

## Determinación de la Posición Angular de Motor de Reluctancia Conmutada MFR132.5 con Estimador de Horizonte Deslizante

Ariel O. Cepero Díaz <sup>a,\*</sup>, Ana I. González Santos <sup>a</sup>, Ania Ramírez Ramos <sup>b</sup>, Javier Muñoz Álvarez <sup>c</sup>, Mario Morera Hernández <sup>c</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Automática y Computación, ISPJAE, C/ 114, #11901, E/ Ciclovía y Rotonda, Marianao, La Habana, Cuba.

<sup>b</sup> Instituto de Cibernética, Matemática y Física, ICIMAF, C/ 15, sn, E/ C y D, Plaza de La Revolución, La Habana, Cuba.

<sup>c</sup> Departamento de Ingeniería Eléctrica, ISPJAE, C/ 114, #11901, E/ Ciclovía y Rotonda, Marianao, La Habana, Cuba.

### Resumen

La determinación de la posición angular instantánea del rotor es parte integral del control en los accionamientos de Motores de Reluctancia Conmutada (MRC). La medición directa de esta variable adiciona complejidad y costo al sistema y no siempre da buenos resultados. Esto ha motivado el desarrollo y prueba de estimadores de la posición angular del rotor que utilicen solamente las mediciones de las variables eléctricas del MRC. En este trabajo se presentan dos variantes del Estimador de Horizonte Deslizante (MHE) para estimar la velocidad y la posición angular del rotor del MRC MFR 132.5, empleando dos modelos distintos del motor, uno de caja blanca y otro de caja gris. Se muestran los resultados de la simulación de los estimadores diseñados para estimar la velocidad y la posición angular del rotor durante el arranque hasta haber activado consecutivamente todas las fases y para estimar estas variables cuando el motor trabaja regularmente y aparecen perturbaciones en el torque de la carga, considerando en ambos casos un error en la estimación de la posición angular de partida y la presencia de ruidos en las mediciones. Los resultados demuestran que este tipo de estimadores realiza estimaciones satisfactorias del estado del motor, aún ante la presencia de perturbaciones en el torque de la carga, siendo mejores cuando se utiliza un modelo gris del sistema. Copyright © 2014 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

### Palabras Clave:

Modelos dinámicos, Estimación de estados, Motor de reluctancia conmutada.

### 1. Introducción

Muchas técnicas modernas y avanzadas de control automático requieren tener conocimiento del estado completo del sistema a controlar para poder llevar a cabo la estrategia de control (Ogata 2001). Pero en muchas ocasiones no es factible realizar las mediciones de todas las variables que definen el estado del sistema, sea por el elevado costo o complejidad de los sistemas de medición, la ineficacia de los métodos de medición existentes, la existencia de ruidos que afectan la medición, o porque simplemente las variables del estado carecen de sentido físico. Por tal motivo ha sido interés de la comunidad científica y técnica del mundo del control automático el desarrollo y uso práctico de estimadores de estado en los sistemas de control, siendo los trabajos pioneros en este tema los realizados por Luenberger (Luenberger 1966; Luenberger 1971) y Kalman (Kalman 1960; Ho and Kalman 1966).

Para el caso de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo, con parámetros concentrados, los resultados teóricos y prácticos

están bien maduros y establecidos, sin embargo existen aún varias líneas de investigación abiertas sobre el tema de los estimadores de estados cuando se trata de sistemas no lineales (Julier and Uhlmann 2004; Cabrera, Ramírez et al. 2005; Goffaux and Wouwer 2008; Kolås, Foss et al. 2008).

Una de las primeras alternativas de solución al problema de la estimación de estados en sistemas no lineales ha sido, naturalmente, la extensión de las técnicas conocidas y bien probadas de estimación de estados en sistemas lineales al caso no lineal. Tal es el caso del observador extendido de Luenberger (ELO) (Sira-Ramírez, Márquez et al. 2005), para casos de sistemas no lineales donde se desea una estimación determinística del estado, y del filtro extendido de Kalman (EKF) (Aguado, Enríquez et al. 1980; Muske and Edgar 1997), para casos donde se desea una estimación del estado que tenga en cuenta la presencia de ruidos en las mediciones y perturbaciones al sistema como fenómenos estocásticos. Estas alternativas de solución han dado buenos resultados en sistemas cuyo comportamiento no lineal es suave, tal que la aproximación lineal del modelo matemático del sistema alrededor de cualquier punto de equilibrio

\* Autor en correspondencia.

Correo electrónico: [arielc@electronica.cujae.edu.cu](mailto:arielc@electronica.cujae.edu.cu) (Ariel O. Cepero Díaz),  
URL: [www.cujae.edu.cu](http://www.cujae.edu.cu) (Ariel O. Cepero Díaz)

puede emplearse satisfactoriamente. Pero en la medida que el sistema presenta un comportamiento no lineal más acentuado la aproximación lineal del modelo se hace menos satisfactoria y empeora el desempeño de estos estimadores.

Con el mismo fundamento probabilístico del EKF, pero considerando que es más fácil aproximar una función de distribución de probabilidades que una función no lineal arbitraria, se presenta la propuesta del filtro desaromatizado de Kalman (UKF) (Julier, Uhlmann et al. 2000; Julier and Uhlmann 2004; Wu, Wu et al. 2004) como una solución a la estimación cuando se trata con sistemas fuertemente no lineales. Este tipo de estimador de estados mantiene las características deseables del EKF, en cuanto a considerar los ruidos y perturbaciones en el sistema y su sencilla expresión recursiva que lo hace veloz, pero lo supera en una mayor convergencia por el hecho de no aproximar el modelo del sistema. Además, el UKF puede tratar con sistemas discontinuos (Julier and Uhlmann 2004) y considerar restricciones en el valor del estado (Kolås, Foss et al. 2008).

Otra solución alternativa al problema de la estimación de estados en sistemas no lineales la constituyen los estimadores de horizonte deslizante (MHE), (Muske and Edgar 1997). Este tipo de estimadores de estado tiene entre sus ventajas el no estar limitados al uso de una formulación específica del modelo matemático del sistema a observar, siendo capaces de utilizar modelos de tipo caja blanca, modelos de tipo caja negra, o modelos de tipo caja gris (Hadjiski 1999; Madár 2002; van Lith 2002). Los MHE, además, son más robustos a las incertidumbres en el modelo (Goffaux and Wouwer 2008) y pueden considerar restricciones impuestas sobre el valor del estado y sobre la magnitud de los ruidos en las mediciones y las perturbaciones (Rao, Rawlings et al. 2001), incorporando así mayor información al estimador sobre el sistema. También las técnicas de inteligencia artificial han sido empleadas para el diseño de estimadores de estados en sistemas no lineales (Cabrera, Ramírez et al. 2005).

Los motores de reluctancia conmutada (MRC), a diferencia de otros tipos de motores eléctricos, los cuales funcionan autónomamente a partir de recibir una tensión, reciben acciones que constantemente se actualizan de acuerdo a la posición angular del rotor. En estos, el control efectivo de la velocidad y del momento electromagnético depende, en gran medida, de la sincronización adecuada entre la posición angular del rotor y la excitación de las fases. Es decir, que la determinación o estimación de la posición angular instantánea del rotor es parte integral del control en los accionamientos de MRC (Miller 1993).

La posición angular del rotor puede determinarse mediante un sensor óptico que se acopla mecánicamente al eje del motor. El uso de este sensor, sin embargo, no sólo adiciona complejidad y costo al sistema, sino que no brinda buenos resultados cuando el motor trabaja a altas velocidades o bajo condiciones ambientales desfavorables. Esto ha motivado el desarrollo y prueba de esquemas de estimación de la posición angular del rotor, sin el empleo de sensores, que utilicen solamente las mediciones de las variables eléctricas del MRC.

En la literatura especializada se reportan soluciones para la estimación de la posición angular del rotor basadas en el empleo de observadores de estado de modo deslizante (Husain, Sodhi et al. 1994; Hossain, Husain et al. 2003) y soluciones basadas en modelos de las características de fase del MRC instrumentadas a partir de técnicas de inteligencia artificial (Mese and Torrey 2002; Gupta, Kumar et al. 2010), que aprovechan el hecho de que la dinámica de las variables eléctrica del motor es mucho más

rápida que la dinámica de las variables mecánicas para estimar el valor de la concatenación de flujo, a partir de la medición de la tensión de fase y la corriente de fase, integrando la ecuación dinámica eléctrica. Posteriormente utilizan la medición de la corriente de fase y la concatenación de flujo estimada para estimar la posición angular. Estos estimadores ofrecen muy buenos resultados a altas velocidades, pero no a bajas velocidades, cuando la estimación de la concatenación de flujo es pobre.

También se reportan estimadores basados en la inyección de breves y pequeñas señales eléctricas en las fases inactivas del motor (Muñoz and Morera 2008; Muñoz 2010). Este método invasivo se apoya en el comportamiento de las variables eléctricas en una fase inactiva del motor para estimar indirectamente la posición instantánea del rotor. Este método solo puede emplearse en el arranque y a bajas velocidades. En (Khalil, Underwood et al. 2007) se presenta una propuesta que combina la estimación basada en un método invasivo con un observador de estado de modo deslizante para estimar la posición angular en todo el rango de velocidades.

Otras soluciones son reportadas con el uso de filtros de Kalman (Brosse and Hennerberger 1997) y observadores de Luenberger (Elmas and Zelaya De La Parra 1996; Ramírez, Cepero et al. 2012). Estas soluciones utilizan modelos de tipo caja blanca de los MRC simplificados al considerar la operación sin saturación magnética del hierro. Estos estimadores pueden emplearse en todo el rango de velocidades del motor, pero la calidad de las estimaciones puede verse afectada por las simplificaciones contempladas en el modelo del motor. En (Cepero, González et al. 2014) se presenta una solución basada en el uso de un estimador UKF con buenos resultados en el arranque y a bajas velocidades.

En este trabajo se presenta una nueva solución basada en estimadores de tipo MHE para determinar la velocidad y la posición angular del rotor del MRC MFR 132.5 a partir de un modelo dinámico del motor y de la medición de las tensiones eléctricas impuestas a cada fase y de las corrientes de fase. Se proponen dos modelos distintos del motor para ser empleados por el estimador: uno de caja gris, que combina las ecuaciones principales que describen el comportamiento dinámico del motor con valores tabulados de los parámetros de dichas ecuaciones que dependen del estado, y otro de caja blanca, constituido solo por ecuaciones que describen la dinámica del motor. Finalmente se muestran los resultados del desempeño de los estimadores cuando se utiliza uno u otro modelo del motor, haciendo una comparación en cuanto a calidad de las estimaciones y tiempo de respuesta.

El resto del artículo está organizado del siguiente modo: en la sección 2 se presentan los dos modelos propuestos del motor que serán empleados por el estimador, en la sección 3 se expone la formulación general del MHE y su modificación para emplear modelos grises, en la sección 4 se presentan las pruebas realizadas y los resultados de las simulaciones, y finalmente en la sección 5 se plantean las conclusiones del trabajo.

## 2. Modelo matemático del MRC MFR 132.5

Los MRC son motores cuyo estator posee un número par de polos salientes o dientes con devanados concentrados y cuyo rotor posee un número par distinto de polos sin devanados, siendo motores eléctricos simplemente excitados. Los devanados en pares de polos del estator diametralmente opuestos se conectan en serie y estos a su vez en serie o en paralelo a otros pares para

conformar la misma fase del estator. En el MRC se aplica una secuencia de pulsos de tensión eléctrica a cada fase, por medio de un convertidor electrónico de potencia apropiado, de modo que cada fase es excitada cuando un par de polos opuestos del rotor se encuentra próximo a alinearse con el par de polos del estator correspondiente a la fase. La energía se retira de la fase activa antes de que los polos del rotor y del estator queden totalmente alineados, activándose entonces la próxima fase (Miller 1993).

El MRC MFR 132.5 ha sido desarrollado, optimizado y probado por especialistas de la Universidad de Ciencias Aplicadas de Giessen-Friedberg y el Instituto de Electrotecnia de la Universidad de Karlsruhe en Alemania. Es un motor experimental de cuatro fases, que se compone de un estator de 16 polos y de un rotor de 12 polos, presenta una potencia nominal de 18.5 kW, una velocidad nominal de 1500 rpm y es alimentado con una tensión de corriente directa de 550 V mediante un convertidor de potencia conectado directamente a una red trifásica de corriente alterna de 550 V / 50 Hz (Muñoz 2004). A cada fase del estator le corresponden cuatro devanados con sus respectivos polos, sumando una resistencia de fase de 0.155  $\Omega$ . En la Figura 1 se representa un corte transversal del motor. Los cuatro polos que aparecen sombreados en la figura son los pertenecientes a la fase que se encuentra activada para la posición angular en que se encuentra el rotor y el sentido de giro señalado.

La dinámica de los MRC está expresada por el conjunto de ecuaciones electromecánicas (1), (2) y (3), conocido como el modelo aumentado del motor (Elmas and Zelaya de la Parra 1993),

$$\frac{d\lambda_n(\theta, i_n)}{dt} = -R_n i_n + u_n \quad (1)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{D}{J} w + \frac{1}{J} T_{em}(\theta, \lambda_n) - \frac{1}{J} T_L \quad (2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = w \quad (3)$$

donde  $\theta$  es la posición angular del rotor,  $i_n = [i_a, i_b, i_c, i_d]^T$  es el vector de las corrientes de fase,  $\lambda_n = [\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_d]^T$  es el vector de las concatenaciones de flujo de fase,  $R_n$  es la matriz diagonal de las resistencias de fase,  $u_n = [u_a, u_b, u_c, u_d]^T$  es el vector de las tensiones de fase,  $w$  es la velocidad del motor,  $D$  es el coeficiente de fricción,  $J$  es la inercia total del conjunto rotor-carga mecánica,  $T_{em}$  es el torque electromagnético del motor y  $T_L$  es el torque de carga. Por simplicidad se ha omitido la dependencia de  $\lambda_n$ ,  $i_n$ ,  $u_n$ ,  $w$ ,  $T_{em}$  y  $\theta$  respecto al tiempo.

Debido a que las fases del motor se distribuyen simétricamente no existe prácticamente inductancia mutua entre ellas y puede suponerse, sin pérdida de rigor, la independencia magnética de las fases del motor. Teniendo esto en cuenta las ecuaciones (1) y (2) pueden reescribirse como (4) y (5),

$$L_n(\theta, i_n) \frac{di_n}{dt} = -R_n i_n - C_n(\theta, i_n) w + u_n \quad (4)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{D}{J} w + \frac{1}{J} T_{em}(\theta, i_n) - \frac{1}{J} T_L \quad (5)$$

donde  $L_n(\theta, i_n) = \frac{\partial \lambda_n(\theta, i_n)}{\partial i_n}$  es la matriz diagonal de las

inductancias dinámicas de fase y  $C_n(\theta, i_n) = \frac{\partial \lambda_n(\theta, i_n)}{\partial \theta}$  es el

vector columna de las tensiones rotacionales de fase.

A los efectos del modelado matemático del comportamiento dinámico del motor se considera que el estado del motor está caracterizado por las corrientes de fase, la velocidad y la posición angular, que las tensiones de fase son las entradas a manipular y que las salidas medibles son las propias corrientes de fase. Las ecuaciones diferenciales (3), (4) y (5) representan el conocimiento teórico disponible sobre el comportamiento dinámico del motor, pero no se conocen las ecuaciones matemáticas que determinan la dependencia de las inductancias dinámicas de fase  $L_n$ , las tensiones rotacionales de fase  $C_n$  y el torque electromagnético  $T_{em}$  respecto a las corrientes de fase y la posición angular del rotor.

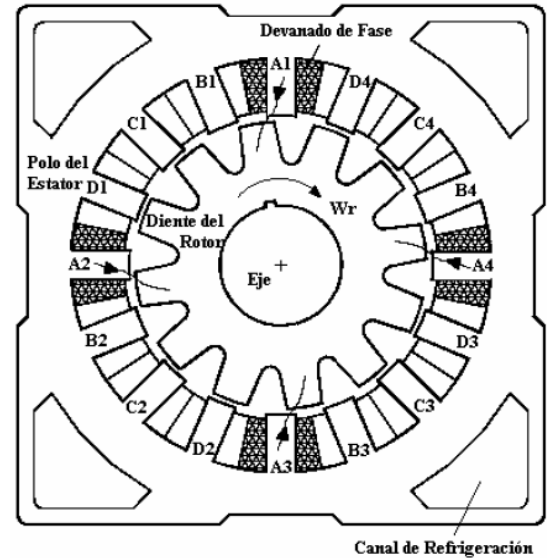


Figura 1: Corte transversal del MRC MFR 132.5

## 2.1. Modelo gris

Los modelos de caja gris, también conocidos como modelos híbridos, son aquellos modelos que se obtienen mediante la unión o combinación de modelos de conocimiento, conocidos también como modelos de caja blanca, y modelos empíricos, también llamados como modelos de caja negra (Madár 2002; van Lith 2002; Madár 2004; Hauth 2008). El modelo gris es más realista que el modelo empírico, pues se dispone de algún conocimiento sobre las leyes que rigen el comportamiento del sistema. Por otra parte, el modelo gris, aunque es menos interpretable que los modelos de conocimiento, precisa de un menor consumo de tiempo para su construcción para un mismo nivel de complejidad. Existe una gran variedad de modelos de caja gris teniendo en cuenta las distintas maneras posibles de combinar el conocimiento teórico con el conocimiento empírico en el modelo del sistema (Sohlberg and Jacobsen 2008; Ljung 2010). En este trabajo particularmente interesa la clase de modelo gris conformado por un modelo de caja blanca base donde el valor de algunos

parámetros de este modelo base son obtenidos por un modelo de caja negra.

Para su fabricación el motor fue diseñado y optimizado usando el método de los elementos finitos, obteniéndose por este procedimiento los valores de las inductancias dinámicas de fase, las tensiones rotacionales de fase y el torque electromagnético en función de la corriente de fase y la posición angular del rotor (Wolff, Rahner et al. 1998). Estos valores pueden encontrarse tabulados en (Muñoz 2004) y aparecen graficados en las Figuras 2, 3 y 4. Puede verse en dichas figuras que estos parámetros del motor tienen un comportamiento no lineal respecto a la corriente de fase y la posición angular del rotor. El comportamiento respecto a la posición angular es periódico, con un período de  $30^\circ$ , por la distribución simétrica de los 12 polos del rotor. En las posiciones de  $0^\circ$  y  $30^\circ$  la fase se encuentra totalmente alineada, mientras que en la posición de  $15^\circ$  la fase se encuentra totalmente desalineada. El comportamiento es idéntico en cada fase con  $7.5^\circ$  de desfase relativo.

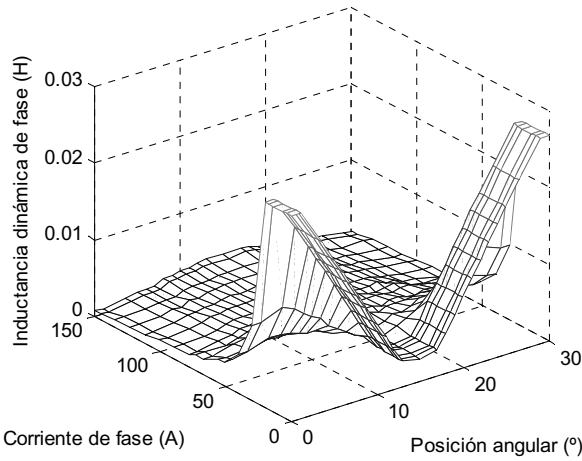


Figura 2: Inductancia dinámica de fase en función de la corriente de fase y la posición angular del rotor en el MRC MFR 132.5

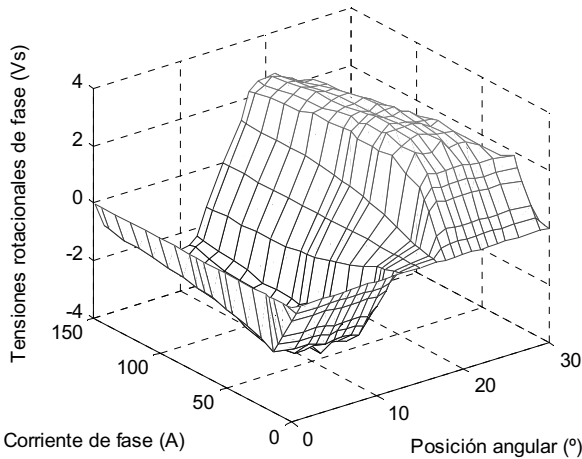


Figura 3: Tensiones rotacionales de fase en función de la corriente de fase y la posición angular del rotor en el MRC MFR 132.5

En lugar de hallar, a partir de los datos tabulados, las ecuaciones de las superficies que mejor se aproximen al comportamiento no lineal de  $L_n$ ,  $C_n$  y  $T_{em}$  en función de la corriente de fase y la posición angular, lo cual puede resultar

complejo, se propone utilizar directamente las tablas de valores con interpolación bilineal como parte del modelo del motor. Así, se obtiene un modelo de caja gris del motor con la estructura mostrada en el diagrama de bloques de la Figura 5. Este modelo está conformado por un modelo de caja blanca base, constituido por las ecuaciones diferenciales (3), (4) y (5) que modelan el conocimiento teórico disponible sobre las leyes que rigen el comportamiento dinámico del motor, y un modelo de caja negra, constituido por los valores tabulados que modelan el conocimiento empírico sobre la dependencia no lineal de los parámetros  $L_n$ ,  $C_n$  y  $T_{em}$  respecto a la corriente de fase y la posición angular del rotor.

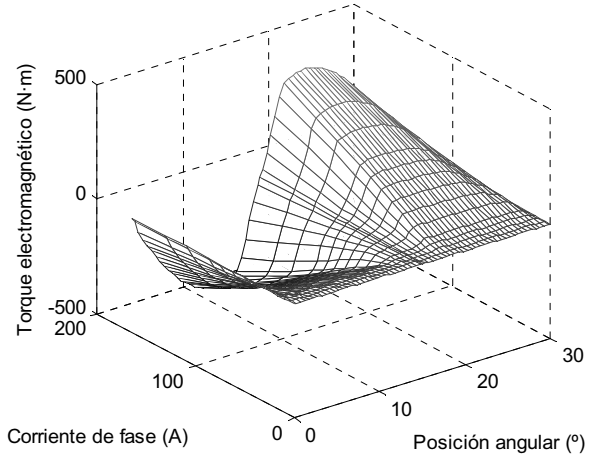


Figura 4: Torque electromagnético en función de la corriente de fase y la posición angular del rotor en el MRC MFR 132.5

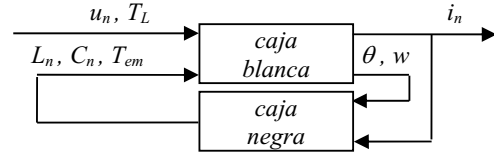


Figura 5: Diagrama de bloques del modelo gris del MRC MFR 132.5

## 2.2. Modelo blanco aproximado

Si el MRC es manejado de modo que no ocurre la saturación magnética del hierro, para valores de corrientes de fase relativamente pequeños, la inductancia dinámica de fase prácticamente va a ser función solo de la posición angular del rotor, llamándosele entonces inductancia estática de fase. En estas condiciones las concatenaciones de flujo de fase y el torque electromagnético del motor se relacionan con las corrientes de fase de acuerdo a las ecuaciones (6) y (7), donde  $L_e(\theta)$  es la matriz diagonal de las inductancias estáticas de fase (Miller 1993).

$$\lambda_n(\theta, i_n) = L_e(\theta) i_n \quad (6)$$

$$T_{em}(\theta, i_n) = \frac{1}{2} i_n^T \frac{\partial L_e(\theta)}{\partial \theta} i_n \quad (7)$$

En este trabajo se considera que el motor es manejado a través de un convertidor electrónico de potencia que obedece a un control de las corrientes de fase de tipo encendido/apagado con histéresis para limitar las corrientes entre 14.5 A y 18.5 A, de

modo que el motor no sufre la saturación magnética del hierro. De acuerdo con los valores tabulados de la inductancia dinámica de fase, para un valor de corriente de fase de 16.73 A, el comportamiento de la inductancia respecto a la posición angular es el mostrado en la Figura 6 y no hay prácticamente diferencia en este comportamiento para valores de corriente de fase entre 0 A y 20 A, considerándose este como el comportamiento de la inductancia estática de fase en función de la posición angular del motor.

Por otro lado, cada fase es activada en la posición angular relativa de 17.5 ° y desactivada en la posición angular de 25 °, para lograr un mejor aprovechamiento del torque que puede ejercer la fase a lo largo de un ángulo de conducción de 7.5 °. En la Figura 6 puede observarse que la relación entre la inductancia estática de fase y la posición angular del rotor, para los ángulos en que corresponde mantener activa la fase, se puede aproximar a una recta. Con la ayuda de la herramienta de ajuste de curvas de Matlab® (Mathworks 2011) se determinó que esta recta tiene una pendiente  $a = 0.002023 \text{ H/}^\circ$  y un desplazamiento  $b = -0.03121 \text{ H}$ . Teniendo esto en cuenta y utilizando las ecuaciones (6) y (7) se reescriben las ecuaciones (4) y (5), obteniéndose un modelo blanco aproximado del motor dado por las ecuaciones (3), (8) y (9).

$$\frac{di_n}{dt} = \frac{-R_n i_n - a w i_n + u_n}{a\theta + b} \quad (8)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{D}{J} w + \frac{1}{2J} i_n^T a i_n - \frac{1}{J} T_L \quad (9)$$

con  $R_n = 0.155 \cdot I_4 \Omega$ ,  $D = 0.7498 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ ,  $J = 0.5433 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ , donde  $I_4$  representa la matriz identidad de orden 4.

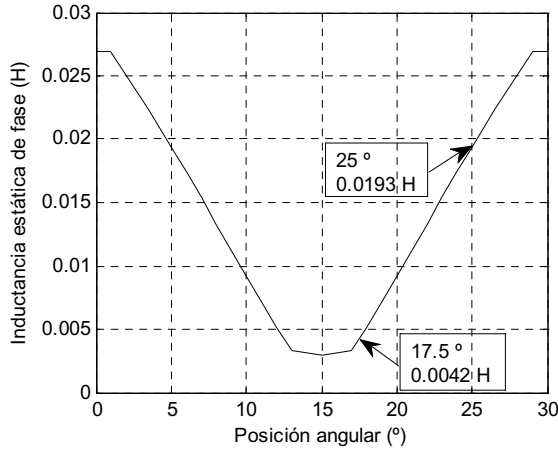


Figura 6: Inductancia estática de fase en función de la posición angular del rotor en el MRC MFR 132.5

### 3. Formulación del estimador de horizonte deslizante

Sea un sistema no lineal genérico con un conjunto de variables de entrada  $u \in \mathbb{R}^l$ , variables de estado  $x \in \mathbb{R}^n$  y variables de salida  $y \in \mathbb{R}^m$ , cuyo estado se ve afectado por perturbaciones no medibles o ruidos  $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$  y cuya salida se ve afectada por ruidos de medición  $v \in \mathbb{R}^m$ . Ambos vectores de ruido,  $\varepsilon$  y  $v$ , se

consideran de forma general como ruidos blancos no correlacionados entre sí. Si dicho sistema cumple la condición de observabilidad, es posible estimar el estado actual del sistema a partir de la observación (medición) de las entradas y las salidas del mismo en un tiempo finito.

El MHE es un estimador que utiliza un registro histórico de  $N$  mediciones consecutivas de las salidas y de las entradas anteriores al instante  $k$  actual,  $y_{k-N}, y_{k-N+1}, \dots, y_{k-1}$  y  $u_{k-N}, u_{k-N+1}, \dots, u_{k-1}$ , para obtener un estimado del estado actual  $\hat{x}_k$  basado en la solución de un problema de optimización. Este registro histórico de mediciones de la salida y la entrada del sistema representa un horizonte de observación de dimensión  $N$  que se mueve hacia adelante en cada instante de muestreo, cuando son tomadas nuevas mediciones de la salida  $y_k$  y de la entrada  $u_k$  (Muske and Edgar 1997).

El MHE trabaja en dos etapas: en la primera se emplea el horizonte de observación para obtener un estimado del estado inicial del sistema al comienzo del horizonte  $\hat{x}_{k-N}$ , así como un estimado de las perturbaciones asociadas al estado en cada instante de muestreo del horizonte de observación,  $\hat{\varepsilon}_{k-N}, \hat{\varepsilon}_{k-N+1}, \dots, \hat{\varepsilon}_{k-1}$ , y en la segunda se emplean los estimados obtenidos en la primera etapa para propagar el estado inicial hacia el presente hasta obtener un estimado del estado actual  $\hat{x}_k$ .

Formalmente la primera etapa del MHE está formulada por el problema de optimización en (10) sujeto a (11), (12), (13), (14) y (15).

$$\min_{\hat{x}_{k-N}, \hat{\varepsilon}_{k-N}, \dots, \hat{\varepsilon}_{k-1}} J = \sum_{j=k-N}^{k-1} \hat{\varepsilon}_j^T Q \hat{\varepsilon}_j + \sum_{j=k-N}^k \hat{v}_j^T R \hat{v}_j \quad (10)$$

$$\hat{x}_{j+1} = f(\hat{x}_j, u_j, \hat{\varepsilon}_j) \quad (11)$$

$$\hat{y}_j = h(\hat{x}_j) \quad (12)$$

$$\hat{v}_j = y_j - \hat{y}_j \quad (13)$$

$$x_{\min} \leq \hat{x}_{k-N} \leq x_{\max} \quad (14)$$

$$\varepsilon_{\min} \leq \hat{\varepsilon}_j \leq \varepsilon_{\max} \quad (15)$$

Las expresiones (11) y (12) representan las ecuaciones de estado y de salida que modelan el comportamiento dinámico estimado del sistema, la expresión (13) representa el ruido de medición estimado y las expresiones (14) y (15) representan restricciones impuestas al valor estimado del estado al inicio del horizonte y al valor estimado de las perturbaciones asociadas al estado en cada instante de muestreo del horizonte de observación. Las matrices pesantes  $Q$  y  $R$  especifican la relativa contribución de la estimación de las perturbaciones asociadas al estado  $\hat{\varepsilon}_j$  y de los ruidos de medición  $\hat{v}_j$ , respectivamente, en el índice de coste cuadrático. La ecuación (11) es utilizada para desarrollar la segunda etapa del MHE.

Las matrices  $Q$  y  $R$ , junto a la dimensión del horizonte de observación  $N$ , son parámetros de diseño del estimador. La elección del horizonte de observación  $N$  representa un compromiso entre la velocidad de respuesta del estimador y la calidad de las estimaciones. Si  $N$  es mayor aumenta el volumen

de cálculos a realizar y mayor será el tiempo que tarda el estimador en dar su respuesta, pero también aumenta la calidad de la estimación al trabajar con un mayor número de mediciones de las variables de entrada y de salida del sistema a observar. La elección de las matrices pesantes representa un compromiso entre la minimización de los errores de estimación del estado del sistema y la minimización de los errores de estimación de la salida. Si las mediciones de la salida del sistema son bastante confiables,  $R$  es escogido mayor que  $Q$  de modo que se penaliza más el estimado de las perturbaciones. Si en cambio las mediciones de la salida son poco confiables, se escoge  $Q$  mayor que  $R$  de modo que se penaliza más los errores de estimación de la salida.

Tratándose de modelos grises la formulación anterior cambia, pues de forma general la dinámica del sistema no se expresa completamente en forma de ecuaciones como (11) y (12), sino que se expresa de acuerdo a la estructura específica del modelo gris obtenido para el sistema. Se mantiene la misma función objetivo a minimizar, pero sujeta ahora a la resolución del modelo gris, como se muestra en el esquema de la Figura 7.

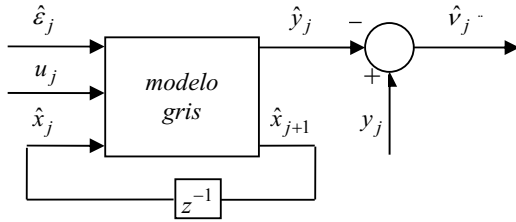


Figura 7: Uso de un modelo gris en la formulación del MHE

#### 4. Resultados

Se diseñaron dos estimadores de tipo MHE, uno basado en el modelo gris formulado y otro basado en el modelo blanco aproximado. Como el MHE es un estimador de tiempo discreto y los modelos presentados del motor son de tiempo continuo, es necesario muestrear estos modelos de modo que los estados estimados, las entradas, las salidas medidas y las salidas estimadas están dadas por (16) y (17), donde  $\Delta t$  es el período de muestreo con el que se obtienen las mediciones de la entrada y la salida del sistema, que forman parte del horizonte de observación.

$$\hat{x}_j = [\hat{i}_n(j\Delta t) \quad \hat{\omega}(j\Delta t) \quad \hat{\theta}(j\Delta t)]^T \quad (16)$$

$$u_j = u_n(j\Delta t), \quad y_j = i_n(j\Delta t), \quad \hat{y}_j = \hat{i}_n(j\Delta t) \quad (17)$$

En el problema de optimización implícito en ambos estimadores se consideraron restricciones sobre el valor del estado inicial estimado y sobre el valor de las perturbaciones asociadas al estado estimadas a lo largo del horizonte de observación como se indica en (18) y (19). La matriz pesante  $Q$  fue elegida como la matriz identidad de orden 6,  $I_6$ , y la matriz pesante  $R$  fue seleccionada como  $0.001 \cdot I_4$ , representando una mayor confianza en los estados estimados que en la salida estimada. Se utilizó un horizonte de observación de dimensión 5, que ofreció el mejor balance de velocidad y calidad de las estimaciones entre las dimensiones menores y mayores probadas. Ambos estimadores fueron programados con el asistente

matemático Matlab® (Mathworks 2011) para su simulación, haciendo uso de las funciones de optimización y de resolución de ecuaciones diferenciales que posee este asistente.

$$x_{\min} = \begin{bmatrix} 0 \text{ A} \\ 0 \text{ A} \\ 0 \text{ A} \\ 0 \text{ A} \\ 0 \text{ rad/s} \\ 0 \text{ rad} \end{bmatrix}, \quad x_{\max} = \begin{bmatrix} 25 \text{ A} \\ 25 \text{ A} \\ 25 \text{ A} \\ 25 \text{ A} \\ \infty \text{ rad/s} \\ 2\pi \text{ rad} \end{bmatrix} \quad (18)$$

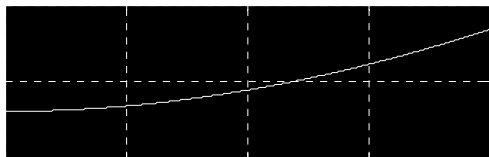
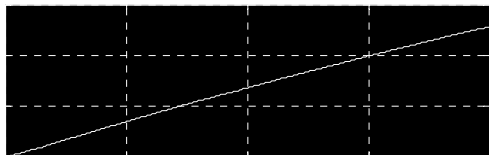
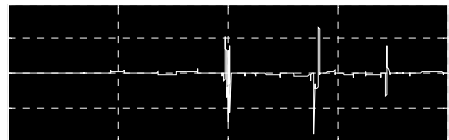
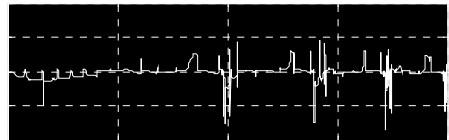
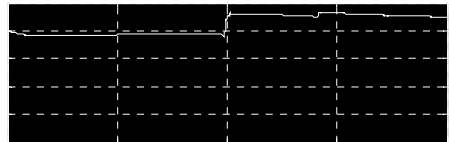
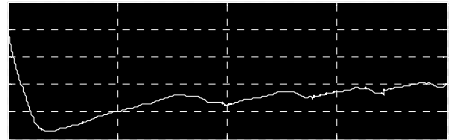
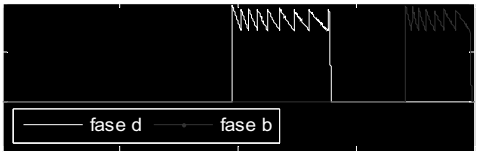
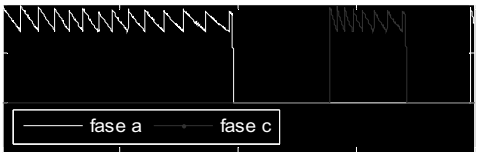
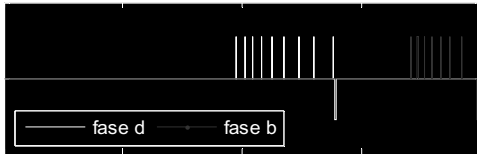
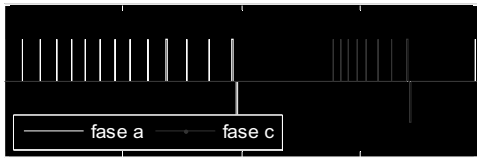
$$\varepsilon_{\min} = \begin{bmatrix} -0.1 \text{ A} \\ -0.1 \text{ A} \\ -0.1 \text{ A} \\ -0.1 \text{ A} \\ -0.1 \text{ rad/s} \\ -0.1 \text{ rad} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{\max} = \begin{bmatrix} 0.1 \text{ A} \\ 0.1 \text{ A} \\ 0.1 \text{ A} \\ 0.1 \text{ A} \\ 0.1 \text{ rad/s} \\ 0.1 \text{ rad} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Para evaluar el desempeño de los estimadores diseñados se realizaron tres pruebas, mediante simulación, en escenarios distintos del funcionamiento del motor. En la primera prueba se estimaron la velocidad y la posición angular del rotor durante el arranque hasta haber activado consecutivamente las cuatro fases. En las siguientes dos pruebas se estimaron igualmente la velocidad y la posición angular del rotor cuando el motor trabaja a mayor velocidad y considerando la ocurrencia de perturbaciones en el torque de la carga.

En todas las pruebas se dispone de un modelo del accionamiento eléctrico que incluye el motor MFR132.5 y el convertidor electrónico de potencia que realiza el control con histéresis de las corrientes de fase y conmuta la activación de las fases de acuerdo a la posición angular. Este modelo es presentado en (Muñoz 2004) y fue validado con la instalación real de dicho accionamiento eléctrico, que se encuentra en el Instituto de Electrotecnia de la Universidad de Karlsruhe en Alemania. Este modelo ya validado de la instalación del accionamiento eléctrico fue empleado para simular el comportamiento del motor y su control y obtener los valores correspondientes a las mediciones de las variables del motor que necesitan los estimadores.

Para la primera prueba se energizó el motor, partiendo de una posición angular del rotor de 0.3054 rad (17.5°), y se tomaron las mediciones de las tensiones de fase, las corrientes de fase, la velocidad y la posición angular del rotor, con un período de muestreo de 0.00001 s, durante los primeros 0.2 s tras energizar el motor. En las gráficas de la Figura 8, la Figura 9 y la Figura 10 se muestran estas mediciones de las variables del motor en esta primera prueba. Puede observarse en la Figura 8 y en la Figura 9 que las cuatro fases del motor son activadas en el orden a-d-c-b.

A las mediciones de las corrientes de fase se les añadió un ruido aleatorio con una distribución de probabilidades normal de media cero y varianza 0.01 A. Las mediciones de las tensiones de fase y de las corrientes de fase con el ruido añadido fueron dadas a los estimadores diseñados y se registraron los valores del estado estimado con el mismo período de muestreo durante el mismo tiempo. Para ambos estimadores se consideró un estimado inicial del estado con 0.0174 rad (1°) de error en la posición angular del rotor, lo que representa aproximadamente un 13.3% del ángulo de conducción de cada fase.



estas mediciones de las variables del motor en la segunda prueba. Puede observarse en la Figura 13 y en la Figura 14 que las cuatro fases del motor son activadas dos veces en el orden a-d-c-b.

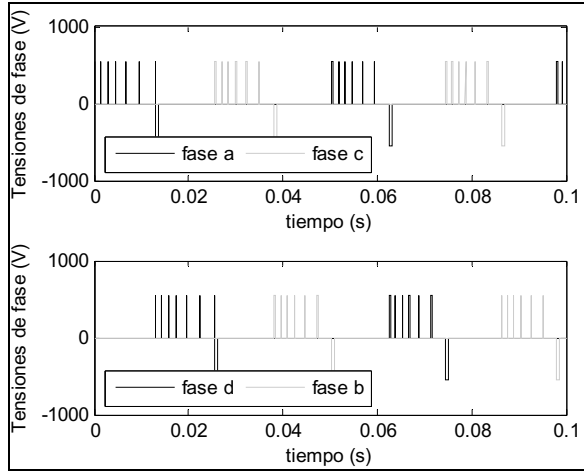


Figura 13: Tensiones de fase medidas en la segunda prueba

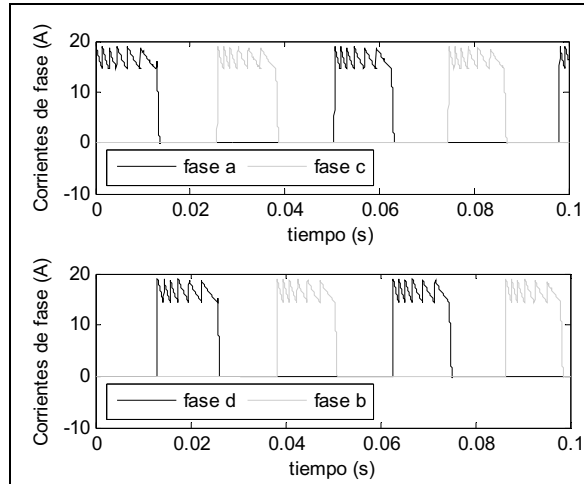


Figura 14: Corrientes de fase medidas en la segunda prueba

También en esta prueba a las mediciones de las corrientes de fase se les añadió un ruido aleatorio con una distribución de probabilidades normal de media cero y varianza 0.01 A. Las mediciones de las tensiones de fase y de las corrientes de fase con el ruido añadido fueron dadas a los estimadores diseñados y se registraron los valores del estado estimado con el mismo período de muestreo durante el mismo tiempo. Para ambos estimadores se consideró un estimado inicial del estado con 0.0174 rad ( $1^\circ$ ) de error en la posición angular del rotor. En las gráficas de la Figura 16 y la Figura 17 se muestran los errores de estimación de la velocidad y los errores de estimación de la posición angular del rotor, respectivamente, cometidos por ambos estimadores en esta segunda prueba. Puede observarse que en esta prueba los errores de estimación, tanto de la velocidad como de la posición angular, son poco significativos, superando el error en la estimación de la posición angular de partida, la presencia de los ruidos añadidos en las mediciones de las corrientes de fase y el efecto de la perturbación en el torque de la carga. Los valores RMSE de las estimaciones se presentan en la Tabla 2.

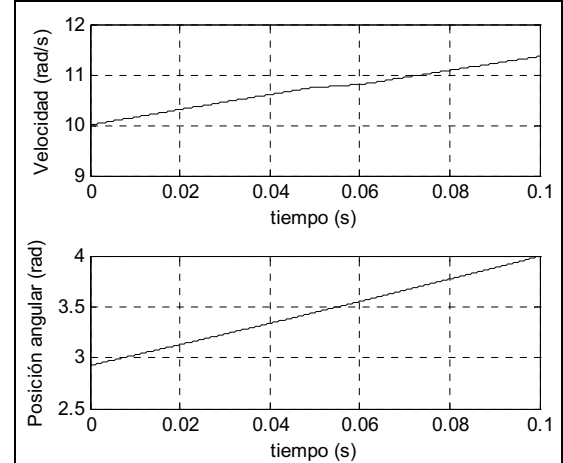


Figura 15: Velocidad y Posición angular del rotor medidas en la segunda prueba

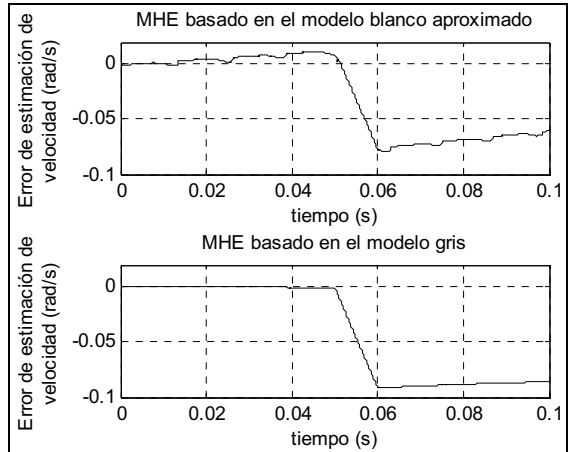


Figura 16: Error de estimación de la velocidad de ambos estimadores en la segunda prueba

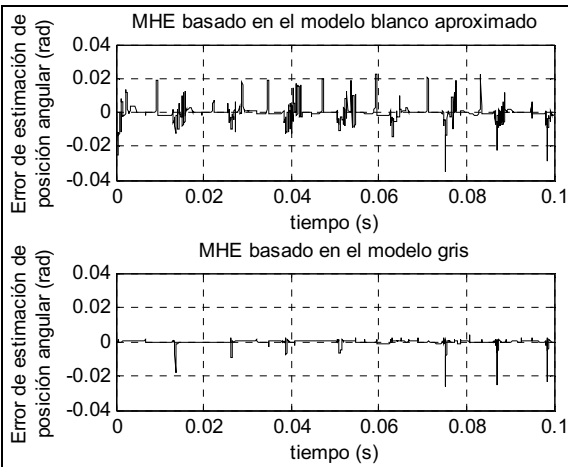
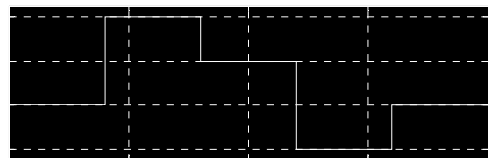
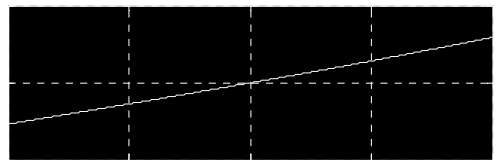
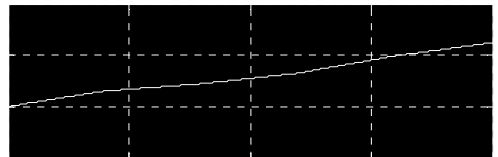
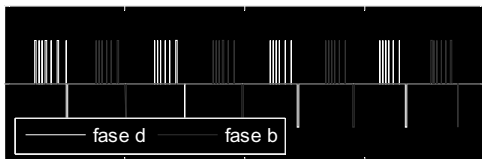
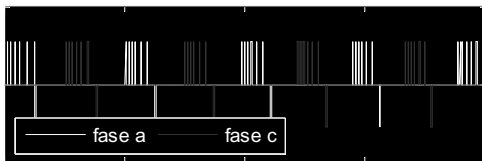
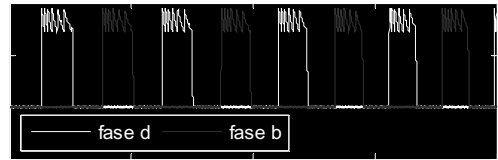
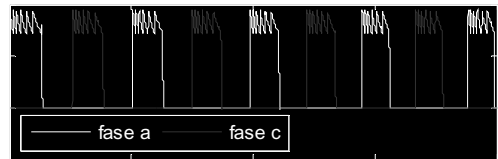


Figura 17: Error de estimación de la posición angular de ambos estimadores en la segunda prueba

En la Figura 16 se aprecia que antes de la ocurrencia de la perturbación en el torque de carga, aproximadamente en  $t=0.05$  s,





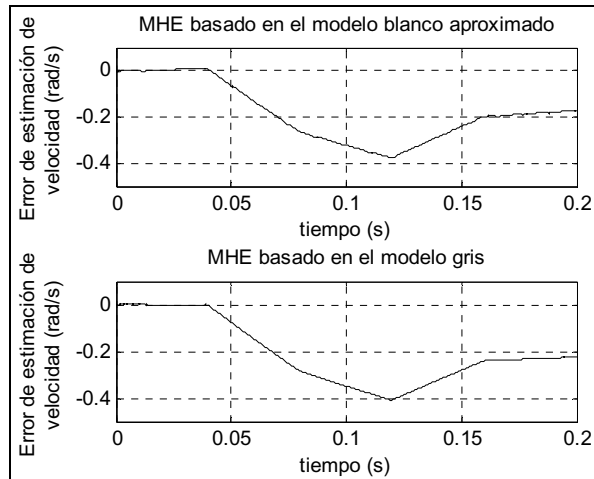


Figura 22: Error de estimación de la velocidad de ambos estimadores en la tercera prueba

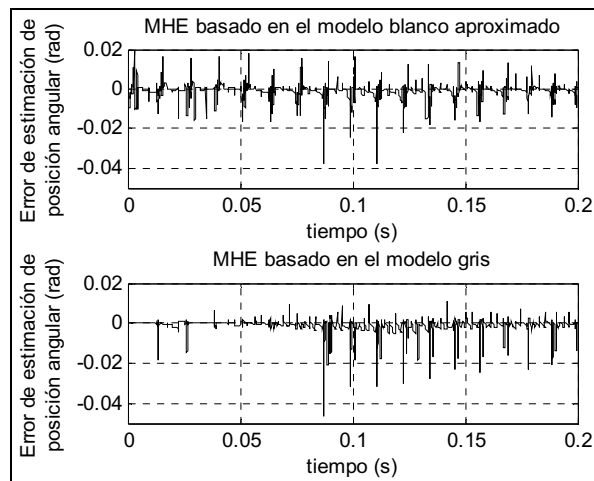


Figura 23: Error de estimación de la posición angular de ambos estimadores en la tercera prueba

Tabla 3: RMSE de las estimaciones en la tercera prueba

Modelo empleado	Velocidad (rad/s)	Posición angular (rad)
Blanco aproximado	0.2221	0.0035
Gris	0.2491	0.0028

Tabla 4: Tiempo de cómputo medio requerido para la simulación de los estimadores

Modelo empleado	Primera prueba	Segunda prueba	Tercera prueba
Blanco aproximado	0.3116 s	0.3725 s	0.3860 s
Gris	0.3311 s	0.3327 s	0.3758 s

## 5. Conclusiones

En este trabajo se han presentado dos modelos no lineales distintos del MRC MFR 132.5: uno de tipo caja blanca y otro de tipo caja gris. En ambos modelos se ha considerado la independencia magnética de las fases del motor para establecer las ecuaciones principales que describen el comportamiento

dinámico del motor. El primero de estos modelos se simplifica al considerarse, además, que el motor es manejado de modo que las corrientes de fase son lo suficientemente bajas para evitar la saturación magnética del hierro y que el ángulo de conducción de las fases coincide con el intervalo angular en que la inductancia de fase depende cuasi linealmente de la posición angular. El segundo modelo complementa el conocimiento teórico dado por las ecuaciones principales del motor con información empírica tabulada sobre el comportamiento de los parámetros de las ecuaciones principales del motor que dependen de las corrientes de fase y de la posición angular. Comparativamente el modelo blanco aproximado es más simple, pero su uso se ve limitado al caso de cumplirse las consideraciones tenidas en cuenta para su simplificación, mientras que el modelo gris es más complejo, pero ofrece un reflejo más realista del funcionamiento dinámico del motor y puede utilizarse aún si ocurre la saturación magnética del hierro.

Con los modelos obtenidos se diseñaron dos estimadores de estado no lineal de tipo MHE, cada uno basado en uno de los modelos presentados del motor, y se realizaron tres pruebas en escenarios distintos del funcionamiento del motor. Los resultados de las pruebas realizadas demuestran que esta solución basada en estimadores MHE ofrece estimaciones muy satisfactorias de la posición angular del rotor, siendo de mayor calidad las ofrecidas por el MHE basado en el modelo gris del motor. Las estimaciones de la velocidad dadas por el MHE basado en el modelo gris se ven ligeramente más afectadas que las estimaciones dadas por el MHE basado en el modelo blanco aproximado al ocurrir perturbaciones en el torque de la carga, sin embargo continúan siendo satisfactorias. En ausencia de perturbaciones son mejores las estimaciones del MHE que emplea el modelo gris que las del MHE que emplea el modelo blanco aproximado.

Los estimadores han superado un error en la estimación inicial de la posición angular del rotor mayor que el 13 % del ángulo de conducción de fase, lo cual es un error significativo teniendo en cuenta que el funcionamiento adecuado del motor depende de la activación sincronizada de las fases en posiciones angulares exactas. También los estimadores muestran su capacidad de superar la presencia de ruidos en las mediciones de las corrientes de fase, que son los estados medibles del motor, y el efecto de la perturbación en el torque de carga del motor.

Dado que este tipo de estimador incluye la resolución en cada iteración de un problema de optimización, debe tenerse en cuenta el tiempo de cómputo que esto implica en su implementación práctica. Esto podría ser una desventaja frente a otros métodos de estimación de la posición angular del motor, sin embargo el propio hecho de basarse en un problema de optimización y la posibilidad de utilizar restricciones sobre el valor estimado del estado y de las perturbaciones o ruidos asociados al estado contribuyen a una mayor convergencia. Los resultados muestran que, a pesar de ser más simple el modelo blanco presentado que el modelo gris, la velocidad de respuesta de ambos estimadores es muy similar.

Ambos estimadores propuestos pueden emplearse en todo el rango de velocidades del motor. No obstante, teniendo en cuenta que la determinación de la posición angular tiene una importancia crucial para el funcionamiento de los MRC y que la estimación de esta variable dada por el estimador basado en el modelo gris es mejor en las pruebas realizadas, así como que la velocidad de respuesta de ambos estimadores es similar, se recomienda más el uso del estimador basado en el modelo gris.

