

# Diseño de un Controlador por Convergencia de Estado para un Sistema Teleoperado no Lineal con Retardo de Comunicación

Julio C. Tafur<sup>a</sup>, Cecilia E. García<sup>\*b,c</sup>, Rafael Aracil<sup>b</sup>, Roque Saltarén<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica del Perú, Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima, Perú.

<sup>b</sup>Centro de Automática y Robótica. UPM - CSIC. C/José G. Abascal 2, 28006. Madrid, España

<sup>c</sup>Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial, Universidad Politécnica de Madrid, C/Ronda de Valencia, n°3, 28012, Madrid, España.

## Resumen

En este artículo se presenta el modelado y análisis de un sistema de teleoperación bilateral no lineal de  $n$  grados de libertad controlado por convergencia de estado. Se considera que el operador humano aplica una fuerza constante sobre el manipulador local mientras realiza la tarea. Además, la interacción entre el manipulador remoto y el entorno se considera pasiva. La comunicación entre el sitio local y remoto se realiza mediante un canal de comunicación con retardo de tiempo. El análisis presentado en este artículo considera que éste es variable. En este artículo también se demuestra la estabilidad del sistema utilizando la teoría de Lyapunov-Krasovskii demostrándose que el esquema de control por convergencia de estado para el caso con retardo de tiempo variable asegura la estabilidad del sistema de teleoperación no lineal. También se muestra experimentalmente que, para el caso de protocolos de comunicación fiables, el esquema propuesto garantiza que se logra la coordinación posición local-remoto. Copyright © 2014 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

## Palabras Clave:

Teleoperación, estabilidad, Lyapunov- Krasovskii, control no lineal, retardo de tiempo, convergencia de estado.

## 1. Introducción

Desde la introducción del primer manipulador maestro/esclavo a finales de la década de 1940, los sistemas de teleoperación han sido usados para la realización de diferentes tareas y en aplicaciones muy diversas tales como la manipulación de materiales tóxicos o nocivos, operación en entornos remotos tales como submarino o el espacio, aplicaciones médicas, de rescate, desactivación de explosivos, etc. Con los avances teóricos y prácticos logrados en los últimos años se prevé que esta técnica siga expandiéndose y masificándose su uso.

La telepresencia, que puede definirse como la capacidad de hacer que el operador humano sienta que es él quien realiza la tarea y no un robot remoto es, junto con la estabilidad, una propiedad clave en el sistema de teleoperación.

En cualquier sistema de teleoperación, la existencia del retardo de tiempo en el canal de comunicación es un problema potencial severo que puede degradar la estabilidad y el desempeño. Este retardo puede estar en el orden de milisegundos hasta segundos o incluso minutos en operaciones en el espacio exterior.

Cuando la separación física entre el sistema local y remoto es relativamente corta, el retardo no es perceptible; sin embargo, cuando el manipulador local y el manipulador remoto se encuentran a una distancia lejana uno del otro, el retardo de tiempo ya no es insignificante e influye negativamente en la realización de la tarea. El retardo de tiempo en un sistema de control introduce un atraso de fase que a su vez degrada el rendimiento del sistema y puede causar inestabilidad.

Uno de los primeros trabajos que trata el problema del retardo fue publicado en (Ferrel, 1965), donde el sistema fue operado en lazo abierto, por lo tanto no se observó problemas de inestabilidad (Anderson and Spong, 1989). Se concluyó, a partir de varios experimentos, que la mayoría de los operadores adoptaban la estrategia “mover y esperar” para corregir los efectos del retardo significativo. En 1966 se determinó que un retardo de tiempo igual o menor que 50 ms puede desestabilizar los controladores bilaterales (Anderson and Spong, 1989), (Kim *et al.*, 1992). Estos autores también probaron que se genera energía en el canal de comunicación que hace que esta componente del sistema no sea pasiva.

Un modo de solucionar este problema es la adición de amortiguamiento al maestro y al esclavo para absorber la energía generada en el sistema (Melchiorri and Eusebi, 1996), (Yokokohji and Yoshikawa, 1994). Como una alternativa, el control bilateral se puede modificar de modo tal que el canal de comunicación

\*Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [jtafur@pucp.edu.pe](mailto:jtafur@pucp.edu.pe) (J. Tafur),

[cecilia.garcia,rafael.aracil,@upm.es](mailto:cecilia.garcia,rafael.aracil,@upm.es) (C. García, R. Aracil)

[rsaltaren@etsii.upm.es](mailto:rsaltaren@etsii.upm.es) (R. Saltarén)

actúa como una línea sin pérdida de transmisión (Anderson and Spong, 1989).

En (Anderson and Spong, 1989) se propone emplear la pasividad y la teoría de dispersión para superar la inestabilidad causada por retardos de tiempo. (Niemeyer and Slotine, 1991) generalizaron la idea de (Anderson and Spong, 1989) y propusieron un método de control de teleoperación basado en señales de onda. Este trabajo mostró que, usando la transformación de onda, el sistema de teleoperación bilateral podría ser estabilizado para cualquier retardo de tiempo constante. Sin embargo, para retardos de tiempo variables, el control basado en señales de onda no tiene un buen rendimiento con respecto al seguimiento, o incluso puede tornarse inestable.

En (García *et al.*, 2003) se propone una estrategia de control supervisor en la que se dota al sistema remoto de conocimiento sobre el sitio local de forma tal de darle autonomía en caso de grandes retardos o de pérdida de conexión con el sitio local. Genera de esta manera señales predictivas aditivas que garantizan la estabilidad aún ante grandes retardos.

En (Lee and Spong, 2006) se propone una estructura de control bilateral de teleoperación para un par de sistemas robóticos no lineales de múltiples grados de libertad. Mediante el uso de conceptos de control de pasividad, la técnica de Lyapunov-Krasovskii y la identidad de Parseval se realiza una pasivización de la combinación del canal de comunicación retardado y los bloques de control, en tanto que el retardo sea constante y se conozca la cota superior para el retardo de ida y vuelta.

Los sistemas de teleoperación pueden sacar provecho de la posibilidad de estar presente en dos lugares simultáneamente, y una posible aplicación puede ser una cirugía a distancia donde el cirujano se encuentra muy lejos del paciente. Sin embargo, el uso de Internet y otras redes de conmutación de paquetes, tales como Internet2, impone retardos de tiempo variables, haciendo que los esquemas de control ya establecidos elaboren soluciones para hacer frente a inestabilidades causadas por estos retardos de tiempo variables.

En (Lozano *et al.*, 2007) se trata el problema de teleoperación bilateral considerando que el modelo del operador no es pasivo. Mediante el uso de una estrategia de control PD, considerando el retardo del canal de comunicación y para un rango de las ganancias proporcionales de acoplamiento, se demuestra que las posiciones convergen asintóticamente a un punto de equilibrio no cero.

(Nuño and Bazañez, 2009) pretenden dar un primer paso hacia la unificación de los análisis de estabilidad para teleoperadores con retardos de tiempo. Proponen una función general como candidata de Lyapunov, la cual con una ligera modificación, permite analizar la estabilidad de diferentes esquemas de control, que van desde retardos de tiempo constantes a variables, con o sin transformación de dispersión y con o sin seguimiento de posición.

### 1.1. Evolución del Control por Convergencia de Estado

La metodología de convergencia de estado representa una alternativa para el diseño de controladores bilaterales. Esta metodología, es relativamente nueva y ha sido propuesta a principio de la última década. Se basa en un sistema de teleoperación modelado en variables de estado en el dominio del tiempo, en el cual se han considerado todas las posibles

interacciones que pueden aparecer sobre el conjunto operador - maestro - esclavo - entorno.

La importancia y la novedad del método de diseño presentado en (Azorin, 2004a), radica en la posibilidad de obtener un esquema de control de modo que la dinámica del esclavo, así como la dinámica de la convergencia de estado del maestro y el esclavo, tengan un comportamiento deseado considerando el retardo existente en la comunicación, la constante de reflexión de fuerza y características dinámicas del maestro, esclavo y el entorno.

El método ha sido validado experimentalmente en sistemas teleoperados de un grado de libertad (Azorin, 2004a) y de dos grados de libertad (Peña, 2009). Se han realizado estudios sobre estrategias de control adaptativo basados en este esquema de control (Artigas, 2010), diseños contemplando retardos en la transmisión (Azorin, 2004b), control bilateral por convergencia de estado en sistemas teleoperados donde la estructura del robot maestro difiere el esclavo (Peña, 2009).

En (Artigas, 2010), se presenta una nueva versión del sistema de control basado en (Azorin, 2004a), para el diseño de un controlador bilateral basado en el concepto de control adaptativo. El esquema incluye algunas ganancias escalares adicionales y matrices que alimentan la interacción entorno-esclavo hacia el maestro. Estas ganancias se adaptan según los cambios en los parámetros dinámicos de los manipuladores. El análisis considera sólo sistemas lineales de primer orden y no se considera el retardo de comunicación. Los autores concluyen que, con este esquema no es posible obtener la transparencia ideal, debido a que se deriva de un sistema no-causal. Se muestran resultados experimentales para validar el método, pero sólo se han aplicado a un sistema lineal de un grado de libertad.

Este artículo constituye un notable avance respecto de los anteriores ya que se aplica la estrategia de control a sistemas no lineales de  $n$  grados de libertad (GdL) con retardo variable en el canal de comunicación.

En este artículo se presentan las siguientes contribuciones:

- I. Se demuestra la estabilidad de un sistema de teleoperación bilateral no lineal tanto para manipulación local y remoto con retardo de tiempo variable,
- II. Se logra la sincronización las posiciones del manipulador local y remoto cuando el manipulador remoto puede moverse libremente,
- III. Se demuestra que el esquema de control se puede implementar en tiempo real.
- IV. Se demuestra experimentalmente que el esquema de control propuesto asegura la estabilidad asintótica del sistema para el manipulador local y remoto con retardo de tiempo variable.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: En la Sección 2 se describe el modelo matemático del sistema de teleoperación. En la Sección 3 se muestra la estrategia de control de convergencia de estado considerando retardo variable en el canal de comunicación. En la Sección 4 se muestran los resultados de las simulaciones para el esquema de control propuesto. En la Sección 5 se muestran los resultados experimentales. Finalmente se presentan las conclusiones.

## 2. Modelo No Lineal del Teleoperador de orden $n$

El robot manipulador local y remoto son modelados mediante la formulación Lagrange- Euler como un par de enlaces seriales de  $n$  grados de libertad con articulaciones rotacionales.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_l(\mathbf{q}_l)\ddot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{C}_l(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)\dot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{g}_l(\mathbf{q}_l) &= \boldsymbol{\tau}_{lc} + \mathbf{F}_h \\ \mathbf{M}_r(\mathbf{q}_r)\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}_r(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}_r(\mathbf{q}_r) &= \boldsymbol{\tau}_{rc} - \mathbf{F}_e \end{aligned} \quad (1)$$

Donde  $\ddot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n$  corresponden a la aceleración, velocidad y posición de la articulación  $i = \{l, r\}$  donde el subíndice  $l$  y  $r$  representan el manipulador local y remoto respectivamente.  $\mathbf{M}(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia,  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  representa la matriz de fuerzas de coriolis y centrífugas,  $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerza gravitacional,  $\boldsymbol{\tau}_{ic} \in \mathbb{R}^n$  es la señal del par de control,  $\mathbf{F}_h \in \mathbb{R}^n$  representa la fuerza ejercida por el operador humano y finalmente,  $\mathbf{F}_e \in \mathbb{R}^n$  es la fuerza de interacción con el entorno.

**Hipótesis 1:** Se presume que la interacción del operador humano con el manipulador local es una fuerza constante del modo (Lozano *et al.*, 2007) siguiente:

$$\mathbf{F}_h = \mathbf{F}_{op} \text{ Vector constante } \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

**Hipótesis 2:** Se considera que la interacción del entorno con el manipulador remoto es pasiva.

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{q}_r + \mathbf{B}_e \dot{\mathbf{q}}_r \quad (3)$$

$\mathbf{K}_e, \mathbf{B}_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices positivas definidas

Debido a que la fuerza del operador humano se considera constante, no se garantiza que esta sea pasiva. Sin embargo, si la velocidad de las articulaciones tiende a cero a medida que el tiempo tiende a infinito, el operador humano aplicando una fuerza constante, aunque no necesariamente pasiva, necesita sólo una cantidad limitada de energía.

Este supuesto conduce a una clase menos restrictiva de los modelos del operador humano y del entorno que pueden incluirse en el sistema de teleoperación.

Se propone la ley de control (4) (Kelly and Santibáñez, 2003), en esta ley de control se realiza la compensación de las fuerzas gravitacionales, de modo que los controladores  $\boldsymbol{\tau}_{ic}$  están dados por (Figura 1):

$$\boldsymbol{\tau}_{lc} = \boldsymbol{\tau}_l + \mathbf{g}_l(\mathbf{q}_l), \quad \boldsymbol{\tau}_{rc} = \boldsymbol{\tau}_r + \mathbf{g}_r(\mathbf{q}_r) \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1) se tiene la siguiente dinámica para el sistema de teleoperación compensado en gravedad:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_l(\mathbf{q}_l)\ddot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{C}_l(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)\dot{\mathbf{q}}_l &= \boldsymbol{\tau}_l + \mathbf{F}_{op} \\ \mathbf{M}_r(\mathbf{q}_r)\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}_r(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r &= \boldsymbol{\tau}_r - \mathbf{F}_e \end{aligned} \quad (5)$$

## 3. Diseño del Algoritmo de Control

**Hipótesis 3:** Se presume que  $T_l(t)$  y  $T_r(t)$  son funciones continuamente diferenciables, que tienen una cota superior conocida  $T_i^+$  definida por:  $0 \leq T_i(t) \leq T_i^+ < \infty$ ,  $|\dot{T}_i(t)| < 1$ ,  $i = l, r$

Además, se conoce también que el retardo total (ida y vuelta) del canal de comunicación  $T_{lr}^+ = T_l^+ + T_r^+$ .

El manipulador local y remoto (1) se conecta a través de un canal de comunicación con retardo variable en el tiempo,  $T_i(t)$ ,  $i = \{l, r\}$ .

Considerando el algoritmo de control por convergencia de estado, el par de acoplamiento para el manipulador local y remoto están dados por (Figura 1):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_l &= \mathbf{K}_{l1}\mathbf{q}_l + \mathbf{K}_{l2}\dot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{R}_{l1}\mathbf{q}_r(t - T_r(t)) + \mathbf{R}_{l2}\dot{\mathbf{q}}_r(t - T_r(t)) \\ \boldsymbol{\tau}_r &= \mathbf{K}_{r1}\mathbf{q}_r + \mathbf{K}_{r2}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{R}_{r1}\mathbf{q}_l(t - T_l(t)) + \mathbf{R}_{r2}\dot{\mathbf{q}}_l(t - T_l(t)) + G\mathbf{F}_{op}(t - T_l(t)) \end{aligned} \quad (6)$$

Donde:  $\mathbf{K}_{l1}$ ,  $\mathbf{K}_{l2}$ ,  $\mathbf{R}_{l1}$ ,  $\mathbf{R}_{l2}$ ,  $\mathbf{K}_{r1}$ ,  $\mathbf{K}_{r2}$ ,  $\mathbf{R}_{r1}$  y  $\mathbf{R}_{r2}$  son matrices constantes de orden  $n \times n$ .  $G$  es una constante.

Utilizando las hipótesis 1 y 2, reemplazando (6) en (5), obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_l(\mathbf{q}_l)\ddot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{C}_l(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)\dot{\mathbf{q}}_l &= \mathbf{K}_{l1}\mathbf{q}_l + \mathbf{K}_{l2}\dot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{R}_{l1}\mathbf{q}_r(t - T_r(t)) + \mathbf{R}_{l2}\dot{\mathbf{q}}_r(t - T_r(t)) + \mathbf{F}_{op} \\ \mathbf{M}_r(\mathbf{q}_r)\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}_r(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r &= \mathbf{K}_{r1}\mathbf{q}_r + \mathbf{K}_{r2}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{R}_{r1}\mathbf{q}_l(t - T_l(t)) + \mathbf{R}_{r2}\dot{\mathbf{q}}_l(t - T_l(t)) \\ &\quad + G\mathbf{F}_{op}(t - T_l(t)) - \mathbf{K}_e\mathbf{q}_r - \mathbf{B}_e\dot{\mathbf{q}}_r \end{aligned} \quad (7)$$

Definiendo el valor en estado estacionario de la posición del manipulador local y remoto como  $\bar{\mathbf{q}}_l \in \mathbb{R}^n$  y  $\bar{\mathbf{q}}_r \in \mathbb{R}^n$ . En estado estacionario la dinámica del sistema satisface  $\dot{\mathbf{q}}_l = \dot{\mathbf{q}}_r = \ddot{\mathbf{q}}_l = \ddot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{0}$ . También, en estado estacionario se tiene que  $\mathbf{q}_l = \mathbf{q}_l(t - T_l(t)) = \bar{\mathbf{q}}_l$ ,  $\mathbf{q}_r = \mathbf{q}_r(t - T_r(t)) = \bar{\mathbf{q}}_r$ , como  $\mathbf{F}_{op}$  es constante  $\mathbf{F}_{op}(t - T_l(t)) = \mathbf{F}_{op}$ .

Reemplazando en (7), el valor en estado estacionario satisface

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{K}_{l1}\bar{\mathbf{q}}_l + \mathbf{R}_{l1}\bar{\mathbf{q}}_r + \mathbf{F}_{op} \\ \mathbf{0} &= \mathbf{K}_{r1}\bar{\mathbf{q}}_r + \mathbf{R}_{r1}\bar{\mathbf{q}}_l + G\mathbf{F}_{op} - \mathbf{K}_e\bar{\mathbf{q}}_r \end{aligned} \quad (8)$$

A fin de simplificar la demostración matemática, es conveniente establecer el origen  $[\mathbf{0}] \in \mathbb{R}^n$ , como el valor en estado estacionario del sistema. Para realizar esto, en el sistema de teleoperación, es necesario aplicar una transformación de coordenadas como esta:

$$\tilde{\mathbf{q}}_l(t) = \mathbf{q}_l(t) - \bar{\mathbf{q}}_l \rightarrow \mathbf{q}_l(t) = \tilde{\mathbf{q}}_l(t) + \bar{\mathbf{q}}_l \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_r(t) = \mathbf{q}_r(t) - \bar{\mathbf{q}}_r \rightarrow \mathbf{q}_r(t) = \tilde{\mathbf{q}}_r(t) + \bar{\mathbf{q}}_r \quad (10)$$

En las nuevas variables  $\tilde{\mathbf{q}}_l(t), \tilde{\mathbf{q}}_r(t)$ , el sistema tiene el valor en estado estacionario en el origen.

Puesto que  $\bar{\mathbf{q}}_l, \bar{\mathbf{q}}_r$  es un valor constante, entonces de (9) y (10)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_l(t) &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}_l}(t), \dot{\mathbf{q}}_r(t) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}_r}(t), \ddot{\mathbf{q}}_l(t) = \ddot{\tilde{\mathbf{q}}_l}(t), \ddot{\mathbf{q}}_r(t) = \ddot{\tilde{\mathbf{q}}_r}(t) \\ \mathbf{q}_l(t - T_l(t)) &= \tilde{\mathbf{q}}_l(t - T_l(t)) + \bar{\mathbf{q}}_l \\ \mathbf{q}_r(t - T_r(t)) &= \tilde{\mathbf{q}}_r(t - T_r(t)) + \bar{\mathbf{q}}_r \end{aligned}$$

Reemplazando en la dinámica de lazo cerrado (7)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_l \ddot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{C}_l \dot{\mathbf{q}}_l &= \mathbf{K}_{11}(\tilde{\mathbf{q}}_l + \bar{\mathbf{q}}_l) + \mathbf{K}_{12} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l + \mathbf{R}_{11}(\tilde{\mathbf{q}}_l(t - T_r(t)) + \bar{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{R}_{12} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r(t - T_r(t)) + \mathbf{F}_{op} \\ \mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{q}}_r &= \mathbf{K}_{r1}(\tilde{\mathbf{q}}_r + \bar{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{K}_{r2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r + \mathbf{R}_{r1}(\tilde{\mathbf{q}}_l(t - T_l(t)) + \bar{\mathbf{q}}_l) \\ &+ \mathbf{R}_{r2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l(t - T_l(t)) + G\mathbf{F}_{op} - \mathbf{K}_c(\tilde{\mathbf{q}}_l + \bar{\mathbf{q}}_r) - \mathbf{B}_c \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r \end{aligned}$$

Agрупando términos y usando (8)

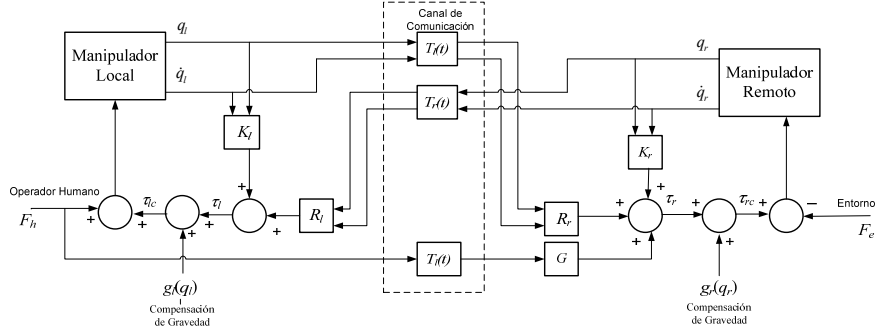


Figura 1. Diagrama de Bloques del Sistema de Control No Lineal Para el Sistema Teleoperado Con Retardo.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_l \ddot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{C}_l \dot{\mathbf{q}}_l &= \mathbf{K}_{11} \tilde{\mathbf{q}}_l + \mathbf{R}_{11} \tilde{\mathbf{q}}_l(t - T_r(t)) + \mathbf{K}_{12} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l + \mathbf{R}_{12} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r(t - T_r(t)) - \mathbf{K}_c \tilde{\mathbf{q}}_l - \mathbf{B}_c \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r \\ &+ \underbrace{\mathbf{K}_{r1} \tilde{\mathbf{q}}_r + \mathbf{R}_{r1} \tilde{\mathbf{q}}_r + G\mathbf{F}_{op}}_0 - \mathbf{K}_c \tilde{\mathbf{q}}_l \end{aligned}$$

Entonces la dinámica del sistema teleoperación bilateral en lazo cerrado está dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_l \ddot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{C}_l \dot{\mathbf{q}}_l &= \mathbf{K}_{11} \tilde{\mathbf{q}}_l + \mathbf{R}_{11} \tilde{\mathbf{q}}_l(t - T_r(t)) + \mathbf{K}_{12} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l + \mathbf{R}_{12} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r(t - T_r(t)) \\ \mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{q}}_r &= \mathbf{K}_{r1} \tilde{\mathbf{q}}_r + \mathbf{R}_{r1} \tilde{\mathbf{q}}_r(t - T_l(t)) + \mathbf{K}_{r2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r + \mathbf{R}_{r2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l(t - T_l(t)) - \mathbf{K}_c \tilde{\mathbf{q}}_r - \mathbf{B}_c \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l \end{aligned} \quad (11)$$

El teorema siguiente confirma la estabilidad del origen del sistema de teleoperación de lazo cerrado (11) con el algoritmo de control dado por (6).

### Teorema 3.1:

Para el sistema bilateral dado por (11), seleccionando las ganancias de control como

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= -\mathbf{K}, \quad \mathbf{K}_{12} = -(2\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_{ld}), \quad \mathbf{K}_{r1} = -\mathbf{K}, \quad \mathbf{R}_{12} = 2\mathbf{K}_{ld} \\ \mathbf{R}_{11} &= \mathbf{K}, \quad \mathbf{K}_{r2} = -(2\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_{rd}), \quad \mathbf{R}_{r1} = \mathbf{K}, \quad \mathbf{R}_{r2} = 2\mathbf{K}_{rd} \end{aligned} \quad (12)$$

Donde:  $\mathbf{K}_1$  y  $\mathbf{K}$  son matrices diagonales constantes positiva definida de orden  $n \times n$ .  $\mathbf{K}_{ld}$  and  $\mathbf{K}_{rd}$  son matrices diagonales positiva definida variantes en el tiempo de orden  $n \times n$  dadas por:

$$\mathbf{K}_{ld} = (1 - \hat{T}_r(t))\mathbf{K}_1, \quad \mathbf{K}_{rd} = (1 - \hat{T}_l(t))\mathbf{K}_1 \quad (13)$$

Si se cumple lo siguiente:

$$4k_{ii}^2 > k_i^2(T_i^{+2} + T_r^{+2}) \quad (14)$$

Donde  $k_i$ , el elemento  $i$  de la matriz diagonal  $\mathbf{K}$ ,  $k_{1i}$ , el elemento  $i$  de la matriz diagonal  $\mathbf{K}_1$ , y  $T_i^+$  para  $i = l, r$  son constantes escalares positivas, entonces el origen es asintóticamente estable.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_l \ddot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{C}_l \dot{\mathbf{q}}_l &= \mathbf{K}_{11} \tilde{\mathbf{q}}_l + \mathbf{R}_{11} \tilde{\mathbf{q}}_l(t - T_r(t)) + \mathbf{K}_{12} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l + \mathbf{R}_{12} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r(t - T_r(t)) \\ &+ \underbrace{\mathbf{K}_{r1} \tilde{\mathbf{q}}_r + \mathbf{R}_{r1} \tilde{\mathbf{q}}_r + \mathbf{F}_{op}}_0 \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}_l = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l = \lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_l = \lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_r = 0$$

Se recomienda al lector revisar el Apéndice A para la demostración matemática.

### Comentario: Caso Retardo Constante

Considerando que  $T_l^+ = T_r^+ = T$ , donde  $T$  es una constante, las condiciones impuestas sobre las ganancias de la ecuación (14) se puede expresar como:

$$2k_{ii}^2 > k_i^2 T^2$$

Las ganancias de control se pueden seleccionar como

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= -\mathbf{K}, \quad \mathbf{K}_{12} = -3\mathbf{K}_1, \quad \mathbf{K}_{r1} = -\mathbf{K}, \quad \mathbf{R}_{12} = 2\mathbf{K}_1 \\ \mathbf{R}_{11} &= \mathbf{K}, \quad \mathbf{K}_{r2} = -3\mathbf{K}_1, \quad \mathbf{R}_{r1} = \mathbf{K}, \quad \mathbf{R}_{r2} = 2\mathbf{K}_1 \end{aligned}$$

### 3.1 Fuerza de Reflexión Estática

Considere el sistema de teleoperación no lineal descrito por (5) y la ley de control dada por (6), y bajo el supuesto de (14) en estado estacionario, se tiene lo siguiente:

$$0 = \bar{\mathbf{F}}_{op} + \mathbf{K}_{11} \bar{\mathbf{q}}_l + \mathbf{R}_{11} \bar{\mathbf{q}}_r.$$

$$\text{De (12) } \mathbf{K}_{11} = -\mathbf{K}, \quad \mathbf{R}_{11} = \mathbf{K}, \quad \mathbf{K}_{r1} = -\mathbf{K}, \quad \mathbf{R}_{r1} = \mathbf{K}$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{op} = \mathbf{K}(\bar{\mathbf{q}}_l - \bar{\mathbf{q}}_r) \quad (15)$$

$$0 = -\mathbf{F}_e + \mathbf{K}_{r1} \bar{\mathbf{q}}_r + \mathbf{R}_{r1} \bar{\mathbf{q}}_l + G\bar{\mathbf{F}}_{op}$$

$$0 = -\mathbf{F}_e + \mathbf{K}(\bar{\mathbf{q}}_l - \bar{\mathbf{q}}_r) + G\bar{\mathbf{F}}_{op} \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{op} = \frac{\mathbf{F}_e}{(1 + G)} \quad (17)$$

### 3.2 Coordinación de Posición del Manipulador Local-Remoto

Si  $\mathbf{F}_{op} = \mathbf{F}_e = \mathbf{0}$ , (15) y (16) se puede escribir como  $\bar{\mathbf{q}}_l - \bar{\mathbf{q}}_r = \mathbf{0}$ .

Esto implica que los valores en estado estacionario del manipulador local y remoto son idénticos. Entonces el error de coordinación de posición  $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}_l(t) - \mathbf{q}_r(t)$  tiende a cero como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{q}_l(t) - \mathbf{q}_r(t)) = \mathbf{0}$$

De modo que existe una coordinación entre las posiciones del manipulador local y remoto.

## 4. Simulación

Para realizar las simulaciones del sistema, se considera, tanto para el sistema local como el remoto, el modelo genérico de un robot serial rígido de  $n$  grados de libertad cuyos parámetros se corresponden con el banco de pruebas experimental que se describirá en detalle en la sección siguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_l(\mathbf{q}_l)\ddot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{C}_l(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)\dot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{g}_l(\mathbf{q}_l) + \mathbf{f}_l(\dot{\mathbf{q}}_l) &= \boldsymbol{\tau}_{lc} + \mathbf{F}_{op} \\ \mathbf{M}_r(\mathbf{q}_r)\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}_r(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}_r(\mathbf{q}_r) + \mathbf{f}_r(\dot{\mathbf{q}}_r) &= \boldsymbol{\tau}_e - \mathbf{F}_e \end{aligned} \quad (18)$$

$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$  es un modelo estático de la fricción en la articulación, definido por (Kelly and Santibáñez, 2003):

$$\mathbf{f}_i(\dot{\mathbf{q}}_i) = \mathbf{f}_r(\dot{\mathbf{q}}_r) = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_3 \end{bmatrix}$$

Se han realizado dos tipos diferentes de simulaciones detallados en esta sección:

1. Una trayectoria deseada es impuesta al manipulador local por el operador humano sin interacción con cualquier entorno (movimiento en el espacio libre).
2. Un movimiento es impuesto al manipulador local por el operador mientras se realiza una interacción con un obstáculo en el lado remoto (percepción de entorno estructurado).

Tales situaciones son típicas en teleoperación y son muy útiles para probar: 1) capacidad de seguimiento de trayectoria en el lado remoto; 2) realimentación de fuerza al lado local con la finalidad de percibir correctamente el entorno remoto.

Para la simulación se asume que el retardo de tiempo es una señal aleatoria con una media de 0.028 seg. y una variancia de 0.00011 igual en ambas direcciones (Figura 2).

La cota del retardo de tiempo es igual en ambas direcciones  $T_r^+ = T_l^+ = 0.045$  seg.

Considerando,  $|\dot{\mathbf{T}}_i(t)| = \dot{T}_{\max} = 0.3$  las ganancias  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{K}_l$  son calculadas usando la relación (14):

Luego, los valores de las ganancias del controlador  $\mathbf{K}_{l1}$ ,  $\mathbf{K}_{l2}$ ,  $\mathbf{K}_{r1}$ ,  $\mathbf{K}_{r2}$ ,  $\mathbf{R}_{l1}$ ,  $\mathbf{R}_{l2}$ ,  $\mathbf{R}_{r1}$ ,  $\mathbf{R}_{r2}$ ,  $\mathbf{K}_{ld}$  y  $\mathbf{K}_{rd}$  se determinan por (12) y (13). Estos valores son los mismos para todas las simulaciones.

Además  $G = 0$ . En (Figura 5) se muestra el retardo de tiempo usado en la simulación.

$$\mathbf{K}_l = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La fuerza (par) aplicado por el operador a las articulaciones del manipulador local con la finalidad de mover el manipulador remoto se muestran en (Figura 3).

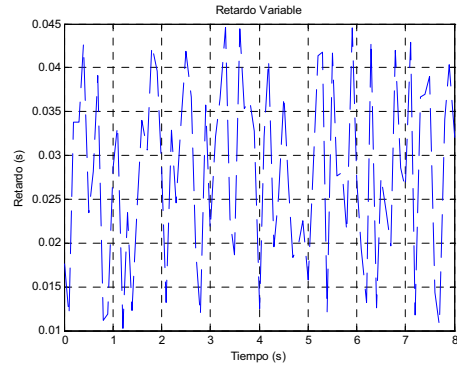


Figura 2: Retardo de tiempo variable.

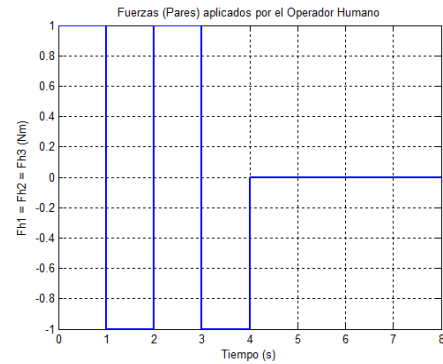


Figura 3: Par, [Nm] aplicado por el operador.

### 4.1 Caso A: Movimiento Libre

Como se ve de las señales (Figura 4) para el caso cuando el manipulador remoto no interactúa con el entorno, es decir, la fuerza de interacción es cero; se obtiene el seguimiento de posición usando el esquema de control propuesto. Las posiciones angulares de las articulaciones del manipulador remoto (línea discontinua) siguen las del manipulador local (línea sólida).

Cuando la fuerza aplicada por el operador es cero, en  $t = 4$  seg., el error de coordinación de posición  $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}_l(t) - \mathbf{q}_r(t)$  tiende a cero y los valores en estado estacionario de la posición del manipulador local y remoto  $\bar{\mathbf{q}}_l$  y  $\bar{\mathbf{q}}_r$  son idénticos.

La estabilidad del sistema de teleoperación en lazo cerrado con el esquema de control (4 - 6) se ha establecido en el Teorema 3.1. El controlador garantiza un comportamiento estable frente al

retardo de tiempo y también garantiza el seguimiento de la posición.

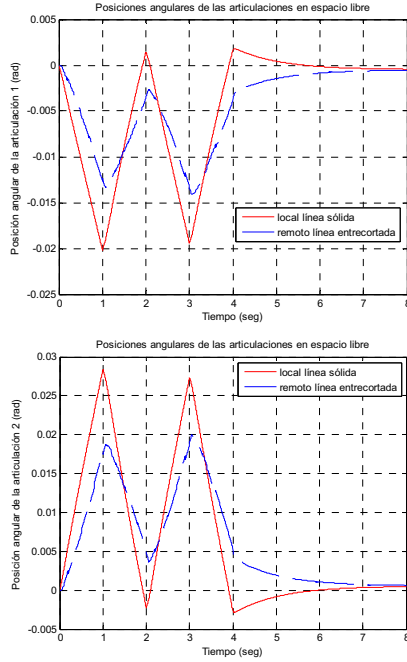


Figura 4: Posición angular del manipulador local y remoto para  $q_1$  (superior) y  $q_2$  (inferior).

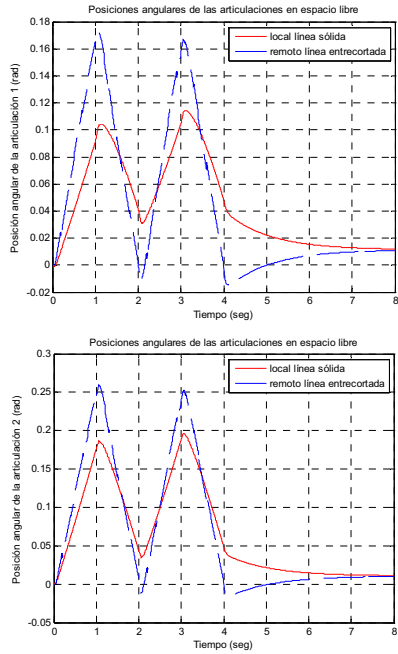


Figura 5: Posición angular del manipulador local y remoto para  $q_1$  (superior) y  $q_2$  (inferior).

Con  $G=0$ , si la ganancia  $K$  aumenta, los valores máximo y mínimo de las posiciones articulares se mantienen, además cuando el operador deja de aplicar una fuerza, el tiempo en alcanzar el estado estacionario disminuye. Si la ganancia  $K$

disminuye, los valores máximo y mínimo de las posiciones articulares se mantiene y aumenta el tiempo en alcanzar el estado estacionario cuando el operador deja de aplicar una fuerza. Si la ganancia  $K_1$  aumenta, los valores máximo y mínimo de las posiciones articulares disminuyen y aumenta el tiempo en alcanzar el estado estacionario cuando el operador deja de aplicar una fuerza. Si la ganancia  $K_1$  disminuye, los valores máximo y mínimo de las posiciones articulares aumentan y disminuye el tiempo en alcanzar el estado estacionario cuando el operador deja de aplicar una fuerza.

Cuando  $G=1$  (Figura 5), la fuerza aplicada por el operador al manipulador local, también se aplica al manipulador remoto, esto genera un incremento en la señal de control de par en el manipulador remoto, el efecto es que las variaciones de las posiciones angulares de las articulaciones del manipulador remoto se adelantan a las variaciones de las posiciones angulares del manipulador local.

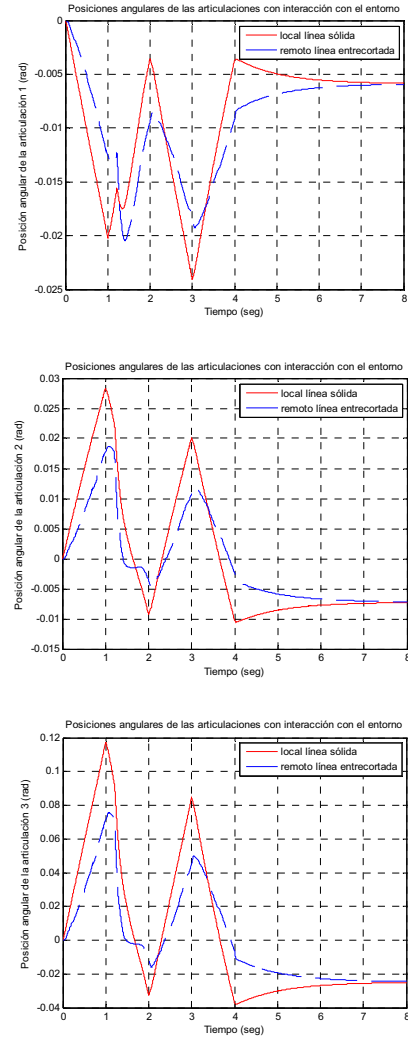


Figura 6: Posición angular del manipulador local y remoto para  $q_1$  (superior),  $q_2$  (media),  $q_3$  (inferior).

#### 4.2 Caso B: interacción con el Entorno

Para evaluar la estabilidad cuando se tiene contacto con el entorno, consideramos un entorno suave modelado mediante un sistema resorte-amortiguador, con las constantes de ganancia del resorte y amortiguador dados como:

$$\mathbf{K}_e \in \mathbb{R}^{3 \times 3} = \text{diag}(25) \text{ N m}, \quad \mathbf{B}_e \in \mathbb{R}^{3 \times 3} = \text{diag}(1) \text{ N} \cdot \text{s m}$$

Cuando el manipulador remoto no hace contacto con el entorno (0 - 1.2 seg. y 1.8-8.0 seg.) se logra el seguimiento de posición del manipulador local y remoto (Figura 6).

Las simulaciones no pueden replicar la calidad de la percepción humana, pero los resultados de estas simulaciones proporcionan indicaciones útiles para evaluar el rendimiento del controlador.

#### 4.3 Reflexión de Fuerza

En esta sección se muestra la fuerza que siente el operador  $\tau_h$  y la fuerza de interacción del manipulador remoto con el entorno  $\tau_e$ .

El manipulador remoto hace contacto con el entorno en el intervalo 1.2 - 1.8 segundos.

En (Figura 7) se muestra la componente del par en la primera articulación, tanto para el operador como el entorno.

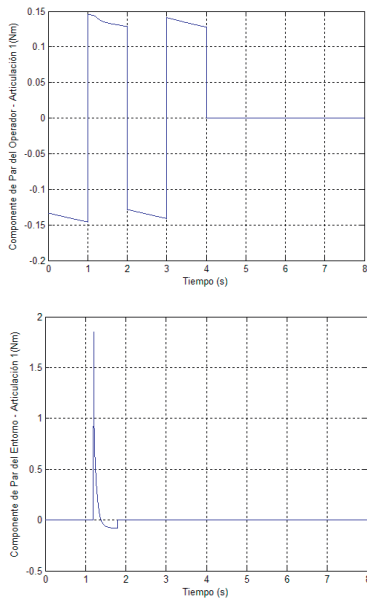


Figura 7: Fuerza de Reflexión, componente del par del operador (superior), componente de interacción con el entorno (inferior).

## 5. Pruebas Experimentales

Se ha construido un prototipo del sistema de teleoperación bilateral local - remoto en tiempo real (Figura 8).

El manipulador local es un dispositivo háptico de 6 grados de libertad PHANTOM Omni<sup>®</sup> de SensAble Technologies. Es un brazo articulado de seis ejes giratorios basado en PC.

El manipulador remoto es un brazo serial planar de tres grados de libertad, con accionamiento por motores DC, (Tafur et al., 2010). El sistema de actuación del manipulador remoto consiste de motores eléctricos DC sin escobillas, mecanismos de reducción, y la interface de potencia EPOS 24/1.



Figura 8: Sistema experimental de teleoperación en tiempo real.

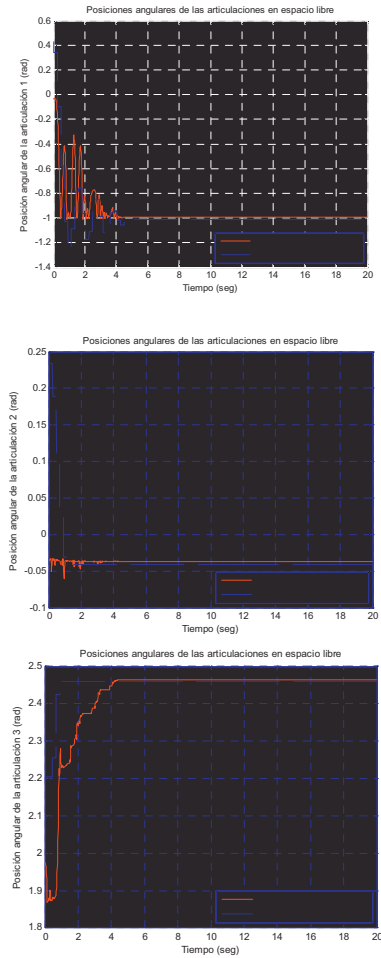


Figura 9: Posición angular del manipulador local y remoto para  $q_1$  (superior),  $q_2$  (medio),  $q_3$  (inferior).

Se utiliza el protocolo UDP para la comunicación por Internet, este protocolo es comúnmente aplicado a la transmisión de comandos de bajo nivel. Estos comandos están relacionados con el control de bajo nivel de los movimientos del robot que exigen requisitos de red diferente.

Se ha realizado pruebas para el caso cuando el manipulador remoto no interactúa con el entorno, es decir, la fuerza de interacción es cero, se muestra que el esquema de control propuesto asegura la estabilidad asintótica del sistema para el manipulador local y remoto con retardo de tiempo variable (Figura 9).

Considerando,  $|T_i(t)| = T_{\max} = 0.3$  las ganancias  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{K}_1$  se han calculado usando la relación (14):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0.225 & 0 & 0 \\ 0 & 0.100 & 0 \\ 0 & 0 & 0.025 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ld} = \mathbf{K}_{rd} = \begin{bmatrix} 0.1575 & 0 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0175 \end{bmatrix}$$

De modo que las ganancias del esquema de control están dadas por:

$$\mathbf{K}_{l1} = \begin{bmatrix} -0.45 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.05 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{l2} = \begin{bmatrix} -0.6075 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2700 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0675 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{l1} = \begin{bmatrix} 0.045 & 0 & 0 \\ 0 & 0.20 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{l2} = \begin{bmatrix} 0.315 & 0 & 0 \\ 0 & 0.140 & 0 \\ 0 & 0 & 0.035 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{r1} = \begin{bmatrix} -0.45 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.05 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{r2} = \begin{bmatrix} -0.6075 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2700 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0675 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{r1} = \begin{bmatrix} 0.045 & 0 & 0 \\ 0 & 0.20 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{r2} = \begin{bmatrix} 0.315 & 0 & 0 \\ 0 & 0.140 & 0 \\ 0 & 0 & 0.035 \end{bmatrix}$$

## 6. Conclusión

En este artículo se ha presentado el esquema de control y el análisis de estabilidad de un sistema de teleoperación no lineal utilizando la técnica de convergencia de estado.

El sistema implementado tiene 3 grados de libertad y se considera que existe retardo de tiempo variable en el canal de comunicación. Se supone que la función de retardo es continuamente diferenciable y que tienen una cota superior conocida, así como una variación del retardo conocida.

Además, se utiliza la teoría de Lyapunov y el funcional Lyapunov-Krasovskii, para demostrar que el sistema de lazo cerrado es asintóticamente estable. Estas conclusiones de estabilidad se han obtenido mediante la integración de la función de Lyapunov y aplicando el Lema de Barbalat.

La estabilidad está garantizada por la elección de las ganancias de control adecuadas tales que se cumplan las condiciones específicas de estabilidad indicadas en el análisis.

Se demuestra también que se logra sincronizar las posiciones del manipulador local y remoto cuando el manipulador remoto se mueve libremente.

En los resultados de simulación se pueden observar las bondades de la estructura de control propuesta (Figura 4) y (Figura 6).

Se muestra que el controlador propuesto garantiza un comportamiento estable, así como también que la posición del manipulador remoto sigue la posición del manipulador local. Se muestra también que cuando el operador deja de aplicar fuerza al manipulador local (Figura 3) y el manipulador remoto se mueve libremente, el error de coordinación de posición va a cero y por lo tanto existe coordinación de posición entre el manipulador local y remoto.

Finalmente, se muestran los resultados experimentales con el prototipo desarrollado (Figura 9). Estos resultados demuestran que con la estrategia de control planteada, el sistema de teleoperación es asintóticamente estable.

Por otro lado, se debe tener en cuenta que durante la realización de los experimentos el operador no logrará mantener una fuerza constante debido a factores como la fatiga y distracción entre otros, violándose así la Hipótesis 1 considerada en la demostración teórica. A pesar de esto, y observando los resultados experimentales obtenidos, se puede concluir que aún en este caso, el manipulador remoto sigue al local reforzando aún más la estabilidad del sistema.

## English Summary

### Control of a Delayed Teleoperation System Applying State Convergence Approach.

#### Abstract

This article presents a novel control scheme for bilateral teleoperation of  $n$  degree-of-freedom (DOF) nonlinear robotic systems with time-varying communication delay.

The bilateral control of the teleoperator system considers the case where the human operator applies a constant force on the local manipulator and when the interaction of the remote manipulator with the environment is considered passive.

The stability analysis was performed using Lyapunov-Krasovskii functionals, and it showed that using a control scheme by state convergence for the cases with variant time delay resulted in asymptotically stable local and remote nonlinear teleoperation systems.

The proposed control strategies are independent of parameter uncertainties in the robot models, the human operator and the remote environment.

It is also shown that, in the case of reliable communication protocols, the proposed scheme guarantees that the local-remote position coordination is achieved.

The experimental results are presented to show the effectiveness of the main results.

#### Keywords:

Teleoperation, Stability, Lyapunov, Nonlinear Control, Time-Delay.





Donde  $T_i(t)$  para  $i = l, r$  representa el retardo variable en el canal de comunicación y  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}_e$  y  $\mathbf{K}_1$ , son matrices diagonal constantes positiva definida.

### Etapa 2

La derivada en el tiempo del función de Lyapunov a lo largo de la trayectoria descrita por (A1) está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^T \mathbf{M}_l \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_l + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^T \mathbf{M}_l \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^T \mathbf{M}_l \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_l + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^T \mathbf{M}_l \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l + \left( \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r \right)^T \mathbf{K} (\tilde{\mathbf{q}}_l - \tilde{\mathbf{q}}_r) + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^T \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{q}}_r \\ & + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^T \mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{q}}_r + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^T \mathbf{K}_1 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^T (t - T_l(t)) \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{q}}_l (t - T_l(t)) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^T (t - T_r(t)) \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{q}}_r (t - T_r(t)) \end{aligned} \quad (A6)$$

Donde  $\mathbf{K}_{rd}$  y  $\mathbf{K}_{ld}$  están dados por (A3), estas ganancias permiten estabilizar el incremento o disminución del retardo de tiempo. Este hecho se puede observar de los últimos dos términos de la derivada de la función de Lyapunov.

Reemplazando (A1), simplificando y agrupando términos, usando (A2) y las propiedades de la dinámica de los robots (Kelly and Santibáñez, 2003), resulta:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^T (t) \mathbf{K} [\tilde{\mathbf{q}}_l(t - T_l(t)) - \tilde{\mathbf{q}}_r(t)] - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^T (t - T_r(t)) \mathbf{K}_e [\tilde{\mathbf{q}}_l(t - T_r(t)) - \tilde{\mathbf{q}}_r(t)] \\ & + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^T (t) \mathbf{K} [\tilde{\mathbf{q}}_r(t - T_r(t)) - \tilde{\mathbf{q}}_l(t)] - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^T (t - T_l(t)) \mathbf{K}_e [\tilde{\mathbf{q}}_r(t - T_l(t)) - \tilde{\mathbf{q}}_l(t)] \\ & - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^T (t) \mathbf{B}_e \tilde{\mathbf{q}}_l(t) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^T (t) \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{q}}_r(t) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^T (t) \mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{q}}_r(t) \end{aligned} \quad (A7)$$

Definiendo

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{\tilde{\mathbf{q}}_l} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l(t - T_r(t)) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l(t), \quad \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{\tilde{\mathbf{q}}_r} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r(t - T_l(t)) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r(t) \quad (A8)$$

Podemos escribir (A7) como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^T \mathbf{K} [\tilde{\mathbf{q}}_l(t - T_r(t)) - \tilde{\mathbf{q}}_r(t)] - \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{\tilde{\mathbf{q}}_l}^T \mathbf{K}_{ld} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{\tilde{\mathbf{q}}_l} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^T \mathbf{K} [\tilde{\mathbf{q}}_r(t - T_l(t)) - \tilde{\mathbf{q}}_l(t)] \\ & - \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{\tilde{\mathbf{q}}_r}^T \mathbf{K}_{rd} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{\tilde{\mathbf{q}}_r} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^T \mathbf{B}_e \tilde{\mathbf{q}}_l - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^T \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{q}}_l - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^T \mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{q}}_r \end{aligned} \quad (A9)$$

Tomando en cuenta que:  $\tilde{\mathbf{q}}_l(t - T_l(t)) - \tilde{\mathbf{q}}_r(t) = - \int_0^{T_l(t)} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r(t - \sigma) d\sigma$

Reemplazando en (A9), e integrando se pueden obtener los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \dot{V} dt = & - \int_0^{t_f} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{\tilde{\mathbf{q}}_l}^T \mathbf{K}_{ld} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{\tilde{\mathbf{q}}_l} dt - \int_0^{t_f} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{\tilde{\mathbf{q}}_r}^T \mathbf{K}_{rd} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{\tilde{\mathbf{q}}_r} dt - \int_0^{t_f} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^T \mathbf{K}_1 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l dt - \int_0^{t_f} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^T \mathbf{K}_1 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r dt \\ & - \int_0^{t_f} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^T \mathbf{K} \int_0^{T_l(t)} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r(t - \sigma) d\sigma dt - \int_0^{t_f} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^T \mathbf{K} \int_0^{T_r(t)} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l(t - \sigma) d\sigma dt - \int_0^{t_f} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^T \mathbf{B}_e \tilde{\mathbf{q}}_l dt \end{aligned} \quad (A10)$$

Para cualquier vector de señales  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , para una matriz constante diagonal positiva definida  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  y para cualquier función continuamente diferenciable  $T_i(t)$  con una cota superior conocida  $T_i^+$  definida por  $T_i(t) \leq T_i^+ < \infty$ , se cumple que:

$$-2 \int_0^{t_f} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{K} \int_0^{T_i(t)} \dot{\mathbf{y}}(t - \sigma) d\sigma dt \leq \alpha \int_0^{t_f} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{x}} dt + \frac{T_i^+}{\alpha} \int_0^{t_f} \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{y}} dt \quad (A11)$$

Reemplazando (A11) en (A10) se obtiene una cota sobre la integral de  $\dot{V}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \dot{V} dt \leq & - \int_0^{t_f} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{\tilde{\mathbf{q}}_l}^T \mathbf{K}_{ld} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{\tilde{\mathbf{q}}_l} dt - \int_0^{t_f} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{\tilde{\mathbf{q}}_r}^T \mathbf{K}_{rd} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{\tilde{\mathbf{q}}_r} dt - \int_0^{t_f} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^T \mathbf{K}_1 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l dt \\ & - \int_0^{t_f} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^T \mathbf{K}_1 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r dt - \int_0^{t_f} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^T \mathbf{B}_e \tilde{\mathbf{q}}_r dt + \frac{\alpha_1}{2} \int_0^{t_f} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^T \mathbf{K} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l dt + \frac{T_l^+}{2\alpha_1} \int_0^{t_f} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^T \mathbf{K} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r dt \\ & + \frac{\alpha_2}{2} \int_0^{t_f} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^T \mathbf{K} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r dt + \frac{T_r^+}{2\alpha_2} \int_0^{t_f} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l^T \mathbf{K} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l dt \end{aligned} \quad (A12)$$

Integrando la inecuación (A12) de 0 a  $\infty$  se reduce a;

$$\begin{aligned} V(t) - V(0) \leq & -\mu(\mathbf{K}_{ld}) \|\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{\tilde{\mathbf{q}}_l}\|_2^2 - \mu(\mathbf{K}_{rd}) \|\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{\tilde{\mathbf{q}}_r}\|_2^2 - \mu(\mathbf{B}_e) \|\tilde{\mathbf{q}}_r\|_2^2 \\ & - \mu \left( \mathbf{K}_1 - \frac{\alpha_1}{2} \mathbf{K} - \frac{T_l^+}{2\alpha_1} \mathbf{K} \right) \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l\|_2^2 \\ & - \mu \left( \mathbf{K}_1 - \frac{\alpha_2}{2} \mathbf{K} - \frac{T_r^+}{2\alpha_2} \mathbf{K} \right) \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r\|_2^2 \end{aligned} \quad (A13)$$

Donde  $\mu(\mathbf{A})$  denota el menor autovalor de  $\mathbf{A}$ , y la notación  $\|\cdot\|_2$  especifica la norma  $L_2$  de una señal en el intervalo  $[0, \infty]$ .

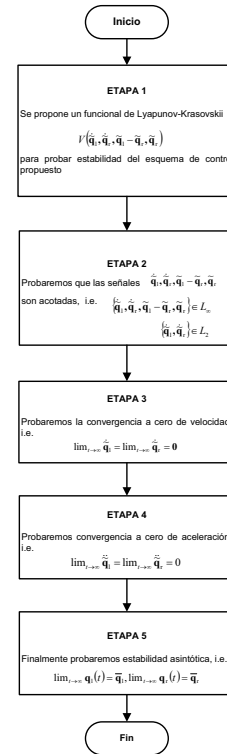


Figura A.1: Diagrama de Flujo de la demostración del Teorema.

Como  $\mathbf{B}_e$ ,  $\mathbf{K}_{ld}$  y  $\mathbf{K}_{rd}$  son positivas definida, de (A13),  $\int_0^{t_f} \dot{V} dt \leq 0$

si se cumplen las relaciones en (A14):

$$\mathbf{K}_1 - \frac{\alpha_1}{2} \mathbf{K} - \frac{T_l^+}{2\alpha_1} \mathbf{K} > 0, \quad \mathbf{K}_1 - \frac{\alpha_2}{2} \mathbf{K} - \frac{T_r^+}{2\alpha_2} \mathbf{K} > 0 \quad (A14)$$

Considerando  $k_i$ , el elemento  $i$  de la matriz diagonal  $\mathbf{K}$ , y  $k_{1i}$ , el elemento  $i$  de la matriz diagonal  $\mathbf{K}_1$ , de (A14) se cumple que

