahora como:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = & \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}\mathbf{u}_{1n}(t) \\ \left. \begin{aligned} z_n(t_j) = & x_n(t_j) + a_n \sin(z_n(t_{j-1}) - x_n(t_j)) \\ u_{0n}(t_j) = & z_n(t_j) - x_n(t_j) \end{aligned} \right\} \text{ sii } S_p(\mathbf{x}(t_j))^{\dagger} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_{1n}(t)}{dt} = & -K_{1n}e_{1n}(t) \\ u_{1n}(t) = & K_{1n}e_{1n}(t). \end{aligned}$$

Donde no se ha incluido la expresión dinámica del MRC por ser éste idéntico a la planta equivalente, ver (20) y (21). Para fijar ideas se ha tomado una CECA. La condición inicial $e_{1n}(t_j^+)$ del término $de_{1n}(t)/dt = -K_{1n}e_{1n}(t)$ de (22), viene dada en los IECAR t_j^+ ($j=1,2,\dots$) por $u_{0n}(t_j)$ ($j=1,2,\dots$), es decir, que teniendo en cuenta el retardo δ_j en aplicar dicha condición inicial, ésta se puede expresar por $e_{1n}(t_j^+) = u_{0n}(t_j)$.

Se declara seguidamente una nueva variable $v_n(t)$ dada por la igualdad $v_n(t) = e_{1n}(t) + x_n(t)$. Derivando la expresión anterior, se obtiene $dv_n(t)/dt = de_{1n}(t)/dt + dx_n(t)/dt$, entonces, sustituyendo en la misma el término $de_{1n}(t)/dt = -K_{1n}e_{1n}(t)$ y la componente n-ésima de la derivada de la planta, el sistema (22) puede ser escrito en forma equivalente como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B} u_{in}(t) \\ z_n(t_j) &= x_n(t_j) + a_n \sin(z_n(t_{j-1}) - x_n(t_j)) \quad \text{sii} \quad S_p(\mathbf{x}(t_j))^{\dagger} = 0 \\ \frac{d\mathbf{v}_n(t)}{dt} &= f_n(\mathbf{x}(t)) + \tilde{P}_{n1} g_{n1}(\mathbf{x}(t)) + \tilde{P}_{n2} g_{n2}(\mathbf{x}(t)) \\ u_{in}(t) &= \begin{cases} K_{in}(z_n(t_j) - x_n(t_j)); & \text{para } t = t_j^+ \\ K_{in}(v_n(t) - x_n(t)); & \text{para } t_j^+ < t < t_{j+1}^+ \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

Donde las condiciones iniciales para la expresión $d\mathbf{v}_n(t)/dt = f_n(\mathbf{x}(t)) + \tilde{P}_{n1} g_{n1}(\mathbf{x}(t)) + \tilde{P}_{n2} g_{n2}(\mathbf{x}(t))$ vienen indicadas en los IECAR t_j^+ ($j=1,2,\dots$) por $v_n(t_j^+)$, a dichas condiciones iniciales se le asignan los valores correspondientes de $v_n(t_j)$ obtenidos en los IECA t_j ($j=1,2,\dots$), es decir, a $v_n(t_j^+)$ se le asignan los valores correspondientes de $z_n(t_j)$, puesto que:

$$v_n(t_j) = e_{in}(t_j) + x_n(t_j) = u_{0n}(t_j) + x_n(t_j) = z_n(t_j). \quad (24)$$

3.3. Tercera fase: Sistema de control auxiliar

Se considera en esta fase un nuevo sistema de control, denominado sistema auxiliar, que debe suponerse independiente de (23), y que viene dado por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B} u_{in}(t) \\ z_n(t_j) &= x_n(t_j) + a_n \sin(z_n(t_{j-1}) - x_n(t_j)) \quad \text{sii} \quad S_p(\mathbf{v}(t_j))^{\dagger} = 0 \\ \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{v}(t)) + \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{g}(\mathbf{v}(t)) \\ u_{in}(t) &= \begin{cases} K_{in}(z_n(t_j) - x_n(t_j)) - h_n(\mathbf{x}(t)) + h_n(\mathbf{v}(t)); & \text{para } t = t_j^+ \\ K_{in}(v_n(t) - x_n(t)) - h_n(\mathbf{x}(t)) + h_n(\mathbf{v}(t)); & \text{para } t_j^+ < t < t_{j+1}^+ \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

Donde $d\mathbf{v}(t)/dt = \mathbf{f}(\mathbf{v}(t)) + \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{g}(\mathbf{v}(t))$ es un modelo de referencia no conducido de la planta con entrada de control nula, siendo su vector de estados $\mathbf{v}(t) = [v_1(t), \dots, v_n(t)]^T$. Las condiciones iniciales para dicho modelo de referencia en los IECAR t_j^+ ($j=1,2,\dots$) vienen dadas por:

$$v_1(t_j^+) = \bar{v}_1, \quad v_2(t_j^+) = \bar{v}_2, \dots, v_{n-1}(t_j^+) = \bar{v}_{n-1}, \quad v_n(t_j^+) = z_n(t_j). \quad (26)$$

Donde las $n-1$ coordenadas $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{n-1}$ son constantes y se corresponden con un punto de la HSC asociado a una determinada UPO del modelo referencia no conducido.

En la primera ley de control $u_{in}(t)$ los términos $h_n(\mathbf{x}(t))$ y $h_n(\mathbf{v}(t))$ vienen expresados por $h_n(\mathbf{v}(t)) = f_n(\mathbf{v}(t)) + \tilde{P}_{n1} g_{n1}(\mathbf{v}(t)) + \tilde{P}_{n2} g_{n2}(\mathbf{v}(t))$ y $h_n(\mathbf{x}(t)) = f_n(\mathbf{x}(t)) + \tilde{P}_{n1} g_{n1}(\mathbf{x}(t)) + \tilde{P}_{n2} g_{n2}(\mathbf{x}(t))$. Se asume que el flujo del modelo de referencia no conducido dado en (25) es transversal a la HSC, cumpliéndose en los IECA la igualdad $S_p(\mathbf{v}(t_j))^{\dagger} = 0$.

Se estudia a continuación la estabilidad del sistema (25), más adelante, se concluirá que dicho estudio también es válido para el sistema (23).

La componente n -ésima de la trayectoria trazada por el vector de estados $\mathbf{v}(t)$ de (25) en un instante cualquiera dentro del intervalo de tiempo $t_j^+ \leq t \leq t_{j+1}^+$ viene dada por la igualdad:

$$v_n(t) = \varphi_n(v_1(t_j^+), v_2(t_j^+), \dots, v_n(t_j^+), z_n(t_j), (t - t_j^+)). \quad (27)$$

Donde φ_n es la componente n -ésima del vector de evolución del modelo de referencia no conducido. Se observa que $v_n(t)$ depende únicamente de la variable discreta $z_n(t_j)$ y del intervalo de tiempo considerado, ya que el resto de variables discretas se han tomado como constantes. Por consiguiente, cuando se cumpla la CECA en (25), se tiene la siguiente expresión recurrente para $v_n(t)$ en los instantes t_j^+ y t_{j+1}^+ .

$$v_n(t_{j+1}^+) = \varphi_n(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, z_n(t_j), T_j) = \varphi_n(z_n(t_j), T_j). \quad (28)$$

Donde $T_j = t_{j+1} - t_j^+$ es el tiempo de vuelo reducido.

Puesto que se asume que la HSC es trasversal al flujo del modelo de planta no conducido, se cumplirán las condiciones del teorema de la función implícita, y por tanto, se verificaran las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} S_p(v_1(t_{j+1}), v_2(t_{j+1}), \dots, v_n(t_{j+1})) &= 0 \Rightarrow \\ S_p(\varphi_1(z_n(t_j), T_j), \varphi_2(z_n(t_j), T_j), \dots, \varphi_n(z_n(t_j), T_j)) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow T_j &= \sigma(z_n(t_j)). \end{aligned} \quad (29)$$

Entonces (28) se puede escribir como:

$$v_n(t_{j+1}^+) = \varphi_n(z_n(t_j), \sigma(z_n(t_j))) = \varphi_n(z_n(t_j)). \quad (30)$$

Se concluye, que el tiempo de vuelo reducido dado por (29) y la variable de estado n -ésima del modelo no conducido en los IECA dado por (28), son ambas funciones de la variable en tiempo discreto $z_n(t_j)$.

De otro lado, restando la derivada de la componente $x_n(t)$ del vector de estados de la planta, de la correspondiente derivada de la componente $v_n(t)$ del vector de estados del modelo de referencia no conducido, se obtiene la siguiente dinámica de error:

$$\frac{dv_n(t)}{dt} - \frac{dx_n(t)}{dt} = K_{ln}(v_n(t) - x_n(t)) \quad (31)$$

$$\frac{de_{ln}(t)}{dt} = -K_{ln}e_{ln}(t).$$

Donde $e_{ln}(t) = v_n(t) - x_n(t)$.

Resolviendo (31) para las condiciones iniciales $e_{ln}(t_j^+) = u_{0n}(t_j)$ ($j=1,2,\dots$) dadas en los IECAR t_j^+ , siendo $u_{0n}(t_j) = z_n(t_j) - x_n(t_j)$, se obtiene:

$$e_{ln}(t) = (z_n(t_j) - x_n(t_j))\exp(-K_{ln}(t - t_j^+)). \quad (32)$$

Considerando la dinámica de error dada en (32) en los IECA t_{j+1} se tiene que:

$$e_{ln}(t_{j+1}) = (z_n(t_j) - x_n(t_j))\exp(-K_{ln}(t_{j+1} - t_j^+)). \quad (33)$$

Sustituyendo (33) en la expresión $v_n(t_{j+1}) = e_{ln}(t_{j+1}) + x_n(t_{j+1})$ y despejando $x_n(t_{j+1})$ se obtiene:

$$x_n(t_{j+1}) = v_n(t_{j+1}) - (z_n(t_j) - x_n(t_j))\exp(-K_{ln}(t_{j+1} - t_j^+)). \quad (34)$$

Llevando la expresión (34), a la dada para el filtro no lineal de evento discreto $z_n(t_{j+1}) = x_n(t_{j+1}) + a_n \sin(z_n(t_j) - x_n(t_{j+1}))$, evaluado en los instantes t_{j+1} ($j=1,2,\dots$) en los que se verifica la CECA, y teniendo presente que por (29) y (30) se verifican las igualdades $v_n(t_{j+1}) = \varphi_n(z_n(t_j))$ y $T_j = t_{j+1} - t_j^+ = \sigma(z_n(t_j))$, se obtiene el siguiente sistema en tiempo discreto que captura parte de la dinámica del sistema de control (25).

$$\begin{aligned} x_n(t_{j+1}) &= \varphi_n(z_n(t_j)) - (z_n(t_j) - x_n(t_j))\exp(-K_{ln}\sigma(z_n(t_j))) \\ z_n(t_{j+1}) &= \varphi_n(z_n(t_j)) - (z_n(t_j) - x_n(t_j))\exp(-K_{ln}\sigma(z_n(t_j))) + \\ &+ a_n \sin(z_n(t_j) - \varphi_n(z_n(t_j)) + (z_n(t_j) - x_n(t_j))\exp(-K_{ln}\sigma(z_n(t_j))). \end{aligned} \quad (35)$$

Se estudia a continuación la estabilidad de (35) en una vecindad de un punto fijo (\bar{x}_n, \bar{z}_n) siendo $\bar{x}_n = \bar{z}_n$. Dicho punto fijo está asociado a una UPO de la dinámica del modelo de referencia no conducido, puesto que la primera ley de control en tiempo continuo se anula en el mismo. El análisis de la estabilidad asintótica de dicho punto fijo se reduce al estudio de estabilidad del sistema lineal en tiempo discreto siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta x_n(t_{j+1}) &= \exp(-K_{ln}\bar{\sigma})\Delta x_n(t_j) + (D - \exp(-K_{ln}\bar{\sigma}))\Delta z_n(t_j) \\ \Delta z_n(t_{j+1}) &= (1 - a_n)\exp(-K_{ln}\bar{\sigma})\Delta x_n(t_j) + (1 - a_n)(D - \exp(-K_{ln}\bar{\sigma})) + a_n\Delta z_n(t_j). \end{aligned} \quad (36)$$

Donde $\Delta x_n(t_j) = x_n(t_j) - \bar{x}_n$, $\Delta z_n(t_j) = z_n(t_j) - \bar{z}_n$ son las desviaciones; $\bar{\sigma} = \bar{T} - \bar{\delta}$ es el tiempo de vuelo reducido en el equilibrio, siendo \bar{T} el tiempo de vuelo de la UPO asociada al

punto fijo (\bar{x}_n, \bar{z}_n) con $\bar{x}_n = \bar{z}_n$; $\bar{\delta}$ el retardo correspondiente y D es la derivada parcial $\partial \varphi_n(\bar{z}_n(t_j)) / \partial z_n(t_j)$ evaluada en el punto fijo asociado a la UPO. La ecuación característica de (36) viene dada por:

$$\det \begin{pmatrix} \exp(-K_{ln}\bar{\sigma}) - \lambda & D - \exp(-K_{ln}\bar{\sigma}) \\ (1 - a_n)\exp(-K_{ln}\bar{\sigma}) & (1 - a_n)(D - \exp(-K_{ln}\bar{\sigma})) + a_n - \lambda \end{pmatrix} = 0. \quad (37)$$

Para que el punto fijo (\bar{x}_n, \bar{z}_n) con $\bar{x}_n = \bar{z}_n$ del sistema (35) sea asintóticamente estable se debe cumplir que los autovalores dados por (37) verifiquen $|\lambda| < 1$. Para facilitar este cálculo se aplica transformada Z a (36) y se emplea la prueba de estabilidad de Jury para el polinomio característico correspondiente. Dicho polinomio tendrá todas sus raíces de manera estricta dentro del círculo unidad, si se cumple:

$$\begin{aligned} a_n \exp(-K_{ln}\bar{\sigma}) &< 1 \\ a_n \exp(-K_{ln}\bar{\sigma}) &> -1 - (1 - a_n)(D - \exp(-K_{ln}\bar{\sigma})) - \\ &- a_n - \exp(-K_{ln}\bar{\sigma}) \\ a_n \exp(-K_{ln}\bar{\sigma}) &> -1 + (1 - a_n)(D - \exp(-K_{ln}\bar{\sigma})) + \\ &+ a_n + \exp(-K_{ln}\bar{\sigma}). \end{aligned} \quad (38)$$

En la Fig. (2) se observa el área factible de estabilidad para el sistema (38) en función de los parámetros siguientes:

$$\begin{aligned} c_1 &= -(1 - a_n)(D - \exp(-K_{ln}\bar{\sigma})) - a_n - \exp(-K_{ln}\bar{\sigma}) \\ c_2 &= a_n \exp(-K_{ln}\bar{\sigma}). \end{aligned} \quad (39)$$

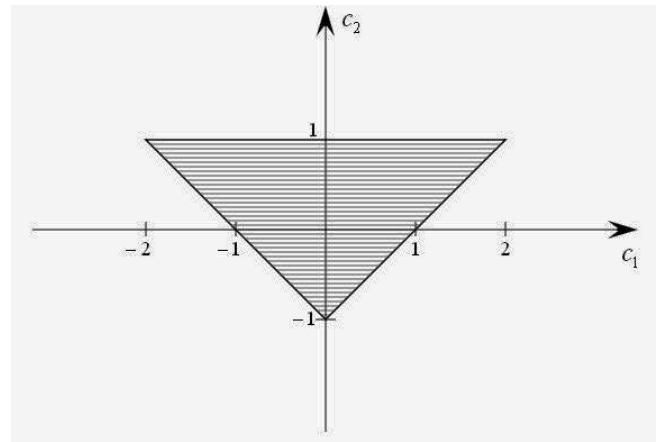


Figura 2: Área de estabilidad de la ecuación característica como una función de los parámetros c_1 y c_2 .

Por tanto, se concluye, que existe un rango de valores para los parámetros a_n , K_{ln} y $\bar{\delta}$ en el cual el punto fijo (\bar{x}_n, \bar{z}_n) , $\bar{x}_n = \bar{z}_n$ del sistema en tiempo discreto (33) es asintóticamente estable.

Observación 1. Se ha probado que el punto fijo (\bar{x}_n, \bar{z}_n) con $\bar{x}_n = \bar{z}_n$, el cual está asociado a una UPO en la HSC, es asintóticamente estable si se verifican las desigualdades de (38).

Observación 2. Si la trayectoria de la planta en bucle cerrado pasa por un entorno suficientemente cercano a una UPO verificándose (38) ésta quedaría estabilizada.

Observación 3. Partiendo de (38), además de otras dos desigualdades, se debe cumplir también la siguiente:

$$a_n \exp(-K_{1n}\bar{\sigma}) < 1. \quad (40)$$

Donde es $\bar{\sigma} = \bar{T} - \bar{\delta}$ siendo \bar{T} el tiempo de vuelo de la UPO asociada al punto fijo (\bar{x}_n, \bar{z}_n) con $\bar{x}_n = \bar{z}_n$.

La expresión (40) se puede poner como:

$$a_n \exp(-K_{1n}\bar{T}) \exp(K_{1n}\bar{\delta}) < 1. \quad (41)$$

La utilidad del resultado anterior radica en que el retardo en aplicar la señal de control en tiempo discreto al primer controlador en tiempo continuo en los IECR perjudica a la estabilidad del sistema, pero de forma poco sensible si la ganancia es grande y el retardo en aplicar el control es pequeño. También se observa que el sistema podría ser asintóticamente estable en algún caso si $a_n < 1$ y el parámetro de control K_{1n} de la primera ley de control es negativo, así como, si $a_n > 1$ con $K_{1n} > 0$.

3.4. Cuarta fase: Sincronización entre el MRC y la planta.

En la tercera fase se probó que el sistema de control auxiliar (25) es asintóticamente estable si se cumple (38). Ello implica que en esas condiciones la planta queda sincronizada con el modelo de referencia no conducido en torno a una determinada UPO. Asumiendo que en (25) haya transcurrido el tiempo suficiente para que el transitorio se pueda considerar extinguido, si en ese instante se conduce mediante las variables de estado de la planta el modelo de referencia $d\mathbf{v}(t)/dt = \mathbf{f}(\mathbf{v}(t)) + \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{g}(\mathbf{v}(t))$ se obtiene el correspondiente MRC $d\mathbf{v}(t)/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$ y si además, se conduce también al mismo tiempo la CECA $S_p(\mathbf{v}(t_j))^{\dagger} = 0$ se obtiene $S_p(\mathbf{x}(t_j))^{\dagger} = 0$, entonces, y dado que la planta y el modelo estaban sincronizados y estabilizados en un entorno de una determinada UPO, éstos (MRC y planta) seguirán sincronizados, y por tanto estabilizados en un entorno de dicha UPO. Se observa también que los cambios efectuados en (25) lo hacen idéntico al sistema dado en (23), ya que el MRC queda reducido a un MPRC al eliminarse del mismo las variables que no intervienen en el sistema de control, dicho MPRC es $d\mathbf{v}_n(t)/dt = \mathbf{f}_n(\mathbf{x}(t)) + \tilde{P}_{n1}\mathbf{g}_{n1}(\mathbf{x}(t)) + \tilde{P}_{n2}\mathbf{g}_{n2}(\mathbf{x}(t))$, el cual es idéntico al del sistema (23), al igual que la correspondiente ley de control $u_{1n}(t)$, puesto que se anula el término $-h_n(\mathbf{x}(t)) + h_n(\mathbf{v}(t))$ al ser conducido. Por tanto, se concluye que las expresiones dadas en (38) también son válidas para la estabilidad del sistema (23), y por extensión, válidas para la sintonía del sistema de control híbrido adaptativo propuesto.

4. Algoritmo para el ajuste de parámetros

El algoritmo consta de los siguientes 5 pasos:

Paso 1. Ajuste de los parámetros de velocidad de adaptación y de la segunda ley de control en tiempo continuo.

Los parámetros de velocidad de adaptación $C_{i1} > 0$ y $C_{i2} > 0$ para $i = \{1, 2, \dots, n\}$ se ajustan de forma experimental escogiéndolos iguales en magnitud $C_{i1} = C_{i2} = C_i$, dichos parámetros están relacionados con el tipo de respuesta transitoria de la ley de adaptación. Es conveniente ajustarlos con el control en tiempo discreto anulado, ya que su ajuste es independiente del mismo. La matriz de parámetros \mathbf{K}_2 de la segunda ley de control $\mathbf{u}_2(t)$ en tiempo continuo, también se ajusta experimentalmente, debiendo verificar sus elementos las siguientes desigualdades $K_{211} > 0, K_{222} > 0, \dots, K_{2nn} > 0$.

Paso 2. Elección de la hipersuperficie de control

Como se comentó en la subsección 2.3 la HSC $\Sigma_p = \{\mathbf{x} \in Q : S(\mathbf{x}) = 0\}$ debe ser transversal al flujo de la planta en bucle cerrado y contener al menos un punto de alguna UPO embebida en el atractor caótico. Este problema queda resuelto utilizando como HSC una variedad de codimensión uno, cuya estructura venga dada por la forma $\Sigma_p = \{\mathbf{x} \in Q : f_i(\mathbf{x}) + \tilde{P}_{i1}\mathbf{g}_{i1}(\mathbf{x}) + \tilde{P}_{i2}\mathbf{g}_{i2}(\mathbf{x}) = 0\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), el término $f_i(\mathbf{x}) + \tilde{P}_{i1}\mathbf{g}_{i1}(\mathbf{x}) + \tilde{P}_{i2}\mathbf{g}_{i2}(\mathbf{x})$ se corresponde con una de las componentes del vector de campo del MRC de la planta en bucle abierto. La variedad Σ_p es atravesada por toda UPO que exista integrada en el atractor caótico, ya que dicha UPO es periódica y por tanto sus máximos estarán contenidos en la variedad.

Como alternativa, en la práctica puede ser conveniente utilizar un hiperplano como HSC, aunque presenta la desventaja del ajuste de un nuevo parámetro. En general, se puede probar como HSC un hiperplano paralelo a uno coordenado del espacio de fases de la forma $x_i - b = 0$.

Paso 3. Elección de la condición de evento

Se elige una de las dos condiciones de eventos de control $S(\mathbf{x}(t_j))^{\dagger} = 0$ ó $S(\mathbf{x}(t_j))^{\downarrow} = 0$. Es importante esta fase, ya que puede ocurrir que la HSC sea cortada, por ejemplo, por dos puntos de una determinada UPO en el mismo sentido en la región $Q' \cap \Sigma_p$ $Q' \subset Q$, entonces, los IECA o los IECD se deben elegir como la secuencia de impactos $j = 2k$, es decir, ($j = 2, 4, 6, \dots$) y de forma análoga cuando existan tres puntos $j = 3k$, etc.

Paso 4. Ajustes de los parámetros, a_n de la ley de control en tiempo discreto y K_{1n} de la primera ley de control en tiempo continuo.

Cuando se verifique la condición de evento elegida en los IEC $t = t_j$ ($j = 1, 2, \dots$) se efectúan los cálculos de la ley de control en tiempo discreto y de la primera ley de control en tiempo continuo siguientes:

$$\begin{aligned} u_{0n}(t_j) &= z_n(t_j) - x_n(t_j) \\ z_n(t_j) &= x_n(t_j) + a_n \sin(z_n(t_{j-1}) - x_n(t_j)) \end{aligned} \quad (42)$$

$$u_{1n}(t) = K_{1n} e_{1n}(t) \quad \text{con} \quad \frac{de_{1n}(t)}{dt} = -K_{1n} e_{1n}(t)$$

El ajuste del parámetro de control en tiempo discreto a_n se hace asignando al mismo un valor próximo a la unidad por la izquierda o por la derecha, de esta forma se tiende a anular el efecto de la derivada D en (38), ya que ésta es desconocida, aunque constante.

En los IECR $t = t_j^+$ ($j=1,2,\dots$) se da la nueva condición inicial $u_{0n}(t_j)$ ($j=1,2,\dots$) a la componente n -ésima de la primera ley de control en tiempo continuo, es decir, se hace $e_{1n}(t_j^+) = u_{0n}(t_j)$ continuándose la integración de esta primera ley de control desde los instantes $t \geq t_j^+$, hasta $t < t_{j+1}^+$, previamente se asigna un valor a $K_{1n} > 0$. Si la planta no se estabiliza con el ajuste previo, incrementar K_{1n} , $K_{1n} > 0$ hasta conseguir la estabilización de la UPO.

Otra posibilidad para estabilizar la planta en la vecindad de una UPO consiste en fijar un valor de a_n próximo a uno por la derecha e incrementar K_{1n} , $K_{1n} > 0$ hasta que se consiga la estabilización de la UPO. En este caso existe una cota superior para el valor de K_{1n} , $K_{1n} = (1/\bar{\sigma}) \ln a_n$ según se deduce de la primera inecuación de (38). Algunos sistemas caóticos admiten la posibilidad de ser controlados en UPOs fijando el parámetro a_n en el intervalo $0 < a_n < 1$ y un valor para $K_{1n} < 0$ en este caso existe una cota inferior para $K_{1n} = (1/\bar{\sigma}) \ln a_n$. Si la planta se estabiliza en la vecindad de una UPO (se debe observar una tendencia de la señal de error a disminuir con el tiempo) se salta al paso 5 que es el fin del algoritmo.

Paso 5. Fin del algoritmo.

5. Resultados de Simulación Numérica

Los siguientes resultados de simulación numérica se han obtenido aplicando el algoritmo de control adaptativo híbrido para la estabilización de UPOs embebidas en atractores caóticos desarrollado en la sección 4. Se ha considerado solamente la estabilización de órbitas periódicas inestables de periodo uno con respecto a la HSC elegida y se supone que no hay ruido de medida. Para integrar numéricamente el sistema de control se ha empleado un integrador de Runge Kutta de cuarto orden con paso de integración Δt fijo.

5.1. Sistema caótico de Lorenz

En el sistema caótico de Lorenz (Lorenz, 1963) se ha supuesto que los parámetros originales de la planta son $\sigma=10$, $r=28$ y $\beta=8/3$ y que el parámetro r , que se supone inaccesible, se ha desviado a $r=48$. Se desea restablecer el parámetro original, y además, estabilizar el caos en una de las UPOs correspondiente a su dinámica de bucle abierto cuando $r=28$. El sistema de

Lorenz, con la segunda ley de control en tiempo continuo aplicada en la segunda y tercera componente de su vector de campo, es:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= \sigma(x_2(t) - x_1(t)) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= rx_1(t) - x_1(t)x_3(t) - x_2(t) + u_{22}(t) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= -\beta x_3(t) + x_1(t)x_2(t) + u_{23}(t) \end{aligned} \quad (43)$$

Las condiciones iniciales empleadas han sido $x_1(0)=5$, $x_2(0)=5$ y $x_3(0)=5$. Con las condiciones iniciales anteriores el sistema presenta comportamiento caótico cuando $u_{22}(t)=0$ y $u_{23}(t)=0$. El paso de integración empleado en la simulación ha sido $\Delta t = 10^{-5}$ s. El algoritmo de control híbrido adaptativo para la estabilización de UPOs aplicado al sistema de Lorenz viene dado por las siguientes expresiones:

$$(-\beta x_3(t_j) + x_1(t_j)x_2(t_j))^+ = 0. \quad (j=1,2,\dots) \quad (44)$$

Donde (44) es la condición de evento elegida, que es en este caso una CECA. Se ha empleado una HSC $\Sigma_3 = \{\mathbf{x} \in Q : S_3(\mathbf{x}) = 0\}$ con $S_3 = -\beta x_3 + x_1 x_2$ que coincide en estructura con la tercera componente del vector de campo de la planta en bucle abierto.

$$\begin{aligned} u_{03}(t_j) &= z_3(t_j) - x_3(t_j) \quad \text{con} \\ z_3(t_j) &= x_3(t_j) + a_3 \sin(z_3(t_{j-1}) - x_3(t_j)) \end{aligned} \quad (45)$$

Donde (45) es la ley de control escalar en tiempo discreto calculada cuando se verifique la CECA en los IECAR, siendo el parámetro de control $a_3=0,8$, la condición inicial del filtro no lineal de evento discreto se ha tomado $z_3(t_0)=0$.

$$u_{13}(t) = K_{13} e_{13}(t) \quad \text{con} \quad \frac{de_{13}(t)}{dt} = -K_{13} e_{13}(t) \quad (46)$$

Donde (46) es la primera ley de control en tiempo continuo, siendo $K_{13}=120\text{ s}^{-1}$, y la condición inicial dada en los IECAR t_j^+ ($j=1,2,\dots$) igual a $u_{03}(t_j)$, es decir $e_{13}(t_j^+) = u_{03}(t_j)$. El retardo δ_j empleado ha sido un valor fijo de 10^{-3} s.

$$\begin{aligned} \frac{dx_{mpc2}(t)}{dt} &= \tilde{P}_{21}x_1(t) - x_1(t)x_3(t) - x_2(t) \\ \frac{dx_{mpc3}(t)}{dt} &= -\beta x_3(t) + x_1(t)x_2(t) + u_{13}(t). \end{aligned} \quad (47)$$

Donde (47) es el MPRC cuyos parámetros toman respectivamente los valores $\tilde{P}_{21}=28$, que es equivalente al valor de r deseado, y $\beta=8/3$. Las condiciones iniciales han sido $x_{mpc2}(0)=0$ y $x_{mpc3}(0)=0$

$$\begin{aligned} e_{22}(t) &= x_{mpc2}(t) - x_2(t) \\ e_{23}(t) &= x_{mpc3}(t) - x_3(t). \end{aligned} \quad (48)$$

Donde (48) son las expresiones para la segunda y tercera componente del vector de error.

$$\frac{d\hat{P}_{21}(t)}{dt} = -C_{21}x_1(t)e_{22}(t). \quad (49)$$

Donde (49) es la ley de adaptación de parámetros, habiéndose ajustado el parámetro de velocidad de adaptación al valor $C_{21} = 10$ y la condición inicial $\hat{P}_{21}(0) = 28$.

Las componentes de la segunda ley de control en tiempo continuo quedan:

$$\begin{aligned} u_{22}(t) &= (\tilde{P}_{21} - \hat{P}_{21}(t))x_1(t) + K_{222}e_{22}(t) \\ u_{23}(t) &= K_{13}e_{13}(t) + K_{233}e_{23}(t). \end{aligned} \quad (50)$$

Donde los parámetros de control en tiempo continuo se han fijado en los valores $K_{222} = 50$, $K_{233} = 50$.

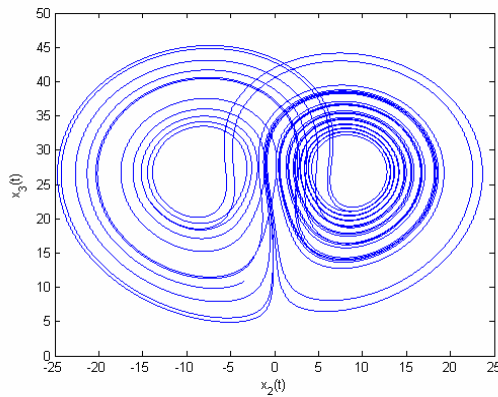


Figura 3: Retrato de fases del atractor caótico de Lorenz para los parámetros $\sigma=10$, $r=48$, $\beta=8/3$ y condiciones iniciales $x_1(0)=5$, $x_2(0)=5$ y $x_3(0)=5$.

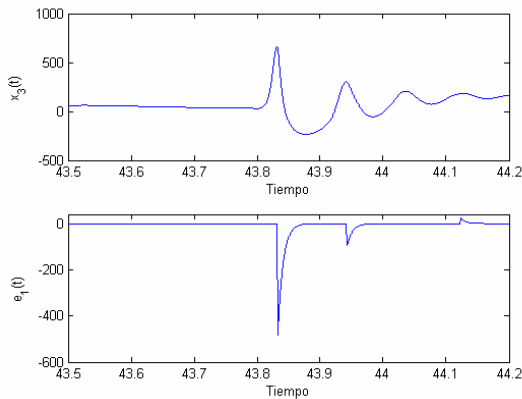


Figura 4: Diagramas temporales de la variable de estado $x_3(t)$ (arriba) y $e_{13}(t)$ de la primera ley de control (abajo).

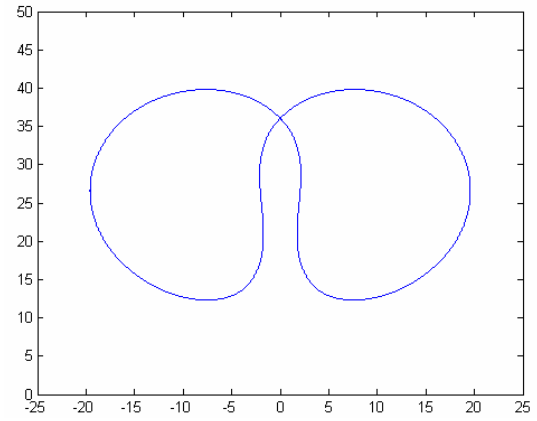


Figura 5: Retrato de fases del atractor caótico de Lorenz estabilizado en torno a una UPO correspondiente al parámetro $r = 28$.

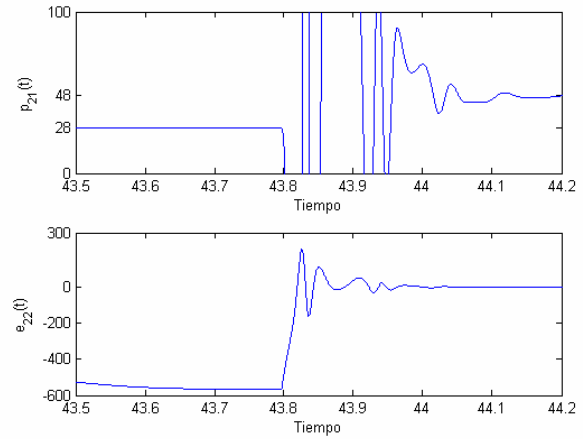


Figura 6: Diagramas temporales del parámetro adaptativo \hat{P}_{21} (arriba) y la componente $e_{22}(t)$ de la señal de error de la segunda ley de control (abajo).

5.2. Oscilador caótico en puente de Wien modificado

El oscilador en puente de Wien modificado (OPWM) es un sistema caótico con un solo punto de equilibrio propuesto por González (González, *et al.*, 2005). El OPWM, con la segunda ley de control en tiempo continuo aplicada a la tercera componente de su vector de campo, queda expresado por:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= (f(x_3(t)) - x_3(t) - R_L x_1(t) - x_2(t)) / L \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= (x_1(t)) / C \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= ((x_1(t) - x_3(t)) / R) / C_1 + u_{23}(t) \\ f(x_3(t)) &= A / 2(\text{abs}(x_3(t) + V_s / A) - \text{abs}(x_3(t) - V_s / A)). \end{aligned} \quad (51)$$

Los parámetros originales de la planta son $R = 24 \text{ K}\Omega$, $R_L = 0,09 \text{ K}\Omega$ y $A = 5,8$. El parámetro R , que se supone inaccesible, se ha desviado a $R = 18,5 \text{ K}\Omega$ y se desea restablecer el parámetro original, además, se desea estabilizar el caos en una

de sus UPOs para $R = 24 \text{ K}\Omega$. Las constantes del OPWM originales son: $L = 100 \text{ mH}$, $C = 100 \text{ nF}$, $C_1 = 0,47 \mu\text{F}$, $V_s = 14 \text{ V}$ y las condiciones iniciales utilizadas para obtener las gráficas han sido: $x_1(0) = 0 \text{ A}$, $x_2(0) = 3 \text{ V}$, $x_3(0) = 0,1 \text{ V}$. Con las condiciones iniciales anteriores el OPWM presenta comportamiento caótico para $u_3(t) = 0$. El paso de integración empleado en la simulación ha sido $\Delta t = 10^{-8} \text{ s}$. El algoritmo de control híbrido adaptativo para la estabilización de UPOs aplicado al sistema OPWM viene dado por las siguientes expresiones:

$$(x_2(t_j))^+ = 0 \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (52)$$

Donde (52) es la condición de evento elegida, que es en este caso ha sido una CECA. Se ha empleado una HSC $\Sigma_2 = \{x \in Q : S_2(x) = 0\}$ con $S_2 = x_2$ que es uno de los planos coordenados.

$$\begin{aligned} u_{03}(t_j) &= z_3(t_j) - x_3(t_j) \quad \text{con} \\ z_3(t_j) &= x_3(t_j) + a_3 \sin(z_3(t_{j-1}) - x_3(t_j)) \end{aligned} \quad (53)$$

Donde (53) es la ley de control escalar de evento discreto calculada cuando se verifique (52) en los IECA, siendo el parámetro de control $a_3 = 0,9$. La condición inicial del filtro no lineal de evento discreto ha sido $z_3(t_0) = 0$.

$$u_{13}(t) = K_{13}e_{13}(t) \quad \text{con} \quad \frac{de_{13}(t)}{dt} = -K_{13}e_{13}(t) \quad (54)$$

Donde (54) es la primera ley de control en tiempo continuo, siendo $K_{13} = 150000 \text{ s}^{-1}$; y la condición inicial dada en los IECAR t_j^+ ($j = 1, 2, \dots$) igual a $u_{03}(t_j)$, es decir $e_{13}(t_j^+) = u_{03}(t_j)$. El retardo δ_j empleado ha sido un valor fijo de 10^{-6} s .

$$\frac{dx_{\text{mpc}3}(t)}{dt} = (x_1(t) - x_3(t))\tilde{P}_{31}/C_1 + u_{13}(t). \quad (55)$$

Donde (55) es el MPRC cuyo parámetro toma el valor $\tilde{P}_{31} = 24 \text{ K}\Omega$ que es equivalente al valor de R deseado.

$$e_{23}(t) = x_{\text{mpc}3}(t) - x_3(t). \quad (56)$$

Donde (56) es la tercera componente del vector de error.

$$\frac{d\hat{P}_{31}(t)}{dt} = -C_{31}x_1(t)e_{23}(t). \quad (57)$$

Donde (57) es la ley de adaptación de parámetros, habiéndose fijado el parámetro de velocidad de adaptación en el valor $C_{31} = 0,8$ y la condición inicial en $\hat{P}_{31}(0) = 1/R$, $R = 24 \text{ K}\Omega$.

Por último, la tercera componente de la segunda ley de control en tiempo continuo viene dada por:

$$u_{23}(t) = (\tilde{P}_{31} - \hat{P}_{31}(t))x_1(t) + K_{13}e_{13}(t) + K_{233}e_{23}(t) \quad (58)$$

Donde para el parámetro de control de la segunda en tiempo continuo se ha tomado el valor $K_{233} = 150000$.

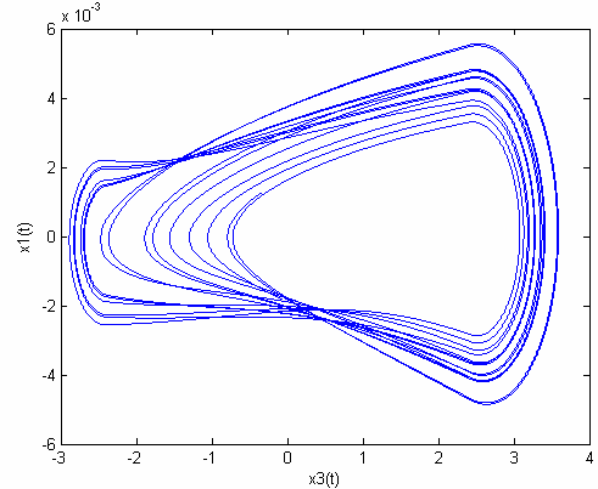


Figura 7: Retrato de fases del atractor de González para los parámetros $R_L = 0,09 \text{ K}\Omega$, $R = 18,5 \text{ K}\Omega$, $A = 5,8$ y condiciones iniciales $x_1(0) = 0 \text{ A}$, $x_2(0) = 3 \text{ V}$ y $x_3(0) = 0,3 \text{ V}$.

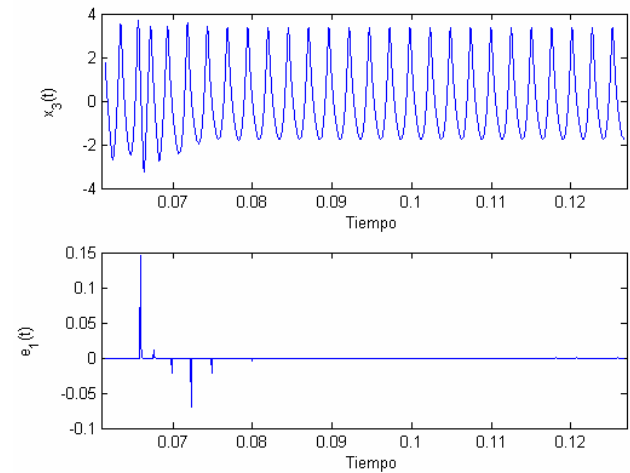


Figura 8: Diagramas temporales de la variable de estado $x_3(t)$ (arriba) y $e_{13}(t)$ de la primera ley de control (abajo).

Se observa en la Fig. (8) la disminución de amplitud de la señal $e_{13}(t)$ de la primera ley de control en tiempo continuo. En la práctica la amplitud mínima queda limitada por el ruido de medida de las variables de estado.

Cabe destacar que el OPWM para un valor del parámetro R de $R = 18,5 \text{ K}\Omega$, presenta dos atractores distintos y la trayectoria del sistema evolucionará hacia uno u otro dependiendo de que las condiciones iniciales dadas pertenezcan a la cuenca de atracción correspondiente.

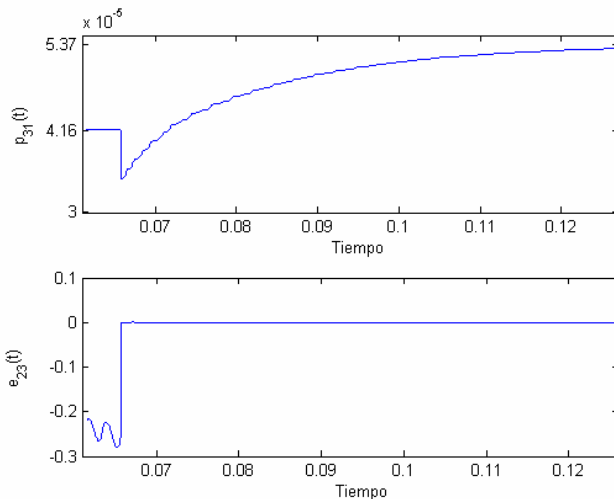


Figura 9: Diagramas temporales del parámetro adaptativo (arriba) y la señal de error de la segunda ley de control (abajo).

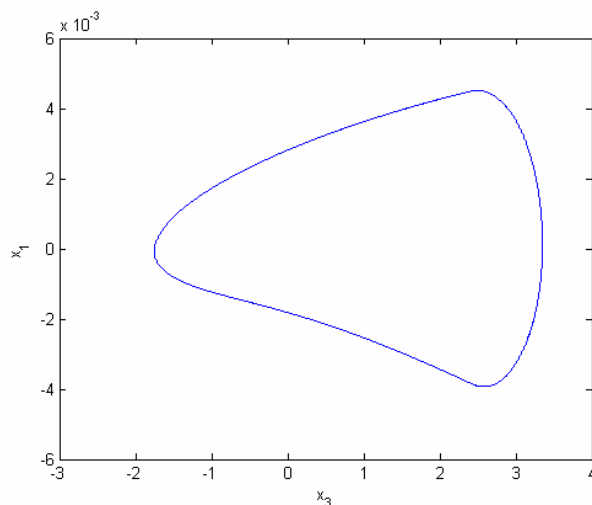


Figura 10. Retrato de fases del atractor derecho de González estabilizado en torno a una UPO correspondiente al parámetro $R = 24 \text{ K}\Omega$.

6. Conclusiones

El sistema de control híbrido adaptativo propuesto permite estabilizar UPOs en sistema caóticos de forma robusta frente a variaciones en sus parámetros. El análisis efectuado da una condición suficiente de estabilidad asintótica, para un punto fijo asociado a una UPO utilizando un sistema de control auxiliar. Para trabajos futuros se deja un análisis del sistema de control con la primera ley de control generalizada y la implementación práctica con un dispositivo para el procesamiento digital de señales.

English Summary

Analysis of an adaptive hybrid control system which stabilizes unstable periodic orbits embedded in chaotic attractors

Abstract

In this paper, an adaptive hybrid control method is proposed, which stabilizes chaotic systems in the neighborhood of unstable periodic orbits embedded in the chaotic dynamics of the process to control. The method is based on the joint action of two controllers (a continuous time controller and a discrete time controller) as well as on the phenomenon of adaptive synchronization of the plant with an specified reference model. In some cases, the method only needs a partial driven reference model. An stability analysis of the control system is performed and an algorithm is proposed to facilitate the implementation of the method. Finally, numerical simulation results are shown.

Keywords:

Hybrid control, adaptive control, unstable periodic orbit, reference model, synchronization, chaotic systems.

Referencias

- Fatechi M., Asgharian H. R. and Pariz, N., 2009. Adaptive control of chaotic Rossler via synchronization. *Trends in Applied Sciences, Research* 4 (2), pp. 98-106.
- González R., 1998. Estudio de Osciladores Electrónicos Autónomos: Aplicación a un Oscilador de Puente de Wien Modificado. *Tesis doctoral. Escuela Superior de Ingeniería. Universidad de Cádiz*.
- González, R., Prian, M., Fernández, M.A. Rojas, J. L. and Romero, E., 2005. A symmetric piecewise-linear chaotic system with a single equilibrium point. *International journal of bifurcation and chaos*, vol. 15, no. 4 pp. 1411-1415.
- Guan, Z.-H., Hill, D.J., Shen, X., Yu, X., 2004. Synchronization of chaotic systems via hybrid impulsive and switching control. *Control Conference. 5th Asian*, pp. 1762- 1766. Vol.3.
- Kozlov, A., Osipov, G. and Shalfeer, V., 1997. Suppressing Chaos halfeer, in continuous systems by impulsive control. *IEEE Proc. of the 1st International Conference on Control of Oscillations and Chaos*, vol. 3, pp. 578-581.
- Lopez, M. J., Prian, M. and Verdulla, F. M., 2006. "Chaos Control Method". *Internal Report. Dpto. de Ing. de Sistemas y Automática. Universidad de Cádiz*.
- Lorenz, E.N., 1963. Deterministic nonperiodic flow. *Journals of the atmospheric sciences*, vol. 20 pp. 130-141.
- Matias, M.A. and Güemez, J., 1994. Stabilization of chaos by proportional pulses in system variables. *Physical Review Letters*, volume 72, Number 10 pp. 1455 -1458.
- Ott, E., Grebogi, C. and Yorke, J. A., 1990. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, no. 11, pp. 1196-1199.
- Pecora, L.M., and Carrol, T. L. 1990. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, pp. 821-824.
- Piccardi, C. and Rinaldi, S., 2000. Optimal control of chaotic systems via peak-to-peak maps, *Phys. D* 144 pp. 298-308.
- Prian, M., López, M.J., and Verdulla, F.M., 2011. Chaos stabilization via hybrid control. *IEEE Latin America Transactions*, Vol. 9, NO. 3. pp. 252-262.
- Prian, M., López, M.J. and Verdulla, F.M., 2012. Chatter chaos rejection by adaptive control. *AIP Conf. Proc.* 1431, 676.
- Sun, J. T. and Zhang, Y. P., 2003. Stability analysis of impulsive control systems, *IEEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 150, pp. 331-334.
- Tian, Y.-P., X. Yu., Chua, L. P., 2004. Time-delayed impulsive control of chaotic hybrid systems. *International journal of bifurcation and chaos*, vol. 14, no. 3, pp. 1091-1104.
- Verdulla, F.M., López, M.J. and Prian, M., 2009. A pulsed control method for chaotic systems. *IEEE Latin America Transactions*, 7, no. 1, pp. 1-11.
- Verdulla, F.M., López, M.J. and Prian, M., 2011. Control de sistemas caóticos basado en condición de evento variable ajustada a la dinámica del proceso. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 8, no. 1, pp. 159-166.
- Yang, T., 1999. Impulsive Control. *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 44, n. 5 pp. 1081-1083.