

Estimación y Control Distribuidos de Sistemas sobre Redes de Comunicación

Francisco R. Rubio^{a,*}, Pablo Millán^b, Luis Orihuela^b, Carlos Vivas^a

^aDpto. Ingeniería de Sistemas y Automática, Escuela Técnica Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla.
Camino Descubrimientos, s/n., 41092 Sevilla, España.

^bDpto. Matemáticas e Ingeniería, Escuela Técnica Superior de Ingenieros. Universidad Loyola Andalucía.
Calle Energía Solar, 1, 41014 Sevilla, España.

Resumen

Este trabajo presenta una técnica de diseño novedosa para la estimación y control distribuido de sistemas en red. Se considera un proceso discreto de gran escala controlado por una red de agentes que pueden recopilar información acerca de la evolución de la planta y aplicar las acciones de control para mejorar su comportamiento. El diseño propuesto es de especial interés cuando no se tiene observabilidad/controlabilidad local, de forma que es necesario utilizar la comunicación entre agentes para tener suficiente información dinámica del sistema. El objetivo global es diseñar un esquema de control y estimación distribuida, de forma que se obtengan estimaciones fiables por parte de los agentes así como un desempeño de control adecuado. El trabajo analiza dos esquemas diferentes de comunicación entre agentes, muestreo periódico y basado en eventos, proporcionando pruebas de estabilidad utilizando el criterio de Lyapunov y métodos de diseño en términos de desigualdades matriciales lineales LMIs (del inglés, *Linear Matrix Inequalities*). Se muestran resultados experimentales sobre un sistema de cuatro tanques para demostrar la eficacia de las metodologías propuestas. Copyright © 2014 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

Palabras Clave: Control a través de redes, Estimación distribuida, Control distribuido.

1. Introducción

Un campo que ha motivado muchas investigaciones en los últimos años es el de los Sistemas de Control Basados en Red (SCBR, o NCS del inglés *Networked Control Systems*), que han ido atrayendo progresivamente el interés de la comunidad de control automático debido al gran número de aplicaciones y el ahorro de costes de automatización que suponen estos sistemas (ver, por ejemplo, Salt et al. (2008)). Los SCBR están formados por sensores, actuadores y controladores cuya operación es coordinada a través de una red de comunicaciones. Se trata de sistemas que, de forma típica, están espacialmente distribuidos y pueden operar de forma asíncrona; pero que requieren coordinación para alcanzar objetivos globales.

Dentro del campo de la Ingeniería de Control, un sistema de control automático consta al menos de los siguientes elementos: sistema dinámico o planta que se pretende controlar; conjunto de sensores que miden las salidas de esa planta y las transmiten; controladores que toman decisiones en función de la información recibida de los sensores; y actuadores, que reciben señales

de control procedentes del controlador y las aplican a la planta mediante los elementos de actuación correspondientes (motores, válvulas actuadas, etc).

Desde el punto de vista del ingeniero de control, el paradigma clásico de comunicación entre los distintos elementos anteriormente mencionados ha permitido obviar los aspectos correspondientes a la *comunicación* y centrarse exclusivamente en los aspectos relacionados con el *control* del sistema. La razón es sencilla, la arquitectura clásica de comunicación cableada punto a punto ha permitido asumir implícitamente la hipótesis de *canal perfecto de comunicaciones*. Esto implica:

- Periodos de muestreo constantes.
- Ausencia de retrasos de transmisión.
- La información se entrega siempre de forma correcta y a tiempo, no se pierden datos en las comunicaciones.
- Ancho de banda ilimitado.
- Resolución ilimitada en los datos que se transmiten.

En los SCBR, los lazos de control se cierran mediante redes de comunicación en tiempo real, redes en general compartidas por distintos procesos o lazos de control. Las soluciones tecnológicas a este respecto comprenden un buen número de redes,

*Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: rubio@us.es (Francisco R. Rubio),
pmillan@uloyola.es (Pablo Millán), dorihuela@uloyola.es
(Luis Orihuela), vivas@us.es (Carlos Vivas)

URL: www.esi.us.es/%7Erubio (Francisco R. Rubio)

Lee et al. (2007). Por un lado, en lo relativo a redes de comunicación cableadas existen distintos tipos entre los que destacan *CAN*, *Profibus* y *Modbus*. En cuanto a redes inalámbricas, los protocolos de aplicación son *Bluetooth*, *UWB*, *ZigBee*, y *Wi-Fi*, que corresponden a los estándares IEEE 802.15.1, 802.15.3, 802.15.4, and 802.11a/b/g respectivamente.

De esta forma, a medida que la tecnología es capaz de proporcionar tanto dispositivos de procesamiento remoto como redes fiables de comunicación digital, resulta cada vez más frecuente encontrar soluciones de control que involucran el cierre de los lazos mediante redes de comunicación compartidas.

Las redes de sensores inalámbricas (WSN del inglés *Wireless Sensor Networks*) son una tecnología emergente que ha recibido una gran atención en la última década debido principalmente a las aplicaciones desarrolladas y potenciales, en campos como el control de procesos industriales, vigilancia, detección de fallos, etc. Akyildiz et al. (2002); Briñón Arranz et al. (2009); Cortés et al. (2004); Estrin et al. (1999); Lu et al. (2011); Xiao et al. (2005).

Una red de sensores se compone de un gran número de nodos (agentes en un sentido amplio) que están espacialmente distribuidos y cuentan con cierta capacidad de procesamiento y comunicación. Las redes de sensores presentan una serie de ventajas sobre las arquitecturas centralizadas: despliegue sencillo sobre grandes regiones proporcionando diversas medidas del sistema observado; robustez ante fallos; menores costos de implementación y mantenimiento, etc. Debido a diversas consideraciones de diseño, tales como el tamaño limitado de las baterías, ancho de banda y coste, las redes inalámbricas de sensores presentan restricciones de autonomía que imponen limitaciones de cálculo y comunicaciones. A pesar de estas limitaciones, la alta conectividad y las capacidades de cooperación de las redes inalámbricas de sensores proporcionan un gran potencial para construir redes que realizan tareas complejas de alto nivel que son difíciles o incluso imposible de llevar a cabo con el enfoque clásico centralizado o jerárquico.

En este trabajo, la estimación y control distribuido surgen naturalmente en el contexto de los sistemas geográficamente espaciados donde se plantea satisfacer un objetivo global de todo el sistema. En términos generales, el objetivo es inducir un comportamiento global a partir de las acciones emprendidas por los agentes individuales de una manera distribuida. La característica principal de este enfoque es la distribución de información. A diferencia de las soluciones centralizadas, cada agente tiene acceso sólo a la información recogida por un número limitado de agentes vecinos. Dado que las redes de sensores son sistemas de escala generalmente grandes, no es aconsejable emplear un procesamiento centralizado para recopilar todos los datos del sistema y ejecutar las técnicas clásicas de estimación centralizados, Olfati-Saber (2005).

El estado del arte en cuanto a las estrategias de control distribuido (Antonelli (2013)) comprende un gran número de técnicas, con diferentes enfoques dependiendo de la naturaleza del problema. Los primeros intentos para formular el problema son de finales de los años 70, con los trabajos sobre control descentralizado de Davison and Chang (1990); Davison and Wang (1973) y Anderson and Moore (1981). El control predictivo y

sus numerosas aplicaciones para la industria de proceso, ha demostrado ser muy prolífico en este campo, Maestre and Negenborn (2013); Camponogara et al. (2002); Dunbar (2007); Alvarado et al. (2011); Negemborn et al. (2008); Roshany-Yamchi et al. (2013); Scattolini (2009); Venkat et al. (2005).

Otras contribuciones notables a este problema se pueden encontrar en Lynch et al. (2002), donde se aplica el control semi-activo para estructuras civiles de gran tamaño, y en D'Andrea and Dullerud (2003), que aplican una idea novedosa que consiste en descomponer la planta y controlador en módulos que se comunican entre sí. Estos módulos se pueden unir para construir grandes sistemas distribuidos.

La mayor parte de los trabajos mencionados anteriormente descomponen la planta en subsistemas desacoplados o acoplados débilmente controlados por nodos independientes. Una línea afín de investigación es el denominado control descentralizado con solapamiento, donde a diferentes controladores se les permite compartir las entradas de control de la planta, Iftar (1991, 1993); Siljak and Zecevic (2005).

En este artículo, se considera un proceso discreto LTI (Millán et al. (2012) y Millán (2012)), que está controlado por una red de agentes que, usando información directa de la planta y recibida de otros nodos, generan las acciones de control adecuadas para lograr un objetivo determinado. Los agentes presentan las siguientes características: observación, actuación, computación y comunicación. Cada uno de ellos implementa una estructura observador&controlador basado en observadores de Luenberger locales en combinación con estrategias de consenso. La primera parte es responsable de actualizar la estimación del agente a partir de información local, mientras que la segunda tiene en cuenta los datos transmitidos desde los agentes vecinos.

Por otro lado, se proponen dos formas de implementar la comunicación entre agentes. En primer lugar, un enfoque periódico donde se asume que los agentes se comunican cada tiempo de muestreo. En segundo lugar, un esquema de comunicación más eficiente basado en eventos, que dispara las comunicaciones de los agentes solo cuando existe información relevante que transmitir, (ver Dormido et al. (2008); Lunze and Lehmann (2010); Tabuada (2007); Guinaldo et al. (2013); Donkers and Heemels (2012). En Heemels et al. (2013), se presenta una estrategia descentralizada en la que los nodos tienen información parcial de la salida de la planta. Las técnicas orientadas a eventos son especialmente beneficiosas en el contexto de redes inalámbricas de sensores ya que permiten ampliar la vida de las baterías y reducir la frecuencia de transmisión, el uso de ancho de banda, los retrasos de transmisión medios y las colisiones entre paquetes.

Como se mostrará, una característica relevante del esquema planteado, que añade complejidad al diseño del sistema, es que no se cumple el Principio de Separación, de forma que el diseño de los observadores y los controladores ha de realizarse de forma conjunta. Por ello, en una primera aproximación al problema, se considera sólo el caso en el que no existen retardos ni pérdida de información en la red que conecta a los agentes. De esta forma, se aborda el problema de limitación de la información disponible y de ancho de banda limitado, igualmente importantes en los SCBR. La estabilidad del sistema diseñado

se garantiza mediante el planteamiento de funciones de Lyapunov.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en primer lugar se describe el problema de control distribuido en la sección 2 y en la sección 3 se formula el problema subóptimo de estimación y de control. Posteriormente en las secciones 4 y 5 se describen la solución propuesta para los escenarios de sistemas muestreados por tiempo y por eventos. La sección 6 describe la aplicación a un sistema de control de nivel en una planta de cuatro tanques, para demostrar el desempeño del esquema presentado. El artículo termina con las conclusiones en la sección 7.

2. Descripción del sistema.

Considérese el sistema de estimación y control distribuido representado en la figura 1. El proceso se monitoriza y controla a través de una red de agentes.

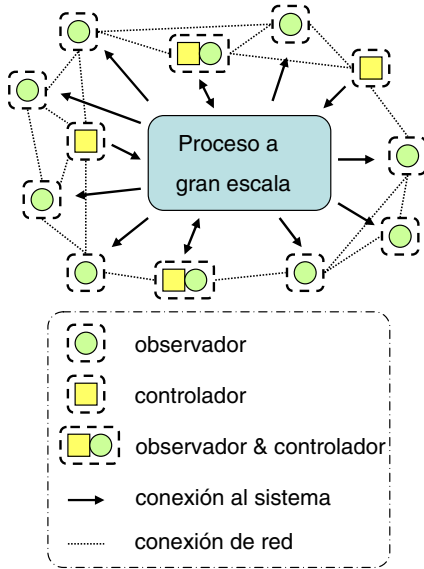


Figura 1: Esquema distribuido de una planta

A continuación, se describen los diferentes elementos que componen el sistema distribuido.

Planta

Considérese un sistema discreto LTI en su representación en espacio de estados. En la figura 1 se ilustra que la planta está siendo controlada por un conjunto de agentes que pueden gestionar distintos actuadores. La dinámica del sistema puede ser descrita como

$$x(k+1) = Ax(k) + \sum_{i=1}^p B_i u_i(k), \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado de la planta y $u_i \in \mathbb{R}^{d_i}$ ($i = 1, \dots, p$) es la señal de control que el agente i aplica al sistema. Las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B_i \in \mathbb{R}^{n \times d_i}$ son conocidas.

Definiendo una matriz de control aumentada

$$B \triangleq \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_p \end{bmatrix}$$

y un vector de control aumentado

$$\mathcal{U}(k) \triangleq \begin{bmatrix} u_1^T(k) & u_2^T(k) & \dots & u_p^T(k) \end{bmatrix}^T, \quad (2)$$

la ecuación (1) puede escribirse de forma compacta como

$$x(k+1) = Ax(k) + B\mathcal{U}(k), \quad (3)$$

donde $\mathcal{U}(k) \in \mathbb{R}^d$, con $d = \sum_{i=1}^p d_i$.

Red

La red de la figura 1 se define topológicamente por su grafo de comunicaciones $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ con nodos $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, p\}$ y enlaces $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. El conjunto de agentes que envían información al nodo i se denomina *la vecindad de i* y se representa por $\mathcal{N}_i \equiv \{j : (j, i) \in \mathcal{E}\}$. El enlace (j, i) implica que el agente i recibe información del agente j .

Agentes

El enfoque adoptado se corresponde con un esquema de control distribuido, en el que los agentes estiman el estado de la planta basándose tanto en la información recopilada a nivel local como en aquella enviada por sus vecinos. Utilizando dicha estimación, aquellos agentes con capacidades de control calculan la señal de entrada que aplicarán al sistema.

Cada agente i mide una salida específica de la planta y_i , que viene dada por

$$y_i(k) = C_i x(k) \in \mathbb{R}^{r_i}, \quad (4)$$

donde las matrices $C_i \in \mathbb{R}^{r_i \times n}$ son conocidas.

Se define ahora la matriz C como la apilación de todas las matrices de salida:

$$C \triangleq \begin{bmatrix} C_1^T & C_2^T & \dots & C_p^T \end{bmatrix}^T.$$

Se asume en el resto del artículo que el par (A, B) en (3) es estabilizable y el par (A, C) es detectable.

Si el nodo i tiene capacidades de control, genera una acción $u_i(k)$, en la forma

$$u_i(k) = K_i \hat{x}_i(k) \in \mathbb{R}^{d_i}, \quad (5)$$

donde $\hat{x}_i \in \mathbb{R}^n$ denota la estimación del agente i , y $K_i \in \mathbb{R}^{d_i \times n}$ ($i \in \mathcal{V}$) son los controladores locales que deben diseñarse.

La estimación del estado de la planta se obtiene en cada agente $i \in \mathcal{V}$ utilizando la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(k+1) &= A\hat{x}_i(k) + B\hat{\mathcal{U}}_i(k) + M_i(y_i(k) - C_i\hat{x}_i(k)) \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} N_{ji}(\hat{x}_j(k) - \hat{x}_i(k)), \end{aligned} \quad (6)$$

donde $\hat{\mathcal{U}}_i(k) \in \mathbb{R}^d$ es la estimación que hace el agente i de todas las señales de control aplicadas y se define como

$$\hat{\mathcal{U}}_i(k) \triangleq \begin{bmatrix} \hat{u}_1^T(k) & \dots & \hat{u}_i^T(k) & \dots & \hat{u}_p^T(k) \end{bmatrix}^T,$$

donde $\hat{u}_j(k) = K_j \hat{x}_i(k)$, $\forall j \neq i$.

Como puede verse en la ecuación (6), cada agente tiene dos fuentes diferentes de información para corregir sus estimaciones. En primer lugar, utiliza la salida de la planta $y_i(k)$ de manera similar a un observador clásico de Luenberger, $M_i(y_i(k) - \hat{y}_i(k))$, siendo M_i , $i \in \mathcal{V}$, la ganancia del observador a diseñar. Por otra parte, añade un término de corrección por cada estimación recibida de los nodos vecinos, $N_{ji}(\hat{x}_j(k) - \hat{x}_i(k))$, $\forall j \in \mathcal{N}_i$, donde N_{ji} , $(j, i) \in \mathcal{E}$, son matrices de consenso a diseñar.

El error de observación de cada nodo se define como

$$e_i(k) \triangleq x(k) - \hat{x}_i(k), \quad i \in \mathcal{V}. \quad (7)$$

Vale la pena recordar que los nodos individuales no tienen información acerca de la señal de control exacta que se aplica a la planta, ya que cada nodo actuador aplica una señal de control diferente en función de su estimación particular del estado (5). Idealmente, la ecuación (6) debe ser implementada utilizando el $\mathcal{U}(k)$, es decir, las señales de control que el conjunto de agentes aplica a la planta. Sin embargo, esta información no está disponible para los agentes. Para sortear esta dificultad y hacer la ecuación (6) realizable, la solución propuesta consiste en dejar que cada nodo ejecute su observador con el vector de control obtenido a partir de su estimación particular. Es decir

$$B\hat{\mathcal{U}}_i(k) = \sum_{j=1}^p B_j K_j \hat{x}_i(k) = BK \hat{x}_i(k),$$

donde la matriz de control aumentada satisface

$$K^T = \begin{bmatrix} K_1^T & K_2^T & \dots & K_p^T \end{bmatrix}$$

El vector de control real aplicado a la planta está formado por las estimaciones de cada nodo

$$B\mathcal{U}(k) = \sum_{j=1}^p B_j K_j \hat{x}_j(k).$$

En general, la señal de control real y la estimada son diferentes, pero si las estimaciones de los nodos convergen a los estados de la planta, estas diferencias desaparecen progresivamente.

3. Descripción del problema

Considérese un sistema discreto LTI con dinámica dada por (1). La planta es observada y controlada por un conjunto de nodos p en una red cuya topología puede ser representada por el grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. La dinámica de los nodos está dada por (6), cada uno de ellos recibe una medida de la planta definida por (4), y aplica una señal de control definida por (5). Entonces, dada la función de coste

$$J = \sum_{j=k_0}^{\infty} x^T(j) Q_x x(j) + \sum_{j=k_0}^{\infty} \sum_{i \in \mathcal{V}} \left[e_i^T(j) Q_i e_i(j) + u_i^T(j) R_i u_i(j) \right], \quad (8)$$

el problema subóptimo de control y observación distribuidos consiste en encontrar los observadores M_i , $i \in \mathcal{V}$ y N_{ji} , $(j, i) \in \mathcal{E}$ y los controladores K_i , $i \in \mathcal{V}$, tal que:

- El estado del sistema $x(k)$ sea asintóticamente estable.
- Los errores de observación $e_i(k)$ sean asintóticamente estables.
- El diseño obtenido minimice la cota superior de la función de coste (8).

En la función de coste (8), se ponderan los estados frente a la señal de control de forma similar al bien conocido controlador LQR .

4. Caso de muestreo periódico

En este apartado se resuelve el problema planteado para el caso en el que la comunicación entre los agentes tenga lugar de forma periódica, recibiendo información de los vecinos cada instante de muestreo k .

4.1. Dinámica del estado de la planta y del error de observación

Se define ahora el vector de error $e^T(k) = [e_1^T(k), \dots, e_p^T(k)] \in \mathbb{R}^{np}$, el vector de estado aumentado $\xi^T(k) = [x^T(k) \ e^T(k)] \in \mathbb{R}^{n(p+1)}$, y los conjuntos $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{K}$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{M_i, i \in \mathcal{V}\}, \\ \mathcal{N} &= \{N_{ji}, (j, i) \in \mathcal{E}\}, \\ \mathcal{K} &= \{K_i, i \in \mathcal{V}\}. \end{aligned}$$

Las siguientes proposiciones estudian la dinámica de los diferentes procesos. Las demostraciones son inmediatas a partir de las ecuaciones (3)-(7).

Proposición 1. La dinámica del estado de la planta $x(k)$ está dada por

$$x(k+1) = (A + BK)x(k) + \Upsilon(\mathcal{K})e(k), \quad (9)$$

donde

$$\Upsilon(\mathcal{K}) = \begin{bmatrix} -B_1 K_1 & -B_2 K_2 & \dots & -B_p K_p \end{bmatrix}.$$

Proposición 2. La dinámica del vector de error $e(k)$ puede escribirse de la siguiente forma

$$e(k+1) = (\Phi(\mathcal{M}) + \Psi(\mathcal{K}) + \Lambda(\mathcal{N}))e(k), \quad (10)$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi(\mathcal{M}) &= \text{diag}\{(A - M_1 C_1), \dots, (A - M_p C_p)\}, \\ \Psi(\mathcal{K}) &= \text{diag}\{BK, \dots, BK\} + \begin{bmatrix} -B_1 K_1 & \dots & -B_p K_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -B_1 K_1 & \dots & -B_p K_p \end{bmatrix} \\ \Lambda(\mathcal{N}) &= \sum_{(j,i) \in \mathcal{E}} \Theta(N_{ji}), \end{aligned}$$

siendo

$$\Theta(N_{ji}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{col.} & & i & & j & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -N_{ji} & \cdots & N_{ji} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{matrix} \quad \text{fila } i$$

Proposición 3. La evolución del vector de error aumentado $\xi(k)$ se puede expresar de la siguiente forma

$$\xi(k+1) = \Omega(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{K})\xi(k), \quad (11)$$

donde

$$\Omega(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{K}) = \left[\begin{array}{c|c} A + BK & \Upsilon(\mathcal{K}) \\ \hline 0 & \Phi(\mathcal{M}) + \Psi(\mathcal{K}) + \Lambda(\mathcal{N}) \end{array} \right].$$

La estructura de (11) revela que el principio clásico de separación observación/control no se cumple en el problema que nos ocupa, ya que la matrix $\Psi(\mathcal{K})$ depende de los controladores. La razón es evidente si tenemos en cuenta que los agentes desconocen la señal de control real que se aplica a la planta y recurren a las estimaciones. No obstante, en la siguiente sección se propondrá un método que permite diseñar de forma unificada todos los controladores y observadores distribuidos de forma que se garantice la estabilidad global del sistema.

Proposición 4. La función de coste (8) puede escribirse como

$$J = \sum_{j=k_0}^{\infty} \xi^T(j)(Q + \bar{K}^T R \bar{K})\xi(j), \quad (12)$$

donde

$$\begin{aligned} Q &= \text{diag}\{Q_x, Q_1, Q_2, \dots, Q_p\}, \\ R &= \text{diag}\{R_1, R_2, \dots, R_p\}, \\ \bar{K} &= \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ K_2 & 0 & -K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_p & 0 & 0 & \cdots & -K_p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Este resultado se puede probar fácilmente sustituyendo las matrices Q, R, \bar{K} y el vector aumentado $\xi(k)$ en la ecuación (12).

4.2. Diseño conjunto de observadores y controladores

En esta sección, se desarrolla un método de diseño conjunto basado en la teoría de Lyapunov que asegura la estabilidad asintótica de la planta y los errores de observación. El siguiente teorema establece el método de diseño basado en LMIs y las propiedades de estabilidad y rendimiento del sistema.

Teorema 1. Dado un funcional de coste (12), el problema subóptimo de observación y control distribuido se resuelve encontrando los conjuntos $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{K}$ que den solución al siguiente problema de optimización:

$$\min_{P, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{K}} \alpha, \quad (13)$$

sujeto a $\alpha > 0$ y

$$P < \alpha I, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} -P & \Omega^T & I & \bar{K}^T \\ * & -P^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & -Q^{-1} & 0 \\ * & * & * & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (15)$$

Demostración: Considérese la siguiente función de Lyapunov:

$$\Delta V(k) = \xi^T(k)P\xi(k), \quad (16)$$

donde P es una matrix definida positiva. El incremento de la función de Lyapunov viene dado por la siguiente ecuación

$$\Delta V(k) = \xi^T(k+1)P\xi(k+1) - \xi^T(k)P\xi(k).$$

Teniendo en cuenta la Proposición 3, la ecuación anterior puede reescribirse como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= \xi^T(k)\Omega^T P \Omega \xi(k) - \xi^T(k)P\xi(k), \\ &= \xi^T(k)(\Omega^T P \Omega - P)\xi(k). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los resultados de estabilidad de Lyapunov, el estado del sistema y los errores de estimación son asintóticamente estables si y sólo si existe una matrix $P > 0$ tal que $(\Omega^T P \Omega - P)$ es definida negativa. Utilizando el complemento de Schur, las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$\Omega^T P \Omega - P < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -P & \Omega^T \\ * & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

La condición anterior se garantiza dado que la matrix anterior es exactamente el menor principal de orden 2 de la matrix involucrada en la desigualdad matricial (15), que debe ser definido negativo para que dicha desigualdad se cumpla. De esta forma, queda demostrada la estabilidad del esquema descentralizado según el diseño propuesto.

A continuación, se estudia la minimización de la cota superior de la función de coste. Nótese que la condición (15) implica que

$$\Omega^T P \Omega - P + Q + \bar{K}^T R \bar{K} < 0.$$

Por lo tanto, deberá verificarse

$$\xi^T(k)(\Omega^T P \Omega - P)\xi(k) < -\xi^T(k)(Q + \bar{K}^T R \bar{K})\xi(k).$$

Teniendo en cuenta la ecuación anterior y el incremento de la función de Lyapunov, se obtiene que

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= \xi^T(k)(\Omega^T P \Omega - P)\xi(k) \\ &< -\xi^T(k)(Q + \bar{K}^T R \bar{K})\xi(k). \end{aligned} \quad (17)$$

Si ahora se halla el sumatorio a ambos lados de (17) desde k_0 a k , resulta

$$\sum_{j=k_0}^k \Delta V(j) < -\sum_{j=k_0}^k \xi^T(j)(Q + \bar{K}^T R \bar{K})\xi(j).$$

Se puede observar que $\sum_{j=k_0}^k \Delta V(j) = \sum_{j=k_0}^k (V(j+1) - V(j)) = V(k+1) - V(k_0)$. Cuando $k \rightarrow \infty$, la estabilidad asintótica del sistema implica que $V(k) \rightarrow 0$, de manera que,

$$-V(k_0) < -\sum_{j=k_0}^{\infty} \xi^T(j)(Q + \bar{K}^T R \bar{K})\xi(j).$$

Finalmente, a partir de la Proposición 4, se obtiene

$$J < V(k_0) = \xi(k_0)^T P \xi(k_0) \leq \lambda_{\max}(P) \|\xi(k_0)\|^2.$$

El valor de $V(k_0)$ depende de las condiciones iniciales del sistema y los agentes. De esta forma, la minimización de $\lambda_{\max}(P)$ minimizaría a su vez la cota superior de la función de coste J independientemente de las condiciones iniciales.

La condición (14) asegura que el máximo autovalor de P esté acotado por α . Por tanto, optimizando (13) se minimiza la cota superior de la función de coste. \square

La principal dificultad que presenta el teorema no radica en la minimización de α , que puede hacerse mediante un algoritmo de bisección, sino la presencia de la condición no lineal (15). A continuación, se proponen dos soluciones para hacer frente a esta no linealidad.

Restricción en P^{-1} : La condición (14) es equivalente a $-P^{-1} < -\frac{1}{\alpha}I$. Teniendo esto en cuenta, la restricción no lineal (15) del Teorema 1 puede ser reemplazada por:

$$\begin{bmatrix} -P & \Omega^T & I & \bar{K}^T \\ * & -\frac{1}{\alpha}I & 0 & 0 \\ * & * & -Q^{-1} & 0 \\ * & * & * & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (18)$$

En comparación con el método introducido en Yue et al. (2005) en el cual $P \triangleq \alpha I$, el que aquí se propone abarca un conjunto más amplio de soluciones posibles en el espacio de las matrices definidas positivas.

Algoritmo del cono complementario: También se puede adaptar el procedimiento (ver El Ghaoui et al. (1997)), en el que se aborda la no linealidad P^{-1} introduciendo nuevas variables y restricciones. La adaptación del algoritmo al problema que nos ocupa es trivial y se ha omitido en este trabajo. Su uso permite resolver el problema propuesto en el Teorema 1 sin añadir conservadurismo, al coste de incrementar el coste computacional.

Observación 1. El método de diseño que se deriva del Teorema 1 puede resolverse fuera de línea de forma centralizada. Para ello precisa de información global del sistema: topología de la red, matrices de salida C_i y entrada B_i de cada agente, etc. Sin embargo, una vez que los observadores y los controladores se diseñen, su implementación es completamente distribuida y sólo requiere información disponible localmente en cada nodo.

Observación 2. El planteamiento que se hace en este trabajo conlleva la resolución de un problema de optimización sujeto a LMIs. Esto proporciona un método de diseño numéricamente eficiente y permite explotar todos los grados de libertad en el diseño. Esta flexibilidad se consigue, sin embargo, a costa de aumentar la carga de cálculo, que aumenta con el número de nodos y la dimensión del sistema. Los métodos de diseño

descentralizados o distribuidos constituyen todavía un problema abierto para este tipo de sistemas de gran escala.

Observación 3. El caso de diferentes tiempos de muestreo de los agentes, es un trabajo en desarrollo actual por los autores y que implica una mayor complejidad. El caso de muestreos múltiples exactos de un muestreo común a todos es directamente abordable con la solución propuesta, ya que sería modificar la matrices A , B y C_i de la ecuación (6) para adaptarlas al caso.

5. Caso de muestreo basado en eventos

En la arquitectura de control propuesta en el apartado anterior, los agentes periódicamente intercambian las estimaciones del estado de la planta con sus vecinos. En esta sección se extiende el resultado anterior a un esquema de comunicación por eventos, persiguiendo un ahorro de energía y de ancho de banda mediante la activación de las transmisiones sólo en instantes de tiempo específicos, cuando existe información relevante que transmitir, Dormido et al. (2008), Heemels et al. (2008).

Se define el índice temporal $l_j(k)$ como el instante de tiempo más reciente (más próximo a k) en el que el agente j envió sus estimaciones a sus vecinos. La regla que activa los eventos de comunicación se detalla a continuación.

Regla de activación: Dado un umbral $\delta_\omega > 0$, en el instante k , el agente j difunde sus estimaciones a todos sus vecinos i : $j \in \mathcal{N}_i$, sí y sólo sí

$$\|\hat{x}_j(l_j(k)) - \hat{x}_j(k)\| \geq \delta_\omega, \quad \text{para } k > l_j(k), \quad (19)$$

es decir, envía la información cuando la diferencia entre el estado actual y el último enviado supera cierto umbral.

Desde el punto de vista de modelado, la principal diferencia entre el sistema periódicamente muestreado y el paradigma orientado a eventos es el patrón no uniforme de transmisión de la información. Esto modifica el comportamiento de los agentes, cuya dinámica viene ahora determinada por:

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(k+1) &= A\hat{x}_i(k) + B\hat{U}_i(k) + M_i(y_i(k) - C_i\hat{x}_i(k)) \\ &+ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} N_{ji}(\hat{x}_j(l_j(k)) - \hat{x}_i(k)). \end{aligned} \quad (20)$$

La ecuación (20) tiene en cuenta la comunicación no periódica a través del índice temporal $l_j(k)$, que puede ser diferente para cada agente $j \in \mathcal{V}$.

El efecto que este tipo de comunicación produce sobre la dinámica puede asimilarse al efecto de unas perturbaciones. Para mostrar esto, considérese la siguiente ecuación, que reescribe la dinámica de los observadores dada en (20) para esta situación:

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(k+1) &= A\hat{x}_i(k) + B\hat{U}_i(k) + M_i(y_i(k) - C_i\hat{x}_i(k)) \\ &+ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} N_{ji}(\hat{x}_j(k) - \hat{x}_i(k)) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} N_{ji}\omega_j(k), \end{aligned} \quad (21)$$

donde

$$\omega_j(k) = \hat{x}_j(l_j(k)) - \hat{x}_j(k). \quad (22)$$

Comparando (21) con (6), puede observarse que la dinámica de los agentes en el caso de la comunicación basada en eventos sólo difiere de aquella con comunicación periódica en los

Tabla 1: Notación relativa a la planta	
Descripción	
h_i	Nivel de agua del tanque i
v_i	Voltaje de entrada a la bomba i
h_i^0	Nivel de referencia del tanque i
v_i^0	Voltaje de referencia a la bomba i
Δh_i	Incremento de nivel h_i con respecto a h_i^0
Δv_i	Incremento de voltaje v_i con respecto a v_i^0
s	Salida del sistema
r	Referencia a seguir
Δh_r	Nivel de referencia con respecto a h^0
Δv_r	Voltaje de referencia con respecto a v^0

funcionamiento del método propuesto en este artículo. Se aplicará el diseño del sistema de control y observación distribuido a un equipo consistente en cuatro tanques acoplados, concretamente el equipo 33-041 de Feedback, (ver Instruments (2012)).

6.1. Descripción de la planta

La planta, una variante del proceso de tanques que se propuso originalmente en Johansson (2000), es un modelo de un fragmento de una planta química. Se compone de cuatro tanques, cada uno equipado con un sensor de presión para medir el nivel de agua. Los acoplamientos entre los tanques se pueden cambiar utilizando siete válvulas manuales para modificar la dinámica del sistema. El agua se suministra a los tanques por dos bombas sumergidas controladas de forma independiente. La notación relacionada con la planta se da en el Cuadro 1.

La planta se controla utilizando Simulink y una tarjeta de interfaz PCI1711. Para los experimentos se ha elegido la siguiente configuración:

- El agua de entrada se suministra a los depósitos superiores. La bomba 1 alimenta el depósito 1 y la bomba 2 el depósito 3.
- Los depósitos 1 y 3 están acoplados mediante la apertura de la válvula correspondiente.

Aunque la planta es una plataforma educativa, representa de forma realista algunos de los elementos relevantes de una planta controlada de forma distribuida.

El esquema de control distribuido propuesto en este trabajo se aplica a la planta considerando una red con cuatro agentes, dos de los cuales aplican señales de control (ver figura 2). Cada agente ha sido etiquetado de 1 a 4 de acuerdo con el número de depósito cuyo nivel está midiendo. El agente 1 (respectivamente 3) aplica la señal de control a la bomba 1 (2). La topología del grafo es: $2 \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4$.

El objetivo de los experimentos es doble. En primer lugar, los cuatro estados de la planta deben ser estimados por cada agente. En segundo lugar, el nivel de agua de los dos depósitos inferiores debe ser controlado. Con esta configuración, los agentes de control (agentes 1 y 3) no tienen medición directa de las variables que se controlan (los niveles en los tanques 2 y 4).

La regla de activación de los eventos elegida (ecuación 19), dispara el evento cuando se tiene una diferencia entre la estimación actual y la anterior enviada a los vecinos. En el caso de los

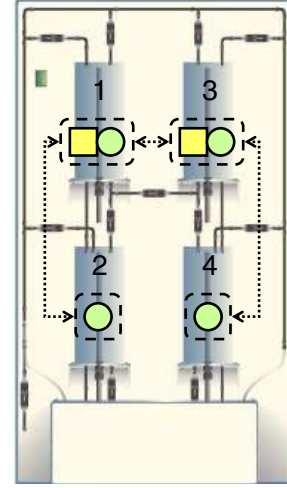


Figura 2: Esquema de control distribuido con 4 agentes.

tanques implica que se activan los eventos cuando la estimación de nivel difieren en una cantidad.

6.2. Modelado de la planta

El sistema de tanques acoplados admite el siguiente modelo no lineal:

$$\begin{aligned}
 \frac{dh_1(t)}{dt} &= -\frac{a_1}{S} \sqrt{2gh_1(t)} + \eta v_1(t) - \frac{a_{13}}{S} \sqrt{2g(h_1(t) - h_3(t))}, \\
 \frac{dh_2(t)}{dt} &= \frac{a_1}{S} \sqrt{2gh_1(t)} - \frac{a_2}{S} \sqrt{2gh_2(t)}, \\
 \frac{dh_3(t)}{dt} &= -\frac{a_3}{S} \sqrt{2gh_3(t)} + \eta v_2(t) + \frac{a_{13}}{S} \sqrt{2g(h_1(t) - h_3(t))}, \\
 \frac{dh_4(t)}{dt} &= \frac{a_3}{S} \sqrt{2gh_3(t)} - \frac{a_4}{S} \sqrt{2gh_4(t)},
 \end{aligned}$$

donde $h_i(t)$ ($i = 1, \dots, 4$) indica el nivel de agua en el depósito correspondiente y v_i ($i = 1, 2$) es la tensión aplicada a la bomba i . a_i ($i = 1, \dots, 4$) es el área de salida de cada tanque, a_{13} es el área de la tubería de interconexión entre los tanques 1 y 3; η es una constante que relaciona la tensión de control de la bomba y el flujo de agua, S es el área de la sección transversal de los tanques, y g es la constante gravitacional.

Este sistema se linealiza alrededor del punto de equilibrio dado por h_i^0 y u_i^0 , obteniéndose

$$\Delta \dot{h}(t) = A \Delta h(t) + B \Delta v(t), \quad (24)$$

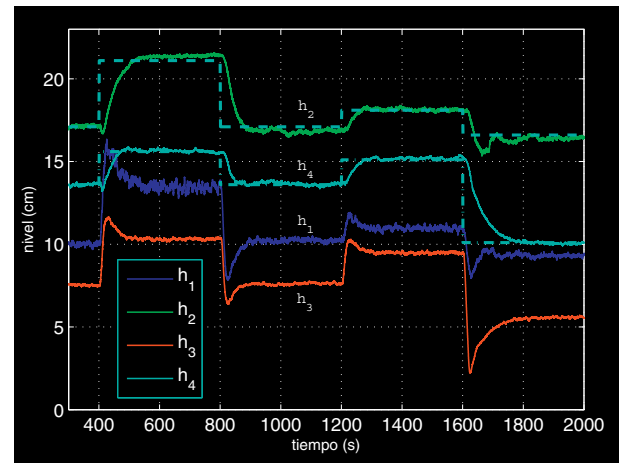
donde $\Delta h(t) = [h_1(t) - h_1^0 \dots h_4(t) - h_4^0]^T$

y $\Delta v(t) = [v_1(t) - v_1^0 \dots v_2(t) - v_2^0]^T$. Las matrices A y B en (25) (página siguiente), se han obtenido mediante un desarrollo de Taylor de las ecuaciones no lineales del modelo en el punto de equilibrio. Discretizando este modelo con periodo de muestro T , se tiene

$$\Delta h(k+1) = A_D \Delta h(k) + B_D \Delta v(k), \quad (26)$$

donde $\Delta h(k) = [h_1(k) - h_1^0 \dots h_4(k) - h_4^0]^T$

y $\Delta v(k) = [v_1(k) - v_1^0 \dots v_2(k) - v_2^0]^T$. Las matrices A_D y B_D son las matrices discretas correspondientes de A y B .



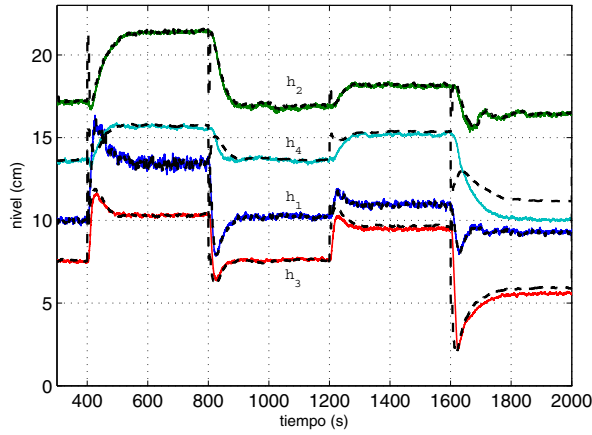


Figura 4: Comportamiento del agente 1 con muestreo periódico. Las estimaciones se muestran con líneas a trozos.

nes de nivel en tanques 2 y 4, pero se estiman estas magnitudes a partir de la información enviada por sus vecinos.

A continuación, se muestra el efecto de los factores de ponderación de la función de coste en (8). Se realizaron dos experimentos, ambos con la misma ponderación para las matrices Q_x y Q_i ($i = 1, \dots, 4$) como en el experimento anterior, y diferentes valores para R : $R_1 = 10^{-6} \cdot I_2$ para obtener un seguimiento de referencias rápido y $R_2 = 10^2 \cdot I_2$ para minimizar el esfuerzo de control. La figura 5 muestra la evolución de los niveles y de las acciones de control. Como era de esperar, se observa un buen seguimiento para el experimento con R_1 , a costa de un control más agresivo. Este resultado muestra cómo puede llegarse a un compromiso de diseño entre seguimiento y esfuerzo de control adecuado ajustando las ganancias de ponderación.

El experimento que se muestra en la figura 6 fue diseñado para demostrar la capacidad de desacople del esquema de control propuesto. Se desea que el tanque 2 lleve a cabo un seguimiento de referencias mientras que el tanque 4 debe permanecer en un punto fijo de operación. Para modificar el nivel del tanque 2, el tanque 1 debe ser llenado o vaciado, y debido a la válvula de acoplamiento, el tanque 3 varía su nivel lo cual también afecta al nivel en el tanque 4. Los controladores distribuidos propuestos han logrado un desacople notable de la dinámica en bucle cerrado como se puede observar a partir de estos experimentos.

Por último, se ensaya el rendimiento del esquema de control por eventos. En este caso, se utilizan las mismas matrices de ponderación del primer experimento, pero con diferentes umbrales para disparar los eventos: $\delta_\omega = 0,1$, $\delta_\omega = 0,3$ y $\delta_\omega = 0,6$. Los resultados para estos ensayos se muestran en la figura 7, donde se presenta el comportamiento de seguimiento en el tanque 2. Se observa que a mayores umbrales de disparo de los eventos (mayor δ_ω), se tienen rendimientos de control menores. El comportamiento no simétrico se debe a que se ha aplicado una técnica de control lineal a una planta real que es no lineal. Por ello cuando nos alejamos del punto de operación aparecen esos comportamientos no simétricos. La figura 8 muestra los

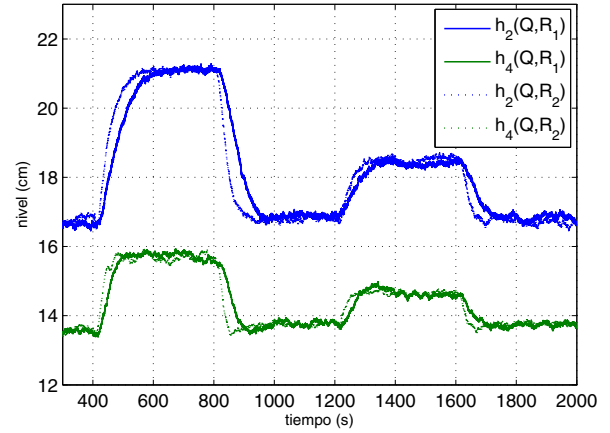


Figura 5: Seguimiento de referencias y señales de control con muestreo periódico y matrices de peso diferentes.

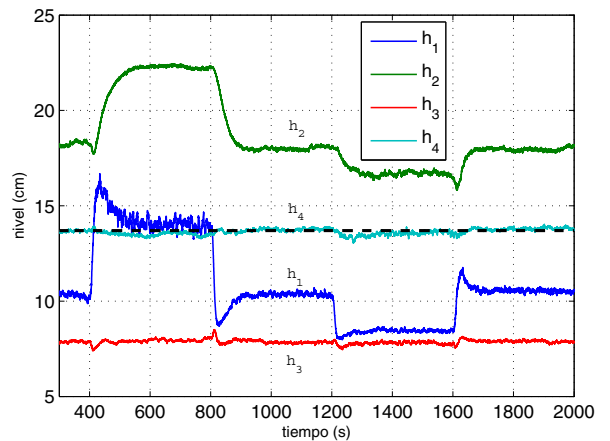
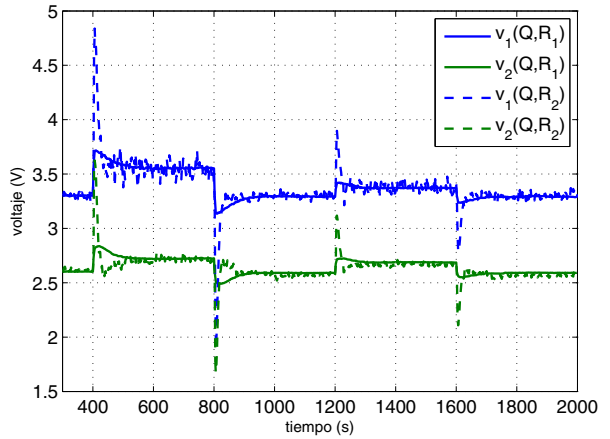
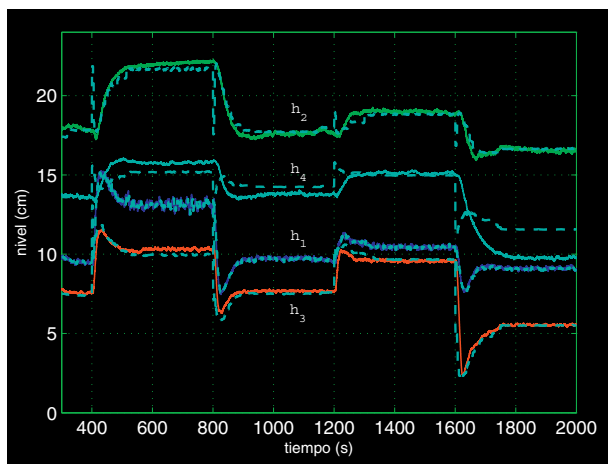
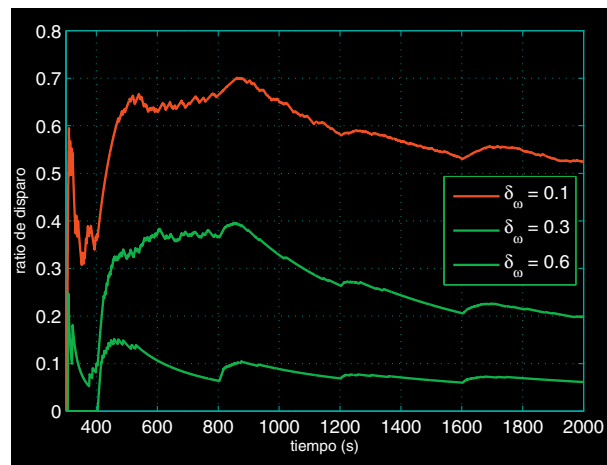
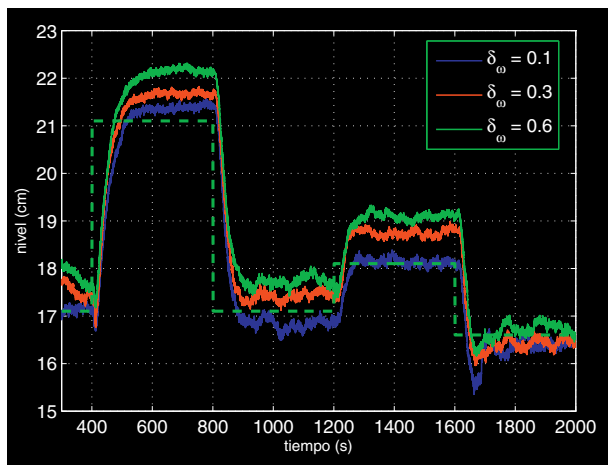


Figura 6: Desacople de control: Cambio de referencia en tanque 2 mientras que la del tanque 4 permanece constante



The paper analyzes two different sampling schemes, periodic and event-driven, providing stability proofs based on Lyapunov theory and design methods in terms of LMIs. Experimental results on a four couple tanks system are provided to show the performance of the proposed methodologies.

Keywords:

Networked Control System, Distributed Estimation, Distributed Control.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación con cargo al proyecto de investigación DPI2010-19154 y por la Junta de Andalucía con cargo al proyecto de excelencia P09-AGR-4782. Agradecer a los revisores sus valiosos comentarios que han mejorado la versión final de este artículo.

Referencias

- Akyildiz, I. F., Su, W., Sankarasubramaniam, Y., Cayirci, E., 2002. Wireless sensor networks: a survey. *Computer networks* 38 (4), 393–422.
- Alvarado, I., Limon, D., Muñoz de la Peña, D. and, J. M., Ridao, M. A., Scheu, H., Marquardt, W., Negenborn, R. R., De Schutter, B., Valencia, F., Espinosa, J., 2011. A comparative analysis of distributed MPC techniques applied to the HD-MPC four-tank benchmark. *Journal of Process Control* 21 (5), 800–815.
- Anderson, B. D. O., Moore, J. B., 1981. Time-varying feedback laws for decentralized control. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26 (5), 1133–1139.
- Antonelli, G., 2013. Interconnected dynamic systems: An overview on distributed control. *IEEE Control Systems Magazine* 33 (1), 76–88.
- Brinón Arranz, L., Seuret, A., Canudas de Wit, C., December 2009. Translation control of a fleet circular formation of AUVs under finite communication range. In: 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China, pp. 8345–8350.
- Camponogara, E., Jia, D., Krogh, B. H., Talukdar, S., 2002. Distributed model predictive control. *IEEE Control Systems* 22 (1), 44–52.
- Cortés, J., Martínez, S., Karatas, T., Bullo, F., 2004. Coverage control form mobile sensing networks. *IEEE Transactions on Robot and Automation* 20 (2), 243–255.
- D’Andrea, R., Dullerud, G. E., 2003. Distributed control design for spatially interconnected systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 48 (9), 1478–1495.
- Davison, E. J., Chang, T. N., 1990. Decentralized stabilization and pole assignment for general proper systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 35 (6), 652–664.
- Davison, E. J., Wang, S. H., 1973. On the stabilization of decentralized control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 18 (5), 473–478.
- Donkers, M., Heemels, W., 2012. Output-based event-triggered control with guaranteed l_∞ -gain and improved and decentralized event-triggering. *IEEE Transactions on Automatic Control* 57 (6), 1362–1376.
- Dormido, S., Sánchez, J., Kofman, E., 2008. Muestreo, control y comunicación basado en eventos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 5 (1), 5–26.
- Dunbar, W. B., 2007. Distributed receding horizon control of dynamically coupled nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 52 (7), 1249–1263.
- El Ghaoui, L., Oustry, F., AitRami, M., 1997. A cone complementary linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 42 (8), 1171–1176.
- Estrin, D., Govindan, R., Heidemann, J., Kumar, S., August 1999. Next century challenges: scalable coordination in sensor networks. In: 5th ACM/IEEE International Conference on Mobile Computing and Networking. Seattle, WA, USA, pp. 263–270.
- Guinaldo, M., Dimarogonas, D., Johansson, K., Sánchez, J., Dormido, S., 2013. Distributed event-based control strategies for interconnected linear systems. *IET Control Theory and Applications* 7 (6), 877–886.
- Heemels, W., Donkers, M., Teel, A., 2013. Periodic event-triggered control for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 58 (4), 847–861.
- Heemels, W. P. M. H., Sandee, J. H., Van Den Bosch, P. P. J., 2008. Analysis of event-driven controllers for linear systems. *International Journal of Control* 81 (4), 571–590.
- Iftar, A., August 1991. Decentralized optimal control with overlapping decompositions. In: IEEE International Conference on Systems Engineering. Dayton, Ohio, USA, pp. 299–302.
- Iftar, A., 1993. Overlapping decentralized dynamic optimal control. *International Journal of Control* 58 (1), 187–209.
- Instruments, F., 2012. Data Sheet: 33-041 Coupled Tank System for Matlab.
- Johansson, K. H., 2000. The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 8 (3), 456–465.
- Lee, J., Su, Y., Chung-Chou, S., 2007. A comparative study of wireless protocols: Bluetooth, UWB, Zigbee, and Wi-Fi, 46–51.
- Lu, B., Oyekan, J., Gu, D., Hu, H., Nia, H. F. G., 2011. Mobile sensor networks for modelling environmental pollutant distribution. *International Journal of Systems Science* 42 (9), 1491–1505.
- Lunze, J., Lehmann, D., 2010. A state-feedback approach to event-based control. *Automatica* 46, 211–215.
- Lynch, J. P., Law, K. H., Blume, J. A., February 2002. Decentralized control techniques for large-scale civil structural systems. In: 20th International Modal Analysis Conference. Los Angeles, CA, USA, pp. 4–7.
- Maestre, J. M., Negenborn, R., 2013. Distributed model predictive control made easy.
- Millán, P., 2012. Robust analysis and design of networked control systems with applications. Ph.D. thesis, Universidad de Sevilla.
- Millán, P., Orihuela, L., Vivas, C., Rubio, F., 2012. Control óptimo- L_2 basado en red mediante funcionales de Lyapunov-Krasovskii. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 9 (1), 14–23.
- Negenborn, R. R., B., D. S., Hellendoorn, J., 2008. Multi-agent model predictive control for transportation networks: Serial versus parallel schemes. *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 21 (3), 353–366.
- Olfati-Saber, R., December 2005. Distributed Kalman filter with embedded consensus filters. In: 44th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference. Seville, Spain, pp. 8179–8184.
- Orihuela, L., Millán, P., Vivas, C., Rubio, F. R., 2013. H_2/H_∞ control for discrete TDS with application to networked control systems: periodic and asynchronous communication. *Optimal Control Applications and Methods*, doi: 10.1002/oca.2101.
- Roshany-Yamchi, S., Cychowski, M., Negenborn, R. R., De Schutter, B., Delaney, K., Connell, J., 2013. Kalman filter-based distributed predictive control of large-scale multi-rate systems: Application to power networks. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 21 (1), 27–39.
- Salt, J., Casanova, V., Cuenca, A., Pizá, R., 2008. Sistemas de control basados en red. modelado y diseño de estructuras de control. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 5 (3), 5–20.
- Scattolini, R., 2009. Architectures for distributed and hierarchical Model Predictive Control - a review. *Journal of Process Control* 19 (5), 723–731.
- Siljak, D. D., Zecevic, A. I., 2005. Control of large-scale systems: Beyond decentralized feedback. *Annual Reviews in Control* 29 (2), 169–179.
- Tabuada, P., 2007. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing. *IEEE Transactions on Automatic Control* 52 (9), 1680–1685.
- Venkat, A. N., Rawlings, J. B., Wright, S. J., December 2005. Stability and optimality of distributed model predictive control. In: 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. Seville, Spain, pp. 6680–6685.
- Xiao, L., Boyd, S., Lall, S., April 2005. A scheme for robust distributed sensor fusion based on average consensus. In: 4th International Symposium on Information Processing in Sensor Networks. Los Angeles, California, USA, pp. 4209–4214.
- Yue, D., Han, Q. L., Lam, J., 2005. Network-based robust H_∞ control of systems with uncertainty. *Automatica* 41 (6), 999–1007.
- Yue, D., Tian, E., Han, Q. L., 2013. A delay system method for designing event-triggered controllers of networked control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 58 (2), 475–481.