

## Análisis de la Controlabilidad de Estado de Sistemas Irreversibles Mediante Teoría de Conjuntos

L.M. Gómez<sup>b</sup>, H. Botero<sup>a</sup>, H. Alvarez<sup>b</sup>, Fernando di Sciascio<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Energía Eléctrica y Automática, Universidad Nacional de Colombia, Carrera 80 N. 65-223, Medellín, Colombia.

<sup>b</sup> Departamento de Procesos y Energía, Universidad Nacional de Colombia, Carrera 80 N. 65-223, Medellín, Colombia

<sup>c</sup> Instituto de Automática, Universidad Nacional de San Juan – Argentina, Av. San Martín Oeste 1109

### Resumen

Los sistemas irreversibles han sido poco estudiados en el marco de la teoría de control, a pesar de que una de las aplicaciones relevantes de los mismos es el control de los procesos por lotes, los cuales son irreversibles. Por lo tanto, en este artículo se propone un método para analizar la controlabilidad de estado de estos sistemas mediante la teoría de conjuntos, extensible también a los procesos por lotes. Para ello, se proponen las definiciones de Conjunto Reversible y Conjunto de Trayectorias Controlables, ambas para sistemas no lineales; este último conjunto permite el análisis de controlabilidad de estado de los sistemas irreversibles. Adicionalmente, se propone un algoritmo que permite calcular dichos conjuntos desde el conocimiento de la dinámica del sistema. La propuesta es aplicada a un problema de referencia de un proceso por lotes, con lo cual se obtienen resultados de simulación que evidencian las ventajas de la misma para analizar cuantitativamente la controlabilidad de estado de los sistemas irreversibles. Copyright © 2015 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L.U. Todos los derechos reservados

### Palabras Clave:

Controlabilidad, Reversibilidad, Sistemas irreversibles, Procesos por lotes

### 1. Introducción

Los sistemas irreversibles han sido estudiados en varias áreas como la física, los procesos estocásticos y la termodinámica. Sin embargo, el mayor desarrollo teórico se ha dado en la termodinámica, especialmente con los trabajos presentados por Prigogine (1996). En este sentido, los conceptos de reversibilidad e irreversibilidad se encuentran estrechamente relacionados con la segunda ley de la termodinámica, la cual aún no cuenta con un consenso sobre su interpretación (Uffink, 2001). Desde este punto de vista, el término irreversibilidad es comúnmente empleado para denotar sistemas que evolucionan lejos del equilibrio, o para definir la irrecuperabilidad del estado inicial del sistema cuando ha evolucionado.

En sistemas dinámicos, especialmente en el caso de los sistemas caóticos, se habla de la irreversibilidad como una propiedad que poseen los sistemas que no son invertibles en el tiempo, es decir sistemas para los cuales no es posible considerar tiempos negativos (Birkhoff, 1991).

Respecto a la teoría de control, existe un interés por profundizar en la propiedad de irreversibilidad debido al uso industrial de los procesos por lotes, los cuales son sistemas irreversibles (Bonvin, 1998). Estos procesos poseen una naturaleza dinámica, están sometidos a perturbaciones, y por lo tanto requieren que durante su operación se ejecuten acciones correctivas que eviten los efectos negativos de las mismas.

En este sentido, algunos autores han hecho aportes para el análisis de la irreversibilidad, por ejemplo en Haddad *et al.* (2005) se definieron la irrecuperabilidad del estado inicial y la reversibilidad, que se corresponden con los términos de reversibilidad débil y reversibilidad fuerte propuestos por Sontag (1998). No obstante, el análisis de los procesos por lotes se dificulta, ya que los mismos no poseen un punto de operación o punto de equilibrio, lo cual ha ocasionado que la teoría de control aplicada a estos procesos esté dedicada a la solución de casos particulares (Cueli y Bordons, 2006; Flores-Cerrillo *et al.*, 2005; Srinivasan *et al.*, 2002; Lee and Lee, 2003; Russell *et al.*, 2000), y que los aportes sobre propiedades importantes, tales como estabilidad y controlabilidad de estado sea precaria. Por ejemplo, en Hangos (2005) se analizó la alcanzabilidad de un proceso de fermentación semilote, pero la alcanzabilidad es sólo una condición necesaria para garantizar la controlabilidad de estado (Sontag, 1998).

De manera similar, Srinivasan y Bonvin (2007) propusieron una definición de estabilidad y otra de controlabilidad entrada-salida para procesos por lotes, pero dichas definiciones se desvían considerablemente de las concepciones tradicionales de estas propiedades en la teoría de control (Vidyasagar, 1993; Sontag, 1998) y sólo consideran la característica de repetibilidad de los procesos por lotes, sin tener en cuenta el efecto de la irreversibilidad (Gómez *et al.* 2011).

Para resolver este vacío teórico, en Gómez *et al.* (2010) se propuso una técnica para el análisis de la controlabilidad de

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [lmage@una1.edu.co](mailto:lmage@una1.edu.co) (L.M. Gómez)

estado y la estabilidad de procesos por lotes, basada en métodos de teoría de conjuntos (Blanchini and Miani, 2008). Continuando con esta línea de trabajo, en este artículo se propone un método para analizar la controlabilidad de estado de sistemas irreversibles mediante la teoría de conjuntos, extensible también a los procesos por lotes. Para ello, se proponen las definiciones de Conjunto Reversible y Conjunto de Trayectorias Controlables, ambas para sistemas no lineales; este último conjunto permite el análisis de controlabilidad de estado de los sistemas irreversibles. Adicionalmente, se propone un algoritmo que permite calcular dichos conjuntos desde el conocimiento de la dinámica del sistema.

El documento está estructurado de la siguiente forma: en la Sección 2 se analizan aspectos relevantes de la reversibilidad y de la controlabilidad de estado de sistemas no lineales; en la Sección 3 se proponen las definiciones de Conjunto Reversible y Conjunto de Trayectorias Controlables, y la técnica que permite analizar la controlabilidad de estado desde el enfoque de la teoría de conjuntos; en la Sección 4 se describen los procesos por lotes, enfatizando en su carácter irreversible; en la Sección 5 se analiza un ejemplo de Controlabilidad de estado de un proceso por lotes por medio del Conjunto de Trayectorias Controlables; y finalmente en la Sección 6 se presentan las conclusiones.

## 2. Sistemas irreversibles y controlabilidad de estado

A continuación se caracterizan los sistemas irreversibles desde la teoría de control y las problemáticas asociadas con la verificación de su controlabilidad de estado.

### 2.1 Los sistemas irreversibles desde la teoría de control

Tal como se indicó en la Introducción, hasta donde los autores conocen el único autor que ha definido desde la teoría de control los sistemas reversibles y los irreversibles es Sontag (1998), a continuación se retoman las definiciones dadas por él. Para ello considere el sistema dinámico indicado en (1).

$$\mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k), u(k)) \quad (1)$$

Donde  $u(k) \in U$  es el vector de variables de control,  $U \in \mathbb{R}^m$  representa el conjunto de las acciones de control que son admisibles al sistema, es compacto y simplemente conexo.  $\mathbf{x}(k) \in X$  es el vector de estados,  $X \in \mathbb{R}^n$  es el conjunto de estados que puede tomar el sistema físico, es cerrado y simplemente conectado. Se considera que  $f(\cdot, \cdot)$  está definida en el espacio  $X \times U$ . Además,  $\phi(t, s, \mathbf{x}, \omega)$  denota la trayectoria solución de (1) cuya condición inicial es  $\mathbf{x}$ , el tiempo inicial es  $s$ , el tiempo final  $t$  y  $\omega$  una secuencia de acciones de control admisibles.

De acuerdo con Sontag (1998) el sistema (1) es *débilmente reversible* si el estado final  $\mathbf{z}$  de la trayectoria  $\phi(t, s, \mathbf{x}, \omega)$  puede recobrar el estado inicial  $\mathbf{x}$  que generó dicha trayectoria, en un tiempo finito y con una acción de control admisible, aunque no necesariamente recupera el estado inicial en orden inverso; es decir, puede hacerlo por otra trayectoria. Asimismo, el sistema (1) es *fuertemente reversible* si el estado final  $\mathbf{z}$  de la trayectoria  $\phi(t, s, \mathbf{x}, \omega)$  puede recobrar el estado inicial  $\mathbf{x}$  que generó dicha trayectoria, en un tiempo finito y con una acción de control

admisibles y en orden inverso, es decir por la misma trayectoria (Sontag, 1998).

Un sistema dinámico es irreversible si no es reversible; además, un sistema es débilmente irreversible si no existe una acción de control admisible para retornar el sistema a su condición inicial; mientras que un sistema es fuertemente irreversible si no existe una acción de control admisible para que el sistema obtenga la misma trayectoria desde el estado inicial  $\mathbf{x}$  al estado final  $\mathbf{z}$ , como de  $\mathbf{z}$  a  $\mathbf{x}$ .

Adicionalmente, se aclara, que si bien Sontag (1998) diferencia los sistemas débilmente reversibles de los fuertemente reversibles, en esta investigación se trabajan los sistemas irreversibles que no satisfacen la condición de los sistemas débilmente reversibles y se llaman de ahora en adelante sistemas reversibles o sistemas irreversibles.

La irreversibilidad de un sistema se manifiesta tanto en la estructura misma de sus ecuaciones como en el acotamiento de la acción de control. De acuerdo con Haddad *et. al.* (2005) el sistema es irreversible si una variable de estado es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en todo tiempo. Lo anterior ocurre por ejemplo en los procesos de polimerización, en los cuales el peso molecular es una variable de estado creciente. Asimismo, en los procesos de fermentación que operan de manera semi-lote, en condiciones normales de funcionamiento, la concentración de biomasa es una variable siempre creciente; de igual forma, ocurre con el volumen de la masa reactiva. Adicionalmente, un sistema dinámico irreversible puede tener algunas de las componentes del vector de estado reversibles, sin embargo si una sola variable de estado es irreversible, la dinámica completa del proceso será irreversible.

De acuerdo con lo anterior un sistema irreversible es representado por medio del sistema (1), pero además, debe satisfacer que:

Para algún  $i = 1, \dots, n$ , y para todo  $k = [0, 1, 2, 3, \dots]$  se cumple que  $\mathbf{x}_i(k+1) \geq \mathbf{x}_i(k)$  o  $\mathbf{x}_i(k) \leq \mathbf{x}_i(k+1)$ ; es decir,  $\mathbf{x}_i$  es una función creciente o decreciente para todo  $\mathbf{x} \in X$  y  $\mathbf{u} \in U$ .

Esta condición de los sistemas irreversibles le confiere una serie de características dinámicas al sistema, algunas de las cuales se describen a continuación

### 2.2 Características dinámicas de los sistemas irreversibles

Quizás una de las características más relevantes de los sistemas irreversibles es que tienen un punto de operación variante en el tiempo. Estos sistemas evolucionan lejos del equilibrio, desde un estado inicial hasta un estado final muy diferente (Uffink, 2001). Adicionalmente, sus parámetros dinámicos también cambian con el tiempo e incluso puede cambiar su estructura matemática en el transcurso de la evolución (número de estados, por ejemplo especies que desaparecen o aparecen en sistemas biológicos), también es posible que algunos de sus parámetros cambien con la evolución del sistema, a pesar de que algunas variables de estado permanezcan constantes.

Desde el punto de vista del control, el punto de operación variante en el tiempo trae las siguientes consecuencias: dificultad para el manejo de no linealidades, mayores requerimientos del elemento final de control, medidas poco precisas asociadas con la falta de sensores y con la amplitud del rango de operación.

La incertidumbre también afecta de manera diferente a los sistemas irreversibles, por ejemplo en Gómez y Álvarez (2011) se realizó un análisis detallado de esta situación, donde se resalta

como la incertidumbre en las condiciones iniciales de los sistemas irreversibles se conservan a lo largo de toda la evolución del sistema; mientras que en los procesos reversibles estables, la incertidumbre en las condiciones iniciales se desvanecen con el tiempo.

Desde el punto de vista matemático los sistemas irreversibles no poseen un equilibrio, o si éste existe no tiene significado físico, ya que sería una solución trivial de la ecuación  $dx/dt = f(x(k), u(k)) = 0$ , de la forma  $x = 0$ . Es decir, no hay materia, no hay energía, no hay proceso, lo cual no tiene significado físico.

Por lo anterior no tiene sentido hablar de la estabilidad de estado de sistemas no lineales, en el sentido clásico de Lyapunov, de los sistemas irreversibles, pues ellos son diseñados a propósito inestables, evolucionando lejos del equilibrio. Por ello mismo, el análisis de controlabilidad de estado de sistemas irreversibles hasta ahora no se ha podido abordar desde las herramientas clásicas del álgebra de Lie o la geometría diferencial, como se detalla en la siguiente sección.

### 2.3 Los sistemas irreversibles y la Controlabilidad de estado

En 1960 R.E. Kalman (1960) definió el concepto de controlabilidad de estado para un sistema lineal invariante en el tiempo. La propiedad de controlabilidad de estado está relacionada con la capacidad que tiene un sistema dinámico para alcanzar un estado final fijo desde cualquier estado inicial. En trabajos posteriores, este concepto se ha generalizado para los sistemas dinámicos no lineales, en los cuales se definen otros términos como la accesibilidad y la controlabilidad de estado (Hermann and Krener 1977; Sontag, 1998; Isidori, 1995). Cuando el análisis se realiza de manera local, se consideran la accesibilidad y la controlabilidad local; y cuando el análisis se realiza de manera global se tiene la controlabilidad débil y la controlabilidad total de estado.

En los sistemas lineales estos conceptos son equivalentes, mientras que en los sistemas no lineales la accesibilidad se refiere a que el sistema puede moverse en todas las direcciones, y por lo tanto la controlabilidad de estado exige además que el sistema pueda alcanzar cualquier punto del espacio de estado. Para aclarar los conceptos anteriores, en la Figura 1 se ilustra el caso de un sistema dinámico con dos variables de estado. En a) se ilustra el caso inaccesible, en el cual las trayectorias del sistema sólo se pueden mover en una dirección desde la condición inicial. En b) se tiene un sistema accesible, es decir las trayectorias se pueden mover en un subespacio de la misma dimensión del espacio de estado desde la condición inicial; y finalmente en c) se ilustra el caso controlable, en el cual las trayectorias del sistema se pueden mover en todo el espacio de estado desde la condición inicial.

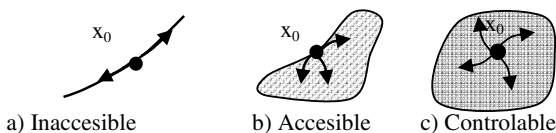


Figura 1: Accesibilidad y controlabilidad.

Para evaluar si un sistema dinámico lineal es controlable basta calcular el rango de la matriz de controlabilidad de Kalman y verificar si es igual a la dimensión del espacio de estado, entonces el sistema es controlable. En el caso de los sistemas dinámicos no

lineales no se han desarrollado herramientas que permitan evaluar directamente la controlabilidad de estado, pero es posible evaluar la accesibilidad por medio de una condición de rango de matriz, basada en el álgebra de Lie (Sontag, 1998).

La accesibilidad es una propiedad mas débil que la controlabilidad, algunas veces; sin embargo, como en el caso de los sistemas reversibles, la controlabilidad puede ser caracterizada por la condición de rango de accesibilidad. Para garantizar que un sistema dinámico no lineal sea controlable, además de satisfacer la condición de rango, el sistema debe ser reversible (colorario 4.3.12, Sontag, 1998).

Como puede deducirse de lo anterior, la reversibilidad en la teoría de control es aún una propiedad marginal y sólo se relaciona con la controlabilidad de sistemas reversibles. Por lo tanto, bajo este marco teórico es imposible analizar la controlabilidad de estado de un sistema irreversible. Por lo anterior, el análisis de controlabilidad de estado de sistemas irreversibles que se propone en este artículo se realiza desde los métodos de teoría de conjuntos aplicados a control (Blanchini and Miani, 2008).

### 3. Controlabilidad de estado de sistemas irreversibles mediante métodos de teoría de conjuntos

A continuación se retoman algunas definiciones importantes de la teoría de conjuntos aplicada al control y luego se proponen las definiciones de Conjunto Reversible y Conjunto de Trayectorias Controlables como herramientas para abordar el análisis de controlabilidad de estado de sistemas irreversibles.

#### 3.1 Conjunto alcanzable y conjunto controlable

**Definición 1** (Conjunto alcanzable a un paso  $\mathcal{R}(\Omega)$  del conjunto  $\Omega$ ) (Kerrigan, 2000). Es el conjunto de estados en  $\mathbb{R}^n$  a los cuales el sistema evolucionará en el próximo paso dado un  $x(k) \in \Omega$  y una acción de control admisible.

$$\mathcal{R}(\Omega) = \{x(k+1) \in \mathbb{R}^n \mid \exists x(k) \in \Omega, u(k) \in U : \dots \\ x(k+1) = f(x(k), u(k))\} \quad (2)$$

En otras palabras, el Conjunto Alcanzable está conformado por todos aquellos vectores del espacio de estado, que pueden ser alcanzados a partir de la evolución del sistema dinámico bajo el efecto de alguna acción de control admisible

**Definición 2** (Conjunto controlable a un paso  $\mathcal{C}(\Omega)$  del conjunto  $\Omega$ ) (Kerrigan, 2000). Es el conjunto de estados en  $\mathbb{R}^n$  para los cuales existe una acción de control admisible que garantiza que el sistema es conducido a  $\Omega$  en un paso.

$$\mathcal{C}(\Omega) = \{x(k) \in \mathbb{R}^n \mid \exists u(k) \in U : f(x(k), u(k)) \in \Omega\} \quad (3)$$

Por lo tanto, el Conjunto Controlable está conformado por todos aquellos vectores del espacio de estados, que bajo la influencia de alguna acción de control admisible, pueden llegar en un tiempo determinado, a partir de la evolución del sistema, a estar dentro del conjunto  $\Omega$ .

Tal como se indicó en la Sección 2.3 para que un sistema sea controlable, además de garantizar el criterio de la condición de rango, el sistema debe ser reversible. Con el fin de unificar estos dos criterios se propone la Definición de Conjunto Débilmente

Reversible, el cual dará cuenta de la controlabilidad de estado de sistemas reversibles.

### 3.2 Conjunto Reversible

La definición del Conjunto Reversible se obtiene con base en la definición de reversibilidad débil dada por Sontag (1998) y que se indicó en la Sección 2.2, junto con las definiciones de Conjunto Alcanzable y Conjunto Controlable (Blanchini y Miani, 2008).

**Definición 3.** *Conjunto Reversible de  $\Omega$  desde  $N$  hasta  $M$  ( $X_R(\Omega, N, M)$ ).* El conjunto débilmente reversible en  $N$  pasos desde  $\mathbf{x}(k+M)$  es el conjunto de estados  $\mathbf{x}(k+M) \in \mathcal{R}^M(\mathbf{x}(k))$  para los cuales existe una secuencia de acciones de control admisible que conducen al sistema a  $\mathbf{x}(k)$  en  $N$  pasos más.

$$X_R(\mathbf{x}(k), N, M) = \{ \mathbf{x}(k+M) \in \mathcal{R}^M(\mathbf{x}) \mid \exists \pi_{k+M}^N \in U^N : \dots \\ \mathbf{x}(k) = f_{\mathbf{u}(k+M) \circ \mathbf{u}(k+M+1) \circ \dots \circ \mathbf{u}(k+N+M-1)}(\mathbf{x}(k+M)) \} \quad (4)$$

Esto es,

$$X_R(\Omega, N, M) = \mathcal{R}_N(\Omega) \cap \mathcal{C}_M(\Omega) \quad (5)$$

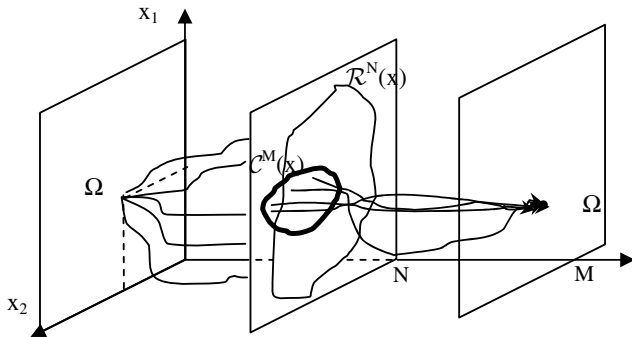


Figura 2: Conjunto Reversible

En la Figura 2 se ilustra el Conjunto Reversible, compuesto por la intersección entre el Conjunto Alcanzable y el Conjunto Controlable; esto permite analizar la controlabilidad de estado de sistemas no lineales. Para ello, es suficiente verificar que  $\text{int } X_R(\Omega, N, M) \neq \emptyset$  ya que, como se indicó en la Sección 2.3, un sistema no lineal es controlable si se cumple:

- i) Que el sistema sea reversible, y
- ii) Que se satisfaga la condición de rango.

Esto es, que la dimensión del algebra de Lie asociada al sistema (1) tenga la misma dimensión que el espacio de estados del sistema (1). En otras palabras lo que está indicando el algebra de Lie asociada al sistema (1) es la dimensión del Conjunto Alcanzable o del Conjunto Controlable, lo cual se verifica cuando  $\text{int } \mathcal{R}(\mathbf{x}) \neq \emptyset$  o  $\text{int } \mathcal{C}(\mathbf{x}) \neq \emptyset$ . Adicionalmente, la reversibilidad se verifica si  $\mathbf{x} \in X_R$  (Sontag, 1998).

Con base en lo anterior, si se calcula el Conjunto Reversible de un sistema no lineal es posible concluir sobre su controlabilidad de estado, pues si la dimensión de  $X_R(\Omega, N, M)$  es igual a la dimensión del espacio de estados, entonces el sistema es controlable.

Es posible establecer una relación entre la mirada tradicional de la controlabilidad de estado y la teoría de conjuntos, pues de hecho ambos enfoques se apoyan en el Conjunto Alcanzable y en el Conjunto Controlable (Calderon et al., 2012).

### 3.3 Conjunto de Trayectorias Controlables

En el caso de los sistemas irreversibles no es posible analizar la controlabilidad de estado tal y como ha sido planteada, es decir, ir desde  $\mathbf{x}(0)$  a  $\mathbf{x}(t_f)$  y retornar a  $\mathbf{x}(0)$ , sino que en estos sistemas se busca ir desde  $\mathbf{x}(0)$  a  $\mathbf{x}(t_f)$ . Por ello, a continuación se propone el Conjunto de Trayectorias controlables, el cual da cuenta sobre la Controlabilidad de estados de sistemas irreversibles y que se basa en el Conjunto Reversible (Definición 3), con la salvedad de que si bien en el Conjunto Reversible, tanto el Conjunto Alcanzable, como el Conjunto Controlable se calculan a partir del mismo conjunto  $\Omega$ , ver Figura 2, en el caso de los sistemas irreversibles, esto no tendría sentido por ser sistemas variantes en el tiempo, la idea entonces es calcular el Conjunto Alcanzable a partir de un conjunto inicial  $\Omega_0 = \mathbf{x}(0)$  y el Conjunto Controlable hacia la condición final  $\Omega_N = \mathbf{x}(t_f)$ .

**Definición 4** *Conjunto de Trayectorias Controlables desde  $\Omega_0$  a  $\Omega_N$  en  $N$  pasos ( $T_N(\Omega_0, \Omega_N)$ ).* El Conjunto de Trayectorias Controlables en  $N$  pasos  $T_N(\Omega_0, \Omega_N)$  es la secuencia de los conjuntos  $\Omega^i$  de estados en  $\mathbb{R}^n$ , alcanzables en  $i$  pasos ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) desde  $\Omega_0$  y controlables en  $(N-i)$  pasos desde  $\Omega_N$ , para los cuales existe una secuencia de acciones de control admisibles, tal que para toda condición inicial  $\mathbf{x}(k) \in \Omega_0$ , es posible garantizar que el sistema puede alcanzar una condición final dada  $\mathbf{x}(k+N) \in \Omega_N$  en  $N$  pasos, a través de una trayectoria de estados  $\mathbf{x}(k+i)$ , todos pertenecientes a los conjuntos  $\Omega^i$ . Ver Figura 3.

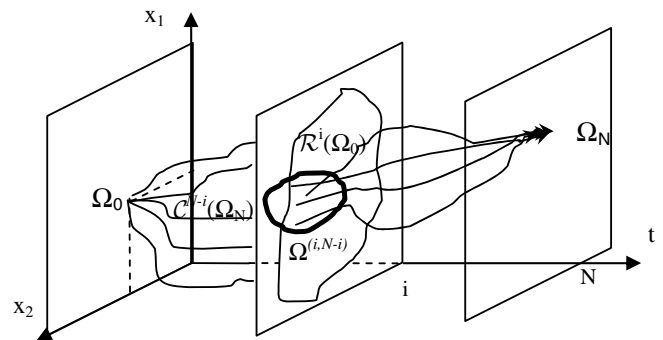


Figura 3: Conjunto  $\Omega^{(i, N-i)}$  del Conjunto de Trayectorias Controlables



Desde la mirada clásica de la controlabilidad de estado debería verificarse que el  $\text{int} T_N(\Omega_0, \Omega_N) \neq \emptyset$ . Sin embargo, esta tarea sería demasiado ardua, pues requiere verificar para cada paso por medio del álgebra de Lie que tanto el interior del Conjunto Alcanzable es diferente de vacío, como el interior del Conjunto Controlable ( $\text{int} \mathcal{R}(\mathbf{x}) \neq \emptyset$ ). De hecho, en Sontag (1988) se discute la complejidad del problema de determinar la controlabilidad mediante la matriz de Kalman para el caso lineal y mediante la condición del rango de los corchetes de Lie para el caso no lineal. En dicho artículo se concluye que desde esta perspectiva el problema de la controlabilidad es NP-hard.

No obstante, en otras aplicaciones de control se calculan directamente los conjuntos necesarios para diseñar el controlador y garantizar la estabilidad (Kerrigan and Maciejowski, 2000; Bravo et al., 2006; Limon et al., 2005). Si bien esta labor para el caso no lineal también es ardua e incluso es un problema NP-hard, existen una gran variedad de propuestas para el caso de sistemas lineales (Blanchini, 1999; Kerrigan, 2000). Para el caso de sistemas no lineales se tiene la propuesta de Bravo et al (2005), en la cual se calcula el Conjunto Controlable con técnicas de aritmética intervalar; sin embargo, como el mismo autor lo indica, la complejidad del problema crece exponencialmente con la dimensión del mismo. Por lo anterior, a continuación se detalla la técnica de algoritmos aleatorizados para calcular el Conjunto de Trayectorias Controlable de una manera sencilla.

### 3.4 Cálculo del Conjunto de Trayectorias Controlables

El cálculo del Conjunto Controlable para sistemas no lineales es aún un problema abierto, pues no existen algoritmos eficientes para ello (Blanchini and Miani, 2008). La motivación para obtener un algoritmo eficiente que permita calcular el Conjunto Controlable de sistemas no lineales es un área activa de investigación, debido a su aplicación en los paradigmas actuales del Control Predictivo Basado en Modelo, donde la mayoría de aplicaciones se han restringido a sistemas lineales (Kerrigan, 2000).

En muchas otras áreas de control se presenta una situación similar, si bien los desarrollos y técnicas propuestas son válidos para cualquier sistema, su aplicación sólo es viable computacionalmente para sistemas lineales. En Blondel and Tsitsiklis (2000) se presenta una revisión de una gran variedad de problemas de la teoría de control que son considerados intratables. No obstante, una alternativa de solución que ha resultado viable para abordar algunos de estos problemas son los algoritmos aleatorizados, tal como es indicado por Vidyasagar, (1998), donde se destacan los desarrollos realizados en control robusto (Calafiore et al., 2000).

Con base en lo anterior, para el cálculo de los Conjuntos Alcanzables, Controlables y el Conjunto de Trayectorias Controlables, se proponen dos técnicas basadas en algoritmos aleatorizados que han resultado exitosas en otras aplicaciones y que permiten transformar un problema intratable en un problema de complejidad polinomial, cuyo tiempo específico de cálculo dependerá de la complejidad del sistema y el equipo de cómputo (Calderon et al., 2012; Gómez et al., 2010).

#### Algoritmo 1. Cálculo del Conjunto Alcanzable

Inicio

Dados. Un conjunto de condiciones iniciales  $\Omega$ , un error y un riesgo de fallo ( $\varepsilon$  and  $\delta$ ), un conjunto de restricciones en los estados  $\mathcal{X}$  y un conjunto de restricciones en la variable de control  $\mathcal{U}$ .

- Determine el tamaño de la muestra por medio de la desigualdad de Chernoff  $N > \frac{1}{2\varepsilon^2} \log \frac{2}{\delta}$ .
- Obtenga  $N$  muestras  $\mathbf{x}_i \sim \text{Uniform}(\Omega)$  y  $\mathbf{u}_i \sim \text{Uniform}(\mathcal{U})$ , con  $i = 1, 2, 3, \dots, N$
- Calcule los  $N$   $\mathbf{x}_{k+1}^i$  de acuerdo con (1), con  $i = 1, 2, 3, \dots, N$

Retorne, con una probabilidad  $(1 - \delta)$ , una estimación del Conjunto Alcanzable  $\mathcal{R}^i(\Omega)$  tal que,

$$P^N \left\{ \mathbf{x} \in X^N : |P(\mathcal{R}(\Omega)) - \hat{P}(\mathcal{R}(\Omega); \mathbf{x})| > \varepsilon \right\} \leq 2 \exp(-2N\varepsilon^2)$$

Fin.

Donde  $P(\mathcal{R}(\Omega))$  es la probabilidad que se desea estimar y  $\hat{P}(\mathcal{R}(\Omega))$  es la estima de la probabilidad con un número finito de muestras. La probabilidad de que el error de la estima (diferencia entre estas dos probabilidades), sea mayor que un valor dado, es siempre menor o igual que una función exponencial que decrece con el aumento del número de muestras  $N$ . Es de aclarar que esta expresión de convergencia en probabilidad es válida a un paso. Para mayor detalle ver Apéndice A.

*Observación:* Para calcular el Conjunto Controlable se utiliza igualmente el Algoritmo 1, pero se resuelve el sistema en tiempo inverso; esto es,  $\mathbf{x}^i(k+1) = -f(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}_i(k))$ .

#### Algoritmo 2: Cálculo del Conjunto de Trayectorias Controlables

Inicio.

Dados  $\Omega_0$ ,  $\Omega_N$  y  $N$

- Calcule los  $N$  conjuntos alcanzables en  $i$  pasos ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) desde  $\Omega_0$ ,  $\mathcal{R}^1(\Omega_0)$ ,  $\mathcal{R}^2(\Omega_0)$ , ...,  $\mathcal{R}^N(\Omega_0)$
- Calcule los  $N$  conjuntos controlables en  $i$  pasos ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) hacia  $\Omega_N$ ,  $Q^1(\Omega_N)$ ,  $Q^2(\Omega_N)$ , ...,  $Q^N(\Omega_N)$
- Calcule cada uno de los subconjuntos  $\Omega_i$  del conjunto de trayectorias débilmente reversible por medio de la intersección entre los conjuntos alcanzables a  $i$  pasos  $\mathcal{R}^i(\Omega_0)$  con los conjuntos controlables a  $(N-i)$  pasos  $Q^{N-i}(\Omega_N)$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ , de la siguiente forma:
  - $\Omega^{(0,N)}(\Omega_0, \Omega_N) = \Omega_0$
  - $\Omega^{(1,N-1)}(\Omega_0, \Omega_N) = \mathcal{R}^1(\Omega_0) \cap Q^{N-1}(\Omega_N)$
  - $\Omega^{(2,N-2)}(\Omega_0, \Omega_N) = \mathcal{R}^2(\Omega_0) \cap Q^{N-2}(\Omega_N)$
  - ...
  - $\Omega^{(N-1,1)}(\Omega_0, \Omega_N) = \mathcal{R}^{N-1}(\Omega_0) \cap Q^1(\Omega_N)$

- $\Omega^{(N,0)}(\Omega_0, \Omega_N) = \Omega_N$
- Calcule el conjunto de trayectorias débilmente reversible, como la unión de todos los subconjuntos  $\Omega^i$ ; esto es,  $T_N(\Omega_0, \Omega_N) = \Omega_0 \cup \Omega^1 \cup \dots \cup \Omega_N$  con  $i = 1, 2, \dots, N-1$

Fin

*Observación:* Cada uno de los  $\Omega^i$  es un pseudo-conjunto invariante de control a  $N$  pasos, pues cumple que:

$$\mathbf{x}(k) \in \Omega_0 \Rightarrow \exists U(N) \in U : \mathbf{x}(k+N) \in \Omega_N. \quad (6)$$

Dicha propiedad demuestra la factibilidad de diseñar una ley de control “estabilizante” de los estados dentro de un conjunto de trayectorias controlables de  $\Omega_N$  a  $\Omega_0$ , puesto que está garantizada la existencia de acciones de control admisibles en el Conjunto de Trayectorias Controlables.

Tal como se indica en la Introducción una de las aplicaciones mas relevantes de sistemas irreversibles en la teoría de control son los procesos por lotes, a continuación se amplía este aspecto y se muestra como el Conjunto de Trayectorias Controlables son una herramienta aplicable a los procesos por lotes.

#### 4. Los procesos por lotes y su relación con los sistemas dinámicos irreversibles

Los procesos por lotes son aquellos que conducen a la producción de cantidades finitas de un producto determinado (material de salida) a partir de unas cantidades finitas de materiales de entrada, con un conjunto ordenado de actividades de proceso, en un periodo finito de tiempo usando uno o más equipos. Típicamente un proceso por lotes incluye la carga del material en el proceso, el procesamiento del material, la descarga del producto final y la preparación del siguiente lote (norma S88.01 ANSI/ISA, 1995; Camacho y Picó, 2006).

Además de los procesos continuos y por lotes, es común encontrar combinaciones de ambos, conocidos como procesos semilote (*semibatch*), en los cuales se adiciona continuamente o intermitentemente uno o varios materiales de entrada sin salida de producto, o se remueve continuamente producto sin la adición de material de entrada (Srinivasan et al., 2003). Aunque estos procesos tienen características tanto continuas como discontinuas, generalmente se incluyen dentro de la categoría de los procesos por lotes debido a que su comportamiento dinámico se asemeja más a esta clase de procesos, y por lo tanto comparten las mismas características dinámicas.

En Bonvin (1998) y en Gutierrez et al (2005) se describen detalladamente las principales características de los procesos por lotes:

- Variantes en el tiempo, es decir parámetros variantes y modificaciones de la estructura dinámica.
- Comportamiento no lineal, con restricciones en la operación y la acción de control.
- Imprecisiones en el modelado y presencia de perturbaciones externas e internas.
- Comportamiento irreversible.

##### 4.1 Procesos por lotes e irreversibilidad

Una de las principales características dinámicas de los procesos por lotes es su carácter irreversible; esto es, no existe

una acción de control admisible que permita que una vez el estado haya alcanzado su condición final deseada, pueda retornar a la condición inicial. Una de las consecuencias más relevantes de la irreversibilidad en el comportamiento de un sistema dinámico es que su evolución ocurre lejos del equilibrio, es decir, son sistemas transitorios en todo tiempo. Esto ocasiona que en los procesos por lotes la evolución del sistema dependa significativamente de las condiciones iniciales del mismo, y por lo tanto “*los procesos por lotes se encuentran cronológicamente amarrados a sus condiciones iniciales*” (Russell et al., 2000). En Gómez et al. (2011) se detalla el efecto de la irreversibilidad en el comportamiento dinámico, enfatizando en el efecto de las perturbaciones y de la incertidumbre.

##### 4.2 Control de Procesos por lotes

Como es de esperarse, el carácter irreversible de los procesos por lotes dificulta el diseño del sistema de control. Usualmente para sistemas reversibles (procesos continuos y robótica) se buscan como objetivos de control la regulación y el seguimiento. Sin embargo, en los procesos por lotes el objetivo de control puede interpretarse como un problema de posicionamiento; esto es, la obtención de una cantidad suficiente de un producto dentro de un rango de especificaciones, a partir de unas condiciones iniciales dadas. Este objetivo de control se obtiene de una manera indirecta, ya que las variables del proceso son guiadas a lo largo de alguna trayectoria especificada por medio de un control realimentado (Lee and Lee, 2003; Ferramosca et al 2013).

Por lo anterior, la mayoría de literatura de control de procesos por lotes se ha enfocado al seguimiento de una trayectoria (Lee and Lee, 2003).

No obstante, el seguimiento de una trayectoria es tan sólo una de las posibles formas de garantizar el verdadero objetivo de control de un proceso por lotes, que consiste en alcanzar un determinado estado final.

El objetivo de control de un proceso por lotes se puede formular así: *a partir de una condición inicial  $\mathbf{x}$  y dado un estado final deseado  $\mathbf{z}$ , encuentre una secuencia de acciones de control admisibles que lleve el sistema desde  $\mathbf{x}$  hasta  $\mathbf{z}$ , en un tiempo dado  $T$ , a pesar de las incertidumbres en el modelado y de las perturbaciones que afectan al proceso durante el tiempo de duración del lote.*

Nuevamente se enfatiza en que el problema de control de los procesos por lotes es un problema de posicionamiento y por tanto, en la necesidad de determinar las trayectorias que garanticen la conducción del sistema desde un estado inicial dado hasta un estado final deseado con acciones de control admisibles. Esta situación puede interpretarse como un problema de controlabilidad; no obstante, y tal como se indicó en la Sección 2.2 con las herramientas clásicas sólo es posible determinar la controlabilidad de sistemas reversibles, por ello se propone utilizar el Conjunto de Trayectorias Controlables a los procesos por lotes, debido a su carácter irreversible. En la siguiente sección se desarrolla un ejemplo ilustrativo utilizando para ello uno de los problemas de referencia de la literatura de los procesos por lotes.

##### 5. Caso de estudio

El proceso en consideración consiste en un reactor semilote continuamente agitado. Se tiene la reacción  $A+B \rightarrow C$  totalmente en fase líquida. Inicialmente se inicia el proceso con A y una pequeña cantidad de B. Mientras el proceso está operando,

B puede alimentarse continuamente con el fin de mantener en todo momento su concentración por debajo de cierto límite admisible. Las ecuaciones que modelan el proceso son (Srinivasan *et al.*, 2003).

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -kx_1x_2 - \frac{u}{x_3}x_1 \\ \dot{x}_2 &= -kx_1x_2 + \frac{u}{x_3}(C_{Bin} - x_2) \\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}\quad (7)$$

Donde  $x_1$  es la concentración de A,  $x_2$  es la concentración B,  $x_3$  es el volumen de la masa reactiva y  $u$  es el flujo de alimentación. Los parámetros  $k$  y  $C_{Bin}$  son la constante cinética de la reacción y la concentración de alimentación de B respectivamente. Los parámetros usados para la simulación se indican en la Tabla 1.

Tabla 1: Valores de los parámetros, restricciones, condiciones iniciales y condiciones finales (Srinivasan *et al.*, 2003).

Parámetro	Valor	Unidades
$k_1$	0,053	l/mol min
$k_2$	0,128	l/mol min
$C_{Bin}$	5	mol/l
$x_1(0)$	2	mol/l
$x_2(0)$	0,62	mol/l
$x_3(0)$	0,7	L
$u_{min}$	0	l/min
$u_{max}$	0,001	l/min
$x_{1max}(t_f)$	0,72	mol/l
$x_{2max}(t_f)$	0,05	mol/l
$x_{3max}(t_f)$	1	L

Al inspeccionar las ecuaciones indicadas en (7) se evidencia el carácter irreversible de este sistema, porque la entrada  $u$  es un flujo de fluidos siempre positivo ( $u \geq 0$ ) y por lo tanto la variable de estado  $x_3$  es un estado siempre creciente; es decir el volumen en reactor es tal que  $x_3(k+1) \geq x_3(k)$ .

Adicionalmente, el único punto de equilibrio del sistema (7) no tiene significado físico, pues implica  $u=0$  y por tanto  $x_3=0$ ; es decir, el volumen del reactor sería cero y no se tendría ningún proceso.

En Srinivasan *et al.* (2003) por medio de una optimización dinámica se obtiene el tiempo final de lote y la trayectoria óptima, y por tanto los valores finales de las variables de estado. En este caso se retoman el tiempo final de lote y los valores finales de los estados, los cuales se indican en la Tabla 1. Para determinar los Conjuntos Alcanzables desde  $\Omega_0 = \mathbf{x}(0)$  se utiliza el Algoritmo 1, con un error de 0,1 y un riesgo de fallo de 0,2. El modelo del proceso indicado en (7) se discretiza con un Runge Kutta de cuarto orden. Para el cálculo de los Conjuntos Controlables hacia  $\Omega_N = \mathbf{x}(t_f)$  se utiliza nuevamente el Algoritmo 1, pero se resuelve el sistema (7) en tiempo inverso, se utiliza además, el mismo error y riesgo de fallo y el mismo método de discretización. Finalmente, para la obtención del Conjunto de Trayectorias Controlables, se utiliza el Algoritmo 2 indicado mediante la región sombreada de las Figuras 4, 5, y 6.

En la Figura 4 se observa que el Conjunto de Trayectorias Controlables para  $x_1$  es muy pequeño, lo cual indica que existen muy pocas trayectorias admisibles para alcanzar la condición final deseada a partir de las condiciones iniciales, el tiempo de duración del lote y las restricciones indicadas en la Tabla 1. Además, si aparece una perturbación en el transcurso del lote, ésta puede modificar la trayectoria de tal forma que el sistema se salga de la zona sombreada. Ante esta situación, no existirá una acción de control admisible que garantice que el sistema alcance la condición final deseada y por tanto existe un alto riesgo de perder el lote.

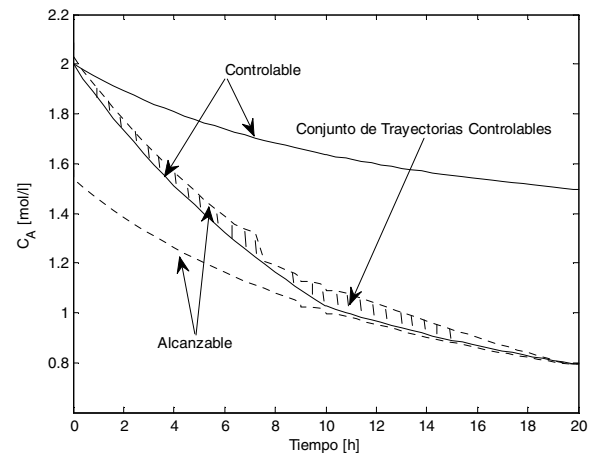


Figura 4: Secuencia de conjuntos alcanzables, conjuntos controlables y conjunto de trayectorias controlables del estado  $x_1$

En el caso de  $x_2$  (ver Figura 5) la situación no es tan crítica, pues el Conjunto de Trayectorias Controlables contiene una cantidad de estados considerable; no obstante, en este caso se evidencia que a medida que se acerca al final del lote se pierde controlabilidad limitando cada vez más la acción de control.

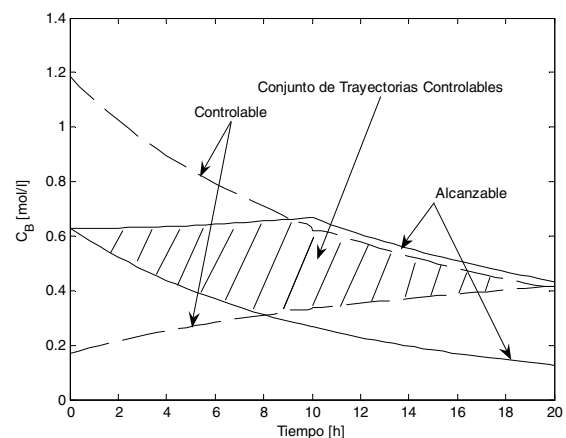


Figura 5: Secuencia de conjuntos alcanzables, conjuntos controlables y conjunto de trayectorias controlables del estado  $x_2$

Algunas posibles soluciones para aumentar la controlabilidad de estado de un proceso como el analizado son:

- Aumentar el tiempo de duración del lote, con lo cual se hace menos eficiente el proceso, pero se obtiene una mayor controlabilidad de estado y por tanto una mayor posibilidad de terminar con éxito el producto deseado (Gómez et al, 2010).
- Modificar las condiciones iniciales, ya que el Conjunto Alcanzable y el Conjunto de Trayectorias Controlables dependen de este valor
- Aumentar el rango de operación de la acción de control, lo cual obviamente implicaría modificar el elemento final de control.

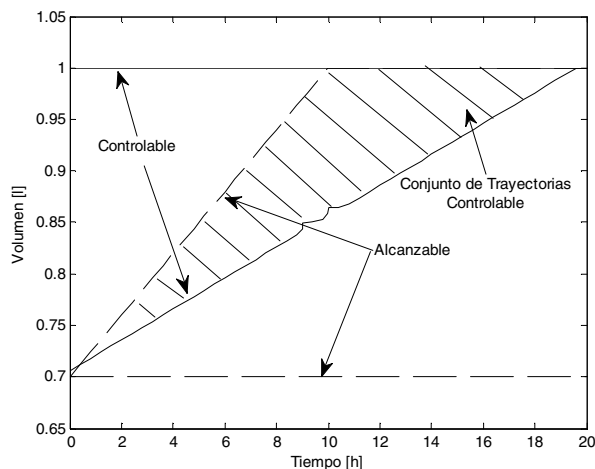


Figura 6: Secuencia de conjuntos alcanzables, conjuntos predecesores y conjunto de trayectorias controlables del estado  $x_3$

En resumen, con el Conjunto de Trayectorias Controlables se evidencia que en el caso de los procesos por lotes la controlabilidad de estado no sólo depende de la acción de control, sino que también se ve fuertemente afectada por las condiciones iniciales y por el tiempo de duración del lote. Ese mismo conjunto de trayectorias limita la operación del lote y se debe considerar en las etapas de diseño de los procesos y en el cálculo de la trayectoria óptima.

## 6. Conclusiones

En este artículo se propusieron definiciones para el Conjunto Reversible, el cual da cuenta de la controlabilidad de estado, y Conjunto de Trayectorias Controlables, el cual permite analizar la controlabilidad de estados de sistemas irreversibles. Adicionalmente, se propuso un algoritmo aleatorizado que permite calcular dichos conjuntos para sistemas no lineales. En este sentido, las definiciones propuestas se aplicaron a un caso de reactor agitado semilote y se obtuvieron los conjuntos de trayectorias controlables y alcanzables para cada variable de estado.

Finalmente, se dejaron algunas indicaciones que permiten considerar la reversibilidad como un criterio que se debe considerar en el diseño del proceso y no solo en el diseño del controlador.

## English Summary

### State Controllability Analysis for Irreversible Systems Using Set Theory

#### Abstract

The irreversible systems have been little studied within the control theory framework, although one of their relevant cases is the batch process control problem. Therefore, in this work a method for analysing state controllability of irreversible systems is proposed. The method uses set theory and its extension to batch processes. Definitions for Reversible Set and Controllable Trajectories Set, both for nonlinear systems, are given in order to analyze state controllability for irreversible systems. Additionally, an algorithm for calculating mentioned sets from the dynamic process knowledge is proposed. The proposal is applied to a batch process benchmark. Obtained simulation results demonstrate the advantages of that proposal to analyze the state controllability of irreversible systems.

#### Keywords:

Controllability, reversible systems, batch control.

## Referencias

- Birkhoff, George D. Dynamical Systems, American Mathematical Society Providence, Colloquium Publications, 9, Rhode Island, 1991.
- Blanchini, F. (1999). Set invariance in control. *Automatica* **35**, 1747–1767
- Blanchini, F., and Miani, S.. Set Theoric Methods in Control. Series Editor Tamer Basar, University of Illinois at Urbana-Champaign, Birkhauser Boston. 2008
- Bonvin, D. Optimal operation of batch reactors – A personal view”. *Journal of Process Control*, 8, Nos. 5-6. 335-368, 1998.
- Blondel V., Tsitsiklis, J. A survey of computational complexity results in systems and control. *Automatica*, 36, 1249-1274. 2000
- Bravo, J.M, D. Limon, T. Alamo, E.F. Camacho. On the computation of invariant sets for constrained nonlinear systems: An interval arithmetic approach. *Automatica*, 41, 1583-1589, 2005.
- Bravo, J.M, Alamo, E.F. Camacho. Robust MPC of constrained discrete-time nonlinear systems based on approximated reachable sets. *Automatica* 42, 1745 – 1751, 2006.
- Calafiore, G., Dabbene, F., and Tempo, R. (2000). Randomized Algorithms for Probabilistic Robustness with Real and Complex Structured Uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45 (12), 2218-2235
- Calderon, C; Gómez, L; Alvarez H. Nonlinear Space State Controllability: Set Theory vs Differential Geometry. XV Congreso Latinoamericano de Control Automático. Octubre, Lima Perú. 2012.
- Camacho, J ; Picó, J. Minitorización de Procesos por Lotes Mediante PCA Multifase. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*. Vol 3. No. 3. p. 78 - 91. 2006.
- Cueli y Bordons. Control Predictivo-iterativo basado en modelo y aplicado a procesos por lotes. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*. Vol 3. No. 1. p. 63-74. 2006.
- Ferramosca, A, J.K. Gruber, D. Limon, E.F. Camacho. Control predictivo para seguimiento de sistemas no lineales. Aplicación a una planta piloto. Vol 10. No. 1. p. 18-29. 2013
- Flores-Cerrillo, J., Macgregor, J. F. Latent variable MPC for trajectory tracking in batch processes. *Journal of Process Control*, 15, 651–663, 2005
- Gómez, C., Gómez, L., Álvarez, H. An approach to stability and controllability analysis in batch processes using set theory methods. *IEEE ANDESCON*, September, Bogota, Colombia. 2010.
- Gómez, L., Álvarez, H. (2011). La irreversibilidad: una mirada desde la teoría de los sistemas de control. *Revistas Avances en Sistemas e Informática*. 8, No2. 31-40. 2011.



- Gomez, L.M. Alvarez; H. Castro, H. Limitaciones de la Controlabilidad de Estados en Procesos por Lotes. Información Tecnológica, **23** fasc.5 p.97 - 108, 2012
- Gutierrez, L.p., Rincon, M., Alvarez, H. Control difficulties in bioprocesses inherited from their batch condition. XI RPIC, septiembre, Rio Cuarto, 2005.
- Haddad, W., Chellaboina, V., Nersisov, S. Time-Reservat Symmetry, Poincaré Recurrence, Irreversibility, and the Entropic Arrow of Time: From Mechanics to System Thermodynamics". Proc. 44th IEEE CDC-ECC, España, 5995-6002, 2005
- Hangos, K.M., J. Bokor and G. Szederkényi. Analisis and Control of Nonlinear Process System. Springer, London, 2005.
- Hermann, R., Krener, A.J. Nonlinear Controllability and Observability. IEEE Trans. Aut. Contr, **5**, 728-740, 1977.
- Isidori, A. Nonlinear Control Systems, Third edition, Springer, London, 1995.
- Kalman, R.E. On the General Theory of Control System. Proc. First IFAC Congress, **1**, 481-492. Moscow, 1960.
- Kerrigan, E. and Maciejowski, J. Invariant Sets for Constrained Nonlinear Discrete-time Systems with Application to Feasibility in Model Predictive Control. Proceedings of the 39 IEEE Conference on Decision and Control Sydney, Australia December. 2000
- Kerrigan, E. C. Robust Constraint Satisfaction: Invariant Sets and Predictive Control, PhD thesis, Department of Engineering, University of Cambridge, UK, 2000.
- Lee, K. and Lee, J. Iterative learning control-based batch process control technique for integrated control of end product properties and transient

profiles of process variables. Journal of Process Control, **13**, 607-621, 2003.

Limon D., Alamo, T. & Camacho, E. F. Enlarging the domain of attraction of MPC controller. Automatica, **41**, 629-635, 2005.

Prigogine, Illia. The end of certany. Time, chaos and laws of nature. The Free Press, 1996.

Russell, S.A., D. G. Robertson, J. H. Lee and B. A. Ogunnaike. Model-based quality monitoring of batch and semi-batch processes. Journal of Process Control, **10**, 317-332, 2000.

Sontag, E. Mathematical Control Theory. Second Edition, Springer, New York, 1998.

Sontag, E. (1988) Controllability is harder to decide than accessibility. SIAM J. Control and Opt., **26**, 1106-1118

Srinivasan, B., and Bonvin, D. Controllability and stability of repetitive batch processes. Journal of Process Control, **17**; 285-295, 2007.

Srinivasan, B., Palanki, S. and Bonvin, D. Dynamic optimization of batch processes II. Role of measurements in handling uncertain. Computers and Chemical Engineering, **27**; 27-44, 2002.

Srinivasan, B., Palanki, S. and Bonvin, D. (2003). Dynamic optimization of batch processes I. Characterization of the nominal solution. Computers and Chemical Engineering, **27**; 1-26

Uffink, J. Bluff your way in the second law of thermodynamics. J. Stud. Hist. Phil. Mod. Phys., **32**, 305-394, 2001.

Vidyasagar, M. Nonlinear System Analysis, 1993.

Vidyasagar, M. Statistical Learning Theory and Randomized Algorithms for Control. IEEE Control Systems. 1998.

## Apéndice A

Con el fin de aclarar la el efecto de error y del riesgo de fallo ( $\varepsilon$  and  $\delta$ ) en la expresión de probabilidad indicada en el Algoritmo 1, se utiliza un ejemplo de un sistema lineal.

Considere el sistema lineal dado por la ecuación A-1 y con las restricciones en los estados y en las acciones de control, indicadas en la Ecuación A-2 y A-3 respectivamente.

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \quad \text{A-1}$$

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right] \mathbf{x}(k) \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{A-2}$$

$$U = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \left[ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right] \mathbf{u}(k) \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{A-3}$$

El cálculo del conjunto alcanzable exacto se realiza mediante el software "Invariant Set Toolbox, Copyright (c)" desarrollado por Kerrigan (2000). Para el cálculo del conjunto alcanzable por medio del Algoritmo 1 se utiliza un error de  $\varepsilon = 0,01$  y una confianza de  $1 - \delta = 0,98$ . Con estos valores se calcula el tamaño de la muestra mediante la cota de Chernoff, obteniéndose en este caso 46.000 muestras. Dado que el Algoritmo 1 arroja una nube de puntos se utiliza el comando convexhull de Matlab © para obtener la frontera del conjunto. En la Figura A-1 se comparan los conjuntos obtenidos para diez ejecuciones del Algoritmo 1 con el mismo número de muestras. Como se observa en la Figura A-1 no siempre se obtiene el mismo conjunto, pero siempre es posible definir *a priori* el error y el riesgo de fallo.

Adicionalmente, en la Figura A-2 se ilustra el valor de la probabilidad para cada una de las ejecuciones del Algoritmo 1.

Como se evidencia en la Figura A-2 el valor de  $\hat{P}[\mathcal{R}(\Omega); \mathbf{x}]$  y

por lo tanto la estimación  $\hat{\mathcal{R}}^N(\Omega)$  varía para cada ejecución;

no obstante, la variación de  $\hat{P}[\mathcal{R}(\Omega); \mathbf{x}]$  permanece acotado por el intervalo de confianza determinado *a priori* por el valor de la confianza  $\delta$ ; esto es, no siempre se obtendrá el mismo error en el cálculo del conjunto, pero se sabe cuál es el riesgo de no obtener siempre el mismo error.

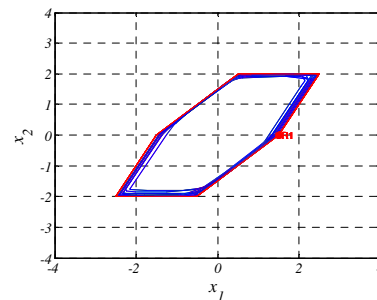


Figura A-1 Comparación conjuntos alcanzables

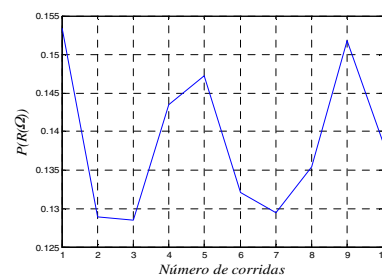


Figura A-2. Efecto del riesgo de fallo