

Control Activo de Vibraciones en un Rotor Tipo Jeffcott con Velocidad Variable Usando una Suspensión Electromecánica

F. Beltrán-Carbajal^{a,*}, G. Silva-Navarro^b, M. Arias-Montiel^c

^aUniversidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, Departamento de Energía, México, D. F., México

^bCentro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N., Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica, México, D. F., México

^cUniversidad Tecnológica de la Mixteca, Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Huajuapán de León, Oaxaca, México

Resumen

En este trabajo se presenta un esquema de balanceo activo para un rotor tipo Jeffcott con velocidad variable, usando una suspensión con actuadores electromecánicos lineales. Se propone un esquema de estimación de las señales de perturbación que se inducen por la excentricidad presente en el sistema rotor-chumacera y una ley de control del desbalance que combina tareas de seguimiento de trayectorias para el perfil de velocidades en el rotor. Las señales de perturbación se estiman adecuadamente y el control de la velocidad se realiza en forma robusta, dando como resultado un desempeño eficiente del esquema de control activo para la supresión de vibraciones, con amplitud y frecuencia variables, generadas por el inherente desbalance desconocido en el rotor. Copyright © 2014 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

Palabras Clave:

Control activo de vibraciones, Rotor tipo Jeffcott, Rechazo de perturbaciones.

1. Introducción

El modelo del rotor Jeffcott se ha estudiado ampliamente y a pesar de que pudiera parecer muy simple para ser aplicado directamente en problemas prácticos de rotores, el fenómeno de vibraciones asociado a él se observa muy frecuentemente en el mundo real. Este tipo de rotor permite tener una buena percepción y comprensión de los fenómenos físicos que se presentan en la maquinaria rotatoria, por mencionar algunos, la presencia de una velocidad crítica y el efecto del amortiguamiento en la respuesta del sistema. Las turbomáquinas modernas producen o absorben cantidades enormes de energía, lo cual implica, entre otras cosas, que trabajan a muy altas velocidades en relación con otros tipos de máquinas, ocasionando grandes cargas inerciales y, potencialmente, problemas de vibraciones e inestabilidad rotodinámica (Lee, 1993), (Vance et al., 2010).

En el diseño de este tipo de máquinas las herramientas de modelado dinámico y simulación numérica son cada vez más comunes, debido a que una descripción matemática de los sistemas representa la posibilidad de predecir su comportamiento dinámico y de usar esta información para implementar cambios en el diseño o controlar el sistema, de tal manera que se obtenga

el comportamiento deseado, sin necesidad de realizar excesivas pruebas de laboratorio o en el equipo real.

Una de las principales causas de la imprecisión de un modelo matemático es la incertidumbre en los parámetros. En el contexto de las máquinas rotatorias, particularmente en el modelo del rotor Jeffcott, uno de los parámetros más importantes y difíciles de estimar es la llamada excentricidad, definida como la distancia radial entre el centro geométrico de rotación y el centro de masa del disco. De este parámetro, la masa y la velocidad del sistema depende la fuerza centrífuga de perturbación endógena, ocasionada por el desbalance, que representa una de las principales causas de vibraciones en el sistema. En tal sentido se ha reportado en la literatura el uso de técnicas de identificación y de estimación de parámetros para dar solución al problema de incertidumbre en los modelos de máquinas rotatorias. Yang y Lin (Yang y Lin, 2002) presentan un método para estimar el desbalance distribuido en el eje de un rotor tipo Jeffcott, suponiendo que dicho desbalance se puede describir con funciones polinomiales y considerando que el desbalance no cambia con la velocidad de operación de la máquina; el método requiere lecturas de un sólo sensor, pero su precisión se ve afectada directamente por el número de velocidades a las que se tomen los datos. Mahfoud et al. (Mahfoud et al., 2009) propone un método para estimar las fuerzas externas que actúan sobre un sistema rotor-chumacera fuera de línea, empleando el método de los mínimos cuadrados a partir de las mediciones del

* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: fbeltran@correo.azc.uam.mx (F. Beltrán-Carbajal), gsilva@cinvestav.mx (G. Silva-Navarro), mam@mixteco.utm.mx (M. Arias-Montiel)

vector de estados (i.e., desplazamientos, velocidades y aceleraciones); algunas desventajas de este método son que además de aplicarse fuera de línea se requiere de la respuesta del sistema a diferentes señales de entrada y de la estimación de todas las matrices del modelo para la estimar las fuerzas externas. De Queiroz (De Queiroz, 2009) describe un método basado en técnicas de control robusto para la identificación de los parámetros del desbalance de un rotor Jeffcott, en el cual se estiman primero las fuerzas de desbalance y, posteriormente, de estas fuerzas se estiman la magnitud y la fase de la excentricidad; este método se valida mediante simulaciones numéricas y es necesario que la velocidad de la máquina satisfaga ciertas condiciones relacionadas con la convergencia del método.

La importancia de disponer de un modelo matemático de un sistema en rotodinámica radica en su aplicación para desarrollar algoritmos de control que permitan el correcto funcionamiento de la máquina, particularmente, la reducción de las vibraciones durante su operación, sobre todo cuando tiene que operar en el rango super crítico. Se han utilizado diversos dispositivos como actuadores de control (pasivos o activos), cada cual con ventajas y desventajas (Blanco-Ortega et al., 2010), (Zhou y Shi, 2001). Los sistemas de control de vibraciones pasivos presentan muchas limitaciones cuando los sistemas operan en un amplio rango de frecuencias de excitación (De Silva, 2007), como es el caso de las máquinas rotatorias, por lo que su aplicación en este tipo de sistemas es bastante limitada. En lo referente a los dispositivos activos, los más utilizados han sido las chumaceras electromagnéticas activas (AMB, por sus siglas en inglés) y los actuadores piezoeléctricos. La ausencia de contacto, que evita el desgaste y la necesidad de lubricación y la dinámica relativamente fácil de controlar, son las principales ventajas de las AMB (Schweitzer, 2010). La aplicación de las AMB en maquinaria rotatoria data de la década de 1990 (Knospe, 1995), (Sivrioglu y Nonami, 1998), pero la investigación en este campo sigue siendo ardua en tiempos actuales (Pi-Cheng et al., 2011), (Kejian et al., 2012), (Arredondo et al., 2008). Las principales desventajas de las AMB son el requerimiento de chumaceras auxiliares, el ancho de banda para el comportamiento lineal, las pérdidas de energía causadas por la histéresis y las corrientes de Eddy y la posible necesidad de un sistema externo de enfriamiento dadas las altas temperaturas que pueden alcanzar durante su operación (Schweitzer, 2002). La aplicación de los actuadores piezoeléctricos en control de vibraciones en rotores se ha incrementado en los últimos años como consecuencia del avance en el desarrollo de nuevos materiales y dado que son compactos, capaces de desarrollar grandes fuerzas y que presentan un control muy preciso de movimiento, con tiempos de respuesta rápidos y sin la presencia de interferencia electromagnética (e.g., (Simoes et al., 2007), (Jung-Ho et al., 2010)). La principal desventaja de los actuadores piezoeléctricos es su alto costo y baja capacidad de carga.

En este trabajo se presenta un esquema de balanceo en línea de un rotor tipo Jeffcott considerando velocidad variable y usando como dispositivo de control una suspensión activa basada en actuadores electromecánicos lineales y resortes helicoidales (Arias-Montiel y Silva-Navarro, 2010). Además, se proponen un esquema de estimación de las señales de perturbación que se

inducen debido a la excentricidad del sistema mecánico rotatorio y una ley de control Proporcional-Integral (PI) para tareas de seguimiento de trayectorias de referencia de velocidad angular del rotor. La estimación se realiza en línea únicamente a partir de la lectura de sensores de posición que miden el desplazamiento lateral de la flecha en una ubicación cercana al disco. El diseño del esquema de estimación se basa en la teoría del control Proporcional-Integral Generalizado (Fliess et al., 2002) y en el modelado de las señales de perturbación mediante familias de polinomios de Taylor (Sira-Ramírez et al., 2007, 2008a,b). La propuesta de la suspensión activa representa una alternativa a los dispositivos comúnmente utilizados en el balanceo de maquinaria rotatoria, debido al bajo costo de los actuadores lineales y a su reducido consumo energético, ya que consumen alrededor de 2,5 W y se emplean para controlar una máquina impulsada por un motor de 746 W. Los resultados en simulación muestran el desempeño eficiente del esquema de control activo para la supresión de vibraciones de amplitud y frecuencia variables, generadas por el desbalance en el rotor, la estimación efectiva de las señales de perturbación y la robustez del controlador de velocidad.

2. Modelo dinámico del sistema

2.1. Descripción del rotor tipo Jeffcott

La configuración del rotor Jeffcott con chumacera activa se muestra en la Figura 1(a), la cual consiste de un disco de masa m montado sobre una flecha de masa despreciable, a la mitad de la distancia entre soportes. La chumacera izquierda es una convencional con rodamientos y la derecha es una chumacera activa, que emplea un arreglo de resortes helicoidales en tensión-compresión y dos actuadores lineales electromecánicos, que soporta una pequeña chumacera convencional para ejercer fuerzas radiales de control sobre la flecha (ver detalle en la Figura 2).

La Figura 1(b) presenta la vista lateral del disco con los sistemas de referencia utilizados para la obtención del modelo matemático del sistema mecánico rotatorio. Las coordenadas del centro de masa (u_η, u_ξ) en el sistema de referencia rotatorio (η, ξ) son: $u_\eta = u \cos \beta$, $u_\xi = u \sin \beta$, donde u es el módulo del vector de excentricidad del disco y β es su ángulo de fase medido con respecto al eje η . Las coordenadas del centro de masa (x_{CG}, y_{CG}) en el sistema inercial (X, Y) están dadas por: $x_{CG} = x + u \cos(\varphi + \beta)$, $y_{CG} = y + u \sin(\varphi + \beta)$, donde x y y son las coordenadas del centro geométrico del disco en el sistema inercial (X, Y) y φ es el desplazamiento angular del disco medido con respecto al eje horizontal X .

Utilizando el método de Euler-Lagrange, se obtiene el modelo matemático que describe la dinámica del rotor tipo Jeffcott con chumacera activa y velocidad variable en el rotor:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - m\dot{u}\dot{\varphi} \sin(\varphi + \beta) - m\dot{u}\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \beta) + k_x x + c_x \dot{x} &= u_x \\ m\ddot{y} + m\dot{u}\dot{\varphi} \cos(\varphi + \beta) - m\dot{u}\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \beta) + k_y y + c_y \dot{y} &= u_y \\ J_e \ddot{\varphi} - m\dot{x} \sin(\varphi + \beta) + m\dot{y} \cos(\varphi + \beta) + c_\varphi \dot{\varphi} &= \tau \quad (1) \end{aligned}$$

donde k_x y k_y son las constantes de rigidez equivalente de la flecha en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, c_x y c_y son los coeficientes de amortiguamiento viscoso en

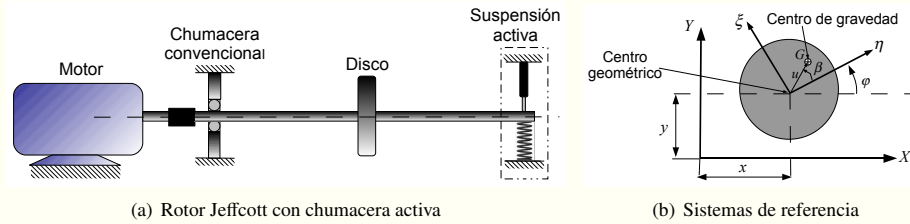


Figura 1: Representación esquemática del sistema rotatorio.

las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, J_e es el momento de inercia del rotor respecto al eje de rotación, c_φ es el amortiguamiento viscoso rotacional, τ es el par torsional de control suministrado por el motor impulsor para regular la velocidad del sistema, u_x y u_y son las fuerzas de control proporcionadas por la suspensión activa para suprimir las vibraciones mecánicas indeseables, inducidas por las fuerzas de desbalance.

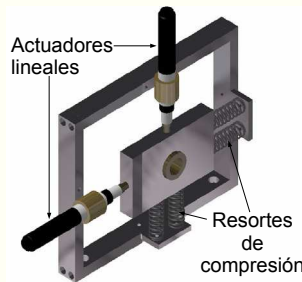


Figura 2: Diseño de la suspensión activa con actuadores lineales.

Observación 2.1. Las ecuaciones diferenciales no lineales (1) son apropiadas para describir la respuesta al desbalance de un rotor tipo Jeffcott, dominada por los primeros modos de vibración del sistema en las direcciones horizontal y vertical, que ocurren a bajas frecuencias o velocidades de operación (Zhou y Shi, 2001), (Vance et al., 2010). Por otro lado, en el escenario de que el sistema mecánico rotatorio opere a velocidades angulares elevadas, con modos de vibración de alta frecuencia, se puede obtener una descripción más precisa del sistema utilizando el método de elemento finito. En este trabajo se aborda el problema de balanceo activo del rotor en condiciones de operación de arranque/paro de la máquina desde una velocidad inicial a una final, pasando por las primeras velocidades críticas.

Observación 2.2. El modelo simplificado tipo Jeffcott, describe solo las coordenadas de desbalance concentradas al plano del disco y la velocidad angular del rotor, y deja fuera dinámicas más complejas que son importantes en rotores mucho más complejos, como serían las características de sus soportes o chumaceras, irregularidades geométricas y físicas en la flecha y distribución de varios discos o planos de balanceo, modos flexibles que ocurren a altas velocidades angulares y posibles asimetrías de operación que conlleven a efectos giroscópicos. Ver, e.g., (Zhou y Shi, 2001), (Vance et al., 2010), (Arias-Montiel y Silva-Navarro, 2010).

2.2. Suspensión activa

El diseño de la suspensión activa se basa en el uso de dos actuadores electromecánicos lineales, los cuales emplean un motor eléctrico de corriente directa (CD) con reductor de velocidad y un mecanismo de tornillo sinfín y corona (engrane), para la transformación del movimiento rotacional a movimiento lineal. Un actuador proporciona la fuerza en la dirección del eje x y un segundo actuador la fuerza en la dirección del eje y , como se muestra en la Figura 2.

El modelo matemático de un actuador lineal para la suspensión activa está dado por (Arias-Montiel y Silva-Navarro, 2010)

$$\begin{aligned} L \frac{d}{dt} i &= -Ri - nk_e \omega_0 + v \\ J_1 \dot{\omega}_0 &= -b_1 \omega_0 + \tau_m - \tau_L \\ \tau_m &= nk_m i \\ F &= \frac{\tau_m}{r} = \frac{nk_m}{r} i \end{aligned} \quad (2)$$

donde i denota a la corriente eléctrica del circuito de armadura, ω_0 representa la velocidad angular del eje del reductor de velocidad, n es la relación de reducción de velocidad, r es el radio del engrane del servomecanismo, v es el voltaje aplicado al circuito de armadura, el cual actúa como variable de control del actuador lineal, τ_m es el par electromagnético y F es la fuerza radial utilizada para balanceo activo del rotor. L es la inductancia del circuito de armadura, R es la resistencia del circuito de armadura, k_e es la constante de fuerza contra-electromotriz y k_m es la constante de par del motor. J_1 es el momento de inercia equivalente del eje del motor, reductor de velocidad y mecanismo de tornillo sinfín y corona, y b_1 es el coeficiente de amortiguamiento viscoso equivalente en el motor de CD.

2.3. Rotor tipo Jeffcott con suspensión activa

Usando (1) y (2) se obtiene el modelo dinámico de un rotor tipo Jeffcott con una suspensión activa para los dos ejes (horizontal y vertical):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x &= f_x + \gamma i_x \\ m\ddot{y} + c_y\dot{y} + k_y y &= f_y + \gamma i_y \\ J_e \ddot{\varphi} + c_\varphi \dot{\varphi} &= f_\varphi + \tau \\ L \frac{d}{dt} i_x &= -Ri_x - nk_e \omega_{0x} + v_x \\ J_1 \dot{\omega}_{0x} &= -b_1 \omega_{0x} + nk_m i_x - k_x r x - c_x r \dot{x} \\ L \frac{d}{dt} i_y &= -Ri_y - nk_e \omega_{0y} + v_y \\ J_1 \dot{\omega}_{0y} &= -b_1 \omega_{0y} + nk_m i_y - k_y r y - c_y r \dot{y} \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\gamma = nk_m/r$, f_x y f_y son las fuerzas de desbalance en las direcciones x y y , respectivamente, y f_φ es el par de perturbación generado por la excentricidad del rotor, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned} f_x &= m\ddot{\varphi} \sin(\varphi + \beta) + m\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \beta) \\ f_y &= m\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \beta) - m\ddot{\varphi} \cos(\varphi + \beta) \\ f_\varphi &= m\ddot{x} \sin(\varphi + \beta) - m\ddot{y} \cos(\varphi + \beta) \end{aligned}$$

Definiendo las variables de estado como

$$\begin{aligned} z_1 &= x, & z_2 &= \dot{x}, & z_3 &= y, & z_4 &= \dot{y}, & z_5 &= \varphi, \\ z_6 &= \dot{\varphi}, & z_7 &= i_x, & z_8 &= \omega_{0x}, & z_9 &= i_y, & z_{10} &= \omega_{0y}, \end{aligned}$$

las variables de entrada de control como $u_1 = v_x$, $u_2 = v_y$, $u_3 = \tau$, y como variables de salida a $y_u = \sqrt{x^2 + y^2}$ (magnitud del desbalance total) y $y_\omega = \dot{\varphi}$, se obtiene la representación en espacio de estados del sistema no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z) + g_1(z)u_1 + g_2(z)u_2 + g_3(z)u_3 \\ y_u &= h_1(z) = \sqrt{z_1^2 + z_3^2} \\ y_\omega &= h_2(z) = z_6 \end{aligned} \quad (4)$$

donde $z \in \mathbb{R}^{10}$, $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$, $y_u \in \mathbb{R}$, y $f(z)$, $g_1(z)$, $g_2(z)$ y $g_3(z)$ son campos vectoriales suaves en \mathbb{R}^{10} . Note que el sistema (4) es no lineal, subactuado y con perturbaciones síncronas, donde se desean controlar los desplazamientos laterales del rotor (z_1, z_3) y la velocidad angular del rotor z_6 .

3. Balanceo activo del rotor tipo Jeffcott

Para el diseño del esquema de balanceo activo del rotor se derivan una vez con respecto del tiempo las primeras dos ecuaciones del sistema (3), de manera que aparezcan explícitamente las entradas de control (voltajes), resultando

$$\begin{aligned} mx^{(3)} + c_x \ddot{x} + k_x \dot{x} &= \xi_x + \frac{\gamma}{L} (-Ri_x - nk_e \omega_{0x} + v_x) \\ my^{(3)} + c_y \ddot{y} + k_y \dot{y} &= \xi_y + \frac{\gamma}{L} (-Ri_y - nk_e \omega_{0y} + v_y) \end{aligned} \quad (5)$$

donde

$$\begin{aligned} \xi_x &= m\ddot{\omega}(\ddot{\omega} - \omega^3) \sin(\varphi + \beta) + 3m\dot{\omega}\ddot{\omega} \cos(\varphi + \beta) \\ \xi_y &= 3m\dot{\omega}\ddot{\omega} \sin(\varphi + \beta) + m\ddot{\omega}(\omega^3 - \ddot{\omega}) \cos(\varphi + \beta) \end{aligned} \quad (6)$$

En este trabajo, se consideran a (ξ_x, ξ_y) como señales de perturbación que serán estimadas mediante un observador de estados y compensadas mediante la acción de control sobre los actuadores electromecánicos. Posteriormente, las velocidades (\dot{x}, \dot{y}) y aceleraciones (\ddot{x}, \ddot{y}) también serán estimadas con observadores de estados a partir de los desplazamientos laterales en la flecha, medidos directamente con sensores de posición de no contacto (conocidos como *proximity*s).

Se proponen controladores por retroalimentación de estados y prealimentación de las señales de perturbación para balancear

activamente el rotor:

$$\begin{aligned} v_x &= v_1 + Ri_x + nk_e \omega_{0x} - \frac{L}{\gamma} \xi_x \\ v_y &= v_2 + Ri_y + nk_e \omega_{0y} - \frac{L}{\gamma} \xi_y \end{aligned} \quad (7)$$

con

$$\begin{aligned} v_1 &= -\alpha_{2,x} \ddot{x} - \alpha_{1,x} \dot{x} - \alpha_{0,x} x \\ v_2 &= -\alpha_{2,y} \ddot{y} - \alpha_{1,y} \dot{y} - \alpha_{0,y} y \end{aligned}$$

Sustituyendo (7) en (5), se obtienen las expresiones que describen la dinámica en lazo cerrado de la posición del centro del rotor:

$$\begin{aligned} x^{(3)} + \left(\frac{c_x}{m} + \frac{\gamma}{mL} \alpha_{2,x}\right) \ddot{x} + \left(\frac{k_x}{m} + \frac{\gamma}{mL} \alpha_{1,x}\right) \dot{x} + \frac{\gamma}{mL} \alpha_{0,x} x &= 0 \\ y^{(3)} + \left(\frac{c_y}{m} + \frac{\gamma}{mL} \alpha_{2,y}\right) \ddot{y} + \left(\frac{k_y}{m} + \frac{\gamma}{mL} \alpha_{1,y}\right) \dot{y} + \frac{\gamma}{mL} \alpha_{0,y} y &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

con polinomios característicos:

$$\begin{aligned} p_{c,j}(s) &= s^3 + \left(\frac{c_j}{m} + \frac{\gamma}{mL} \alpha_{2,j}\right) s^2 \\ &+ \left(\frac{k_j}{m} + \frac{\gamma}{mL} \alpha_{1,j}\right) s + \frac{\gamma}{mL} \alpha_{0,j}, \quad j = x, y \end{aligned} \quad (9)$$

Para seleccionar las ganancias de los controladores, se proponen los siguientes polinomios *Hurwitz* para la dinámica en lazo cerrado del centro del rotor:

$$p_{c,j}(s) = (s + p_{1,j})(s^2 + 2\zeta_j \omega_{n,j} s + \omega_{n,j}^2) \quad (10)$$

con $p_{1,j}$, $\omega_{n,j}$, $\zeta_j > 0$. Entonces, igualando los coeficientes correspondientes de los polinomios (9) y (10), se obtienen las ganancias de los controladores (7):

$$\begin{aligned} \alpha_{0,j} &= \frac{mL p_{1,j} \omega_{n,j}^2}{\gamma} \\ \alpha_{1,j} &= \frac{mL}{\gamma} \left(\omega_{n,j}^2 + 2p_{1,j} \zeta_j \omega_{n,j} - \frac{k_j}{m} \right) \\ \alpha_{2,j} &= \frac{mL}{\gamma} \left(p_{1,j} + 2\zeta_j \omega_{n,j} - \frac{c_j}{m} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Las leyes de control que se proponen (v_x, v_y) consideran la cancelación de las perturbaciones dinámicas debidas al desbalance (ξ_x, ξ_y) en las ecuaciones del desbalance en el sistema rotor-chumacera y de las dinámicas asociadas a los actuadores electromecánicos, del tipo linealización por retroalimentación dinámica. Las ecuaciones que describen la dinámica del desbalance se derivan una vez con respecto del tiempo para que aparezcan explícitamente las entradas de control (voltajes), por lo que los controladores linealizan estas dinámicas, cancelando las perturbaciones mediante la prealimentación de las señales estimadas de (ξ_x, ξ_y) . Posteriormente, mediante observadores de estados se estimarán las velocidades (\dot{x}, \dot{y}) , aceleraciones (\ddot{x}, \ddot{y}) y señales de perturbación (ξ_x, ξ_y) . Por lo tanto, la ley de control final (7) necesitará únicamente la medición de los desplazamientos laterales del rotor (x, y) , corrientes en los actuadores lineales (i_x, i_y) y velocidades angulares en las flechas de los reductores de los motores de CD $(\omega_{0x}, \omega_{0y})$.

4. Control suave de la velocidad angular del rotor

Para regular la velocidad angular del rotor en el sistema rotor-chumacera (3), se propone un controlador Proporcional-Integral (PI) para el seguimiento de un perfil de velocidad deseado (suave) $\omega^*(t)$:

$$\tau = J_e v + c_\varphi \omega$$

$$v = \dot{\omega}^*(t) - \alpha_{1,\omega} [\omega - \omega^*(t)] - \alpha_{0,\omega} \int_0^t [\omega - \omega^*(t)] dt \quad (12)$$

Suponiendo que el desbalance se cancela por la acción de los controladores (7), la dinámica del error de seguimiento de velocidad en el rotor $e_\omega = \omega - \omega^*(t)$ queda como

$$\ddot{e}_\omega + \alpha_{1,\omega} \dot{e}_\omega + \alpha_{0,\omega} e_\omega = 0 \quad (13)$$

Entonces, se puede lograr la convergencia asintótica del error de seguimiento e_ω hacia cero, seleccionando los parámetros de diseño $\alpha_{0,\omega}$ y $\alpha_{1,\omega}$ de tal forma que el polinomio característico asociado a la dinámica del error (13) sea un polinomio *Hurwitz*. Así, se verifica el seguimiento asintótico de la trayectoria de referencia para la velocidad del rotor, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_\omega(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \omega^*(t)$$

5. Estimación de las señales de perturbación

El esquema de estimación en línea de las señales de perturbación, ξ_j , $j = x, y$, se basa en describir localmente estas señales mediante familias de polinomios temporales de Taylor de cuarto grado (Sira-Ramírez et al., 2008a):

$$\xi_j(t) = p_{0,j} + p_{1,j}t + p_{2,j}t^2 + p_{3,j}t^3 + p_{4,j}t^4, \quad j = x, y \quad (14)$$

donde se considera que todos los coeficientes $p_{k,j}$, $k = 0, \dots, 4$, $j = x, y$, no se conocen.

Definiendo como variables de estado

$$\begin{aligned} \eta_{1,j} &= j, & \eta_{2,j} &= \dot{\eta}_{1,j}, & \eta_{3,j} &= \ddot{\eta}_{1,j}, & \xi_{1,j} &= \xi_j, \\ \xi_{2,j} &= \dot{\xi}_j, & \xi_{3,j} &= \ddot{\xi}_j, & \xi_{4,j} &= \xi_j^{(3)}, & \xi_{5,j} &= \xi_j^{(4)} \end{aligned}$$

se obtiene un modelo extendido en espacio de estados que describe la dinámica del centro del rotor (5) y las señales de perturbación de tipo polinomial (14) como

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_{1,j} &= \eta_{2,j} \\ \dot{\eta}_{2,j} &= \eta_{3,j} \\ \dot{\eta}_{3,j} &= -\frac{k_j}{m}\eta_{2,j} - \frac{c_j}{m}\eta_{3,j} - \frac{\gamma}{mL}Ri_j - \frac{\gamma}{mL}nk_e\omega_{0j} \\ &\quad + \frac{\gamma}{mL}v_j + \frac{1}{m}\xi_{1,j} \\ \dot{\xi}_{1,j} &= \xi_{2,j} \\ \dot{\xi}_{2,j} &= \xi_{3,j} \\ \dot{\xi}_{3,j} &= \xi_{4,j} \\ \dot{\xi}_{4,j} &= \xi_{5,j} \\ \dot{\xi}_{5,j} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

donde $j = x, y$.

A partir de la dinámica del rotor (15), las velocidades, aceleraciones y señales de perturbación se pueden estimar mediante observadores de estados de *Luenberger*:

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{1,j} &= \hat{\eta}_{2,j} + \beta_{7,j}(\eta_{1,j} - \hat{\eta}_{1,j}) \\ \hat{\eta}_{2,j} &= \hat{\eta}_{3,j} + \beta_{6,j}(\eta_{1,j} - \hat{\eta}_{1,j}) \\ \hat{\eta}_{3,j} &= -\frac{k_j}{m}\hat{\eta}_{2,j} - \frac{c_j}{m}\hat{\eta}_{3,j} - \frac{\gamma}{mL}Ri_j - \frac{\gamma}{mL}nk_e\omega_{0j} \\ &\quad + \frac{\gamma}{mL}v_j + \frac{1}{m}\hat{\xi}_{1,j} + \beta_{5,j}(\eta_{1,j} - \hat{\eta}_{1,j}) \\ \hat{\xi}_{1,j} &= \hat{\xi}_{2,j} + \beta_{4,j}(\eta_{1,j} - \hat{\eta}_{1,j}) \\ \hat{\xi}_{2,j} &= \hat{\xi}_{3,j} + \beta_{3,j}(\eta_{1,j} - \hat{\eta}_{1,j}) \\ \hat{\xi}_{3,j} &= \hat{\xi}_{4,j} + \beta_{2,j}(\eta_{1,j} - \hat{\eta}_{1,j}) \\ \hat{\xi}_{4,j} &= \hat{\xi}_{5,j} + \beta_{1,j}(\eta_{1,j} - \hat{\eta}_{1,j}) \\ \hat{\xi}_{5,j} &= \beta_{0,j}(\eta_{1,j} - \hat{\eta}_{1,j}) \end{aligned} \quad (16)$$

Cabe señalar que los observadores (16) requieren únicamente las mediciones de los desplazamientos laterales del rotor (x, y), las corrientes en los actuadores lineales (i_x, i_y) y las velocidades angulares en las flechas de los reductores de los motores de cd (ω_{0x}, ω_{0y}). Por lo tanto, la dinámica del error de estimación está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_{1,j} &= -\beta_{7,j}e_{1,j} + e_{2,j} \\ \dot{e}_{2,j} &= -\beta_{6,j}e_{1,j} + e_{3,j} \\ \dot{e}_{3,j} &= -\beta_{5,j}e_{1,j} - \frac{k_j}{m}e_{2,j} - \frac{c_j}{m}e_{3,j} + \frac{1}{m}e_{p_{1,j}} \\ \dot{e}_{p_{1,j}} &= -\beta_{4,j}e_{1,j} + e_{p_{2,j}} \\ \dot{e}_{p_{2,j}} &= -\beta_{3,j}e_{1,j} + e_{p_{3,j}} \\ \dot{e}_{p_{3,j}} &= -\beta_{2,j}e_{1,j} + e_{p_{4,j}} \\ \dot{e}_{p_{4,j}} &= -\beta_{1,j}e_{1,j} + e_{p_{5,j}} \\ \dot{e}_{p_{5,j}} &= -\beta_{0,j}e_{1,j} \end{aligned} \quad (17)$$

donde $e_{1,j} = \eta_{1,j} - \hat{\eta}_{1,j}$, $e_{2,j} = \eta_{2,j} - \hat{\eta}_{2,j}$, $e_{3,j} = \eta_{3,j} - \hat{\eta}_{3,j}$, $e_{p_{k,j}} = \xi_{k,j} - \hat{\xi}_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots, 5$.

Los polinomios característicos de la dinámica del error de estimación son

$$\begin{aligned} p_{o,j}(s) &= s^8 + \left(\beta_{7,j} + \frac{c_j}{m}\right)s^7 + \left(\beta_{6,j} + \frac{k_j}{m} + \frac{c_j}{m}\beta_{7,j}\right)s^6 \\ &\quad + \left(\beta_{5,j} + \frac{c_j}{m}\beta_{6,j} + \frac{k_j}{m}\beta_{7,j}\right)s^5 + \frac{1}{m}\beta_{4,j}s^4 \\ &\quad + \frac{1}{m}\beta_{3,j}s^3 + \frac{1}{m}\beta_{2,j}s^2 + \frac{1}{m}\beta_{1,j}s + \frac{1}{m}\beta_{0,j} \end{aligned} \quad (18)$$

Las ganancias del observador (16) se determinan para que los polinomios característicos (18) sean polinomios *Hurwitz* de la forma

$$p_{o,j}(s) = (s^2 + 2\zeta_{o,j}\omega_{o,j}s + \omega_{o,j}^2)^4, \quad j = x, y \quad (19)$$

con $\zeta_{o,j}, \omega_{o,j} > 0$. La dinámica de los observadores de estados debe ser suficientemente rápida, en comparación con la dinámica del sistema rotor-chumacera, para estimar adecuadamente las señales y utilizarlas en los controladores activos del desbalance (7).

Observación 5.1. Las señales de perturbación, $\xi_j, j = x, y$, contienen componentes sinusoidales (armónicos) sincrónicas con la velocidad angular del rotor, por lo que la selección de las ganancias de los polinomios característicos (18), asociados con la dinámica del error de estimación (17), debe también considerar la velocidad de operación deseada para el sistema.

6. Síntesis de leyes de control para balanceo activo del rotor tipo Jeffcott

En la Figura 3 se muestra la arquitectura del esquema de control activo de vibraciones propuesto. Las leyes de control para balanceo activo (7) consideran la medición de los desplazamientos laterales (posiciones) del rotor (x, y), las corrientes en los actuadores lineales (i_x, i_y) y las velocidades angulares en las flechas de salida de los motores de cd (ω_{0x}, ω_{0y}), así como las estimaciones de velocidades ($\widehat{\eta}_{2,x}, \widehat{\eta}_{2,y}$), aceleraciones ($\widehat{\eta}_{3,x}, \widehat{\eta}_{3,y}$) y señales de perturbación por desbalance ($\widehat{\xi}_{1,x}, \widehat{\xi}_{1,y}$). Así, estas leyes de control se sintetizan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v_x &= v_1 + Ri_x + nk_e\omega_{0,x} - \frac{L}{\gamma}\widehat{\xi}_{1,x} \\ v_y &= v_2 + Ri_y + nk_e\omega_{0,y} - \frac{L}{\gamma}\widehat{\xi}_{1,y} \end{aligned} \quad (20)$$

donde

$$\begin{aligned} v_1 &= -\alpha_{2,x}\widehat{\eta}_{3,x} - \alpha_{1,x}\widehat{\eta}_{2,x} - \alpha_{0,x}x \\ v_2 &= -\alpha_{2,y}\widehat{\eta}_{3,y} - \alpha_{1,y}\widehat{\eta}_{2,y} - \alpha_{0,y}y \end{aligned}$$

Para que estas leyes de control verifiquen los objetivos de control de compensación activa del desbalance y estimación de señales, es necesario que los observadores de estados sean suficientemente rápidos, en comparación con la dinámica de lazo cerrado del sistema rotor-chumacera, y que las ganancias en las leyes de control (20), descritas como $\alpha_{k,j}, k = 0, 1, 2, j = x, y$ y parametrizadas en (11), garanticen acciones de control suficientemente rápidas con respecto del rango de velocidades angulares de operación en el sistema rotor-chumacera.

7. Resultados en simulación

Con el propósito de verificar el desempeño del esquema de balanceo activo, del controlador para las tareas de seguimiento de trayectorias de referencia de velocidad del rotor y de la estimación de las señales de perturbación, se realizan algunas simulaciones numéricas sobre un sistema rotor-chumacera caracterizado por los parámetros descritos en la Tabla 1.

La Figura 4 presenta las respuestas al desbalance en lazo abierto y_u del sistema rotor-chumacera y los desplazamientos laterales (posiciones) del centro del rotor (x, y), cuando se utiliza únicamente el controlador de velocidad angular del rotor

Tabla 1: Parámetros del sistema rotor-chumacera activa

$m = 3,85 \text{ kg}$	$u = 222 \mu\text{m}$
$k_x = 1,9276 \times 10^5 \text{ N/m}$	$\beta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$
$c_x = 12 \text{ N s/m}$	$R = 19,8 \Omega$
$k_y = 2,0507 \times 10^5 \text{ N/m}$	$L = 250 \mu\text{H}$
$c_y = 14 \text{ N s/m}$	$k_e = 11,4 \times 10^{-3} \text{ V s/rad}$
$d = 0,020 \text{ m}$	$J_1 = 3,1054 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$
$r_{\text{disk}} = 0,076 \text{ m}$	$b_1 = 7,1664 \times 10^{-3} \text{ Nm s/rad}$
$l = 0,7293 \text{ m}$	$r = 0,00432 \text{ m}$
$c_\varphi = 1,5 \times 10^{-3} \text{ Nm s/rad}$	$n = 69,2$

(12), sin esquema de balanceo activo, para el seguimiento de una trayectoria de referencia que permite llevar el rotor desde una velocidad inicial $\bar{\omega}_1$, para $t \leq T_1$, a la velocidad final de operación $\bar{\omega}_2$, para $t \geq T_2$. En general, el problema reviste mayor interés cuando el rotor se lleva por arriba de las primeras velocidades críticas $\omega_{crx} = \sqrt{k_x/m} = 223,76 \text{ rad/s} = 2136,75 \text{ rpm}$ y $\omega_{cry} = \sqrt{k_y/m} = 230,79 \text{ rad/s} = 2203,88 \text{ rpm}$. El perfil suave de velocidades que se utiliza para los cambios en la velocidad de operación del rotor se describe como

$$\omega^*(t) = \begin{cases} \bar{\omega}_1 & \text{para } 0 \leq t < T_1 \\ \bar{\omega}_1 + (\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1)\psi(t, T_1, T_2) & \text{para } T_1 \leq t \leq T_2 \\ \bar{\omega}_2 & \text{para } t > T_2 \end{cases} \quad (21)$$

donde $\bar{\omega}_1 = 0 \text{ rad/s}$, $\bar{\omega}_2 = 300 \text{ rad/s} = 2864,8 \text{ rpm}$, $T_1 = 0 \text{ s}$, $T_2 = 10 \text{ s}$ y $\psi(t, T_1, T_2)$ es un polinomio de interpolación de Bézier, con $\psi(T_1, T_1, T_2) = 0$ y $\psi(T_2, T_1, T_2) = 1$, definido como

$$\begin{aligned} \psi(t, T_1, T_2) &= \left(\frac{t - T_1}{T_2 - T_1}\right)^5 \left[r_1 - r_2 \left(\frac{t - T_1}{T_2 - T_1}\right) \right. \\ &\quad \left. - r_3 \left(\frac{t - T_1}{T_2 - T_1}\right)^2 - \dots - r_6 \left(\frac{t - T_1}{T_2 - T_1}\right)^5 \right] \end{aligned}$$

con constantes $r_1 = 252$, $r_2 = 1050$, $r_3 = 1800$, $r_4 = 1575$, $r_5 = 700$ and $r_6 = 126$.

En la Figura 5 se muestra el desempeño robusto del controlador de velocidad del rotor (12), para el seguimiento de la trayectoria de referencia (21), cuando no se utiliza el esquema de balanceo activo (20). También, se pueden apreciar algunas irregularidades en la respuesta del par de control cuando el rotor pasa a través de sus velocidades críticas. Las ganancias del controlador de velocidad fueron seleccionadas para que la dinámica en lazo cerrado del error de seguimiento e_ω tenga un polinomio Hurwitz de la forma

$$p_\omega(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

con $\omega_n = 15 \text{ rad/s}$ y $\zeta = 0,7071$.

La Figura 6 describe el desempeño razonablemente rápido y eficiente del esquema de balanceo activo (20), el cual aplica una prealimentación (compensación) de las señales de perturbación estimadas, $\widehat{\xi}_x$ y $\widehat{\xi}_y$, utilizando los observadores de estados (16). Se puede apreciar la rápida estimación de las señales (cerca de 0,1s) y la supresión en forma activa del desbalance del

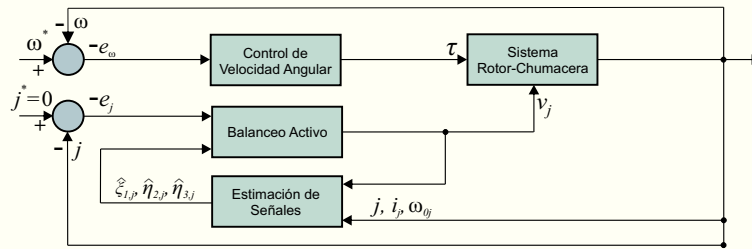
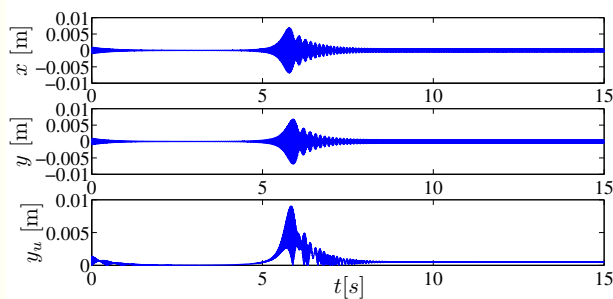
Figura 3: Arquitectura del esquema de balanceo activo, donde $j = x, y$.

Figura 4: Respuesta al desbalance del sistema rotor-chumacera sin balanceo activo.

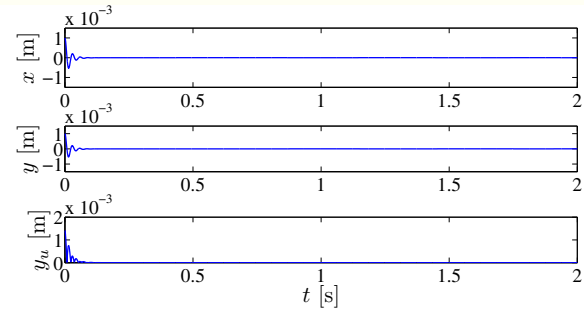


Figura 6: Respuesta del balanceo activo del sistema rotor-chumacera.

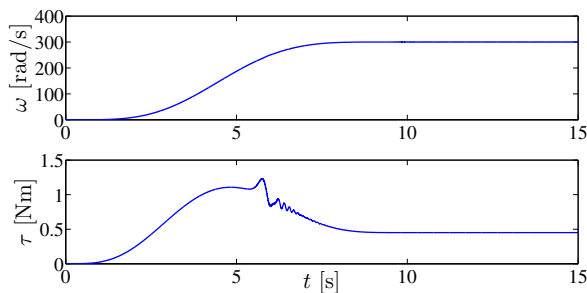


Figura 5: Control suave de la velocidad del rotor sin balanceo activo.

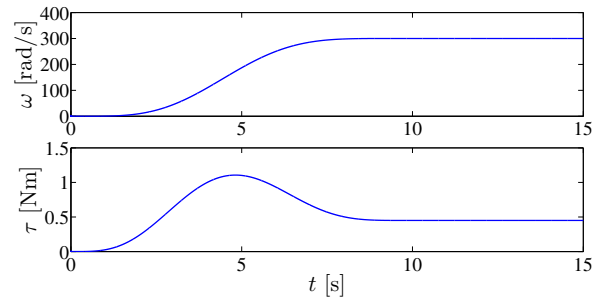


Figura 7: Control suave de velocidad del rotor con el esquema de balanceo activo.

sistema rotor-chumacera. Después de que se alcanza la estimación de las perturbaciones, el esquema de control del desbalance reduce favorablemente la respuesta desde un valor inicial de $y_u = 1,4 \times 10^{-3} \text{ m}$ hasta cancelar completamente el desbalance total, en contraste con la respuesta obtenida sin la suspensión activa, especialmente cuando se pasa por las velocidades críticas (ver la Figura 4). En este caso los voltajes de control a los actuadores electromecánicos (20) se aplican a partir de $t \geq 0,5 \text{ s}$, empleando las señales de perturbación, velocidad y aceleración estimadas.

La Figura 7 expone nuevamente el desempeño robusto del controlador de velocidad (12), cuando el esquema de balanceo activo (20) se ejecuta de manera simultánea. En este caso se exhibe una respuesta suave del torque de control cuando la velocidad del rotor cruza por sus frecuencias resonantes.

Las Figuras 8 y 9 muestran las señales eléctricas de los vol-

tajes de control y de las corrientes de ambos actuadores electromecánicos lineales, utilizados para compensar activamente las fuerzas de desbalance inducidas por la excentricidad del rotor en las direcciones x y y . Note que las magnitudes de estas señales son relativamente pequeñas, en comparación con otro tipo de dispositivos de balanceo como las chumaceras electromagnéticas. Así, la aplicación de la chumacera activa propuesta representa una buena alternativa para la solución a los problemas de balanceo en línea y robusto en maquinaria rotatoria.

Las ganancias de ambos controladores de desbalance fueron seleccionadas para que las dinámicas en lazo cerrado de los desplazamientos laterales (posiciones) del centro del rotor tengan polinomios característicos *Hurwitz* de la forma

$$p_c(s) = (s + p_1)(s^2 + 2\zeta_c\omega_{nc} + \omega_{nc}^2)$$

con $p_1 = 15 \text{ rad/s}$, $\omega_{nc} = 15 \text{ rad/s}$ y $\zeta_c = 0,7071$.

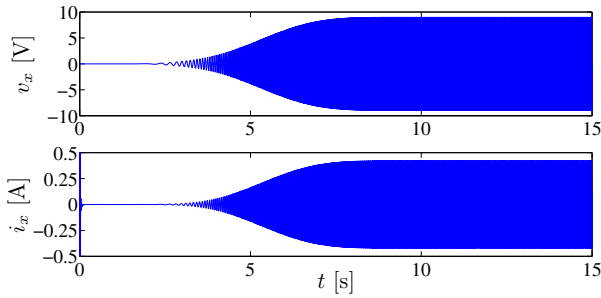


Figura 8: Señales de voltaje y corriente para el control activo en la dirección x.

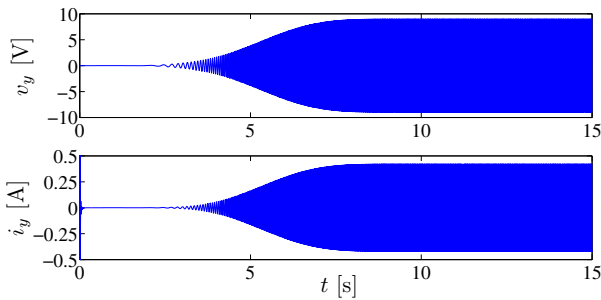


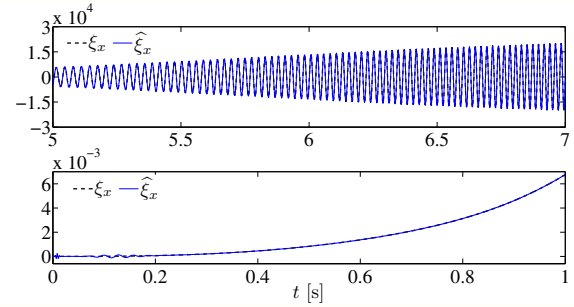
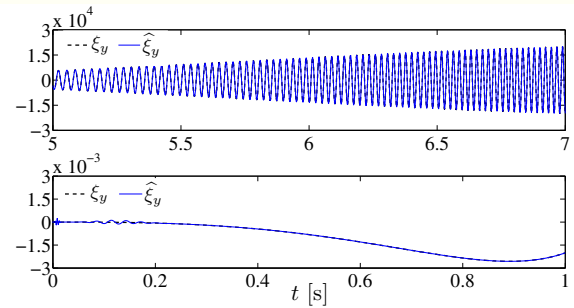
Figura 9: Señales de voltaje y corriente para el control activo en la dirección y.

Las Figuras 10 y 11 muestran detalles de la estimación efectiva de las señales de perturbación ξ_x y ξ_y usando los observadores (16), en donde $\hat{\xi}_x$ y $\hat{\xi}_y$ representan los estimados de tales señales. La dinámica deseada para el error de observación se especifica de tal forma que ésta sea más rápida que la dinámica de las señales de perturbación. Así, el polinomio característico asignado para la dinámica del error de observación es de la forma

$$p_o(s) = (s^2 + 2\zeta_o\omega_o s + \omega_o^2)^4$$

con $\omega_o = 2000$ rad/s y $\zeta_o = 0,7071$. De esta manera, los observadores de estado son capaces de estimar señales con armónicos de hasta $318,3$ Hz = $19098,5$ rpm, es decir, son 6,7 veces más rápidos que la dinámica más rápida asociada al sistema rotor-chumacera. Observe como las amplitudes de las perturbaciones armónicas $\hat{\xi}_x$ y $\hat{\xi}_y$ se incrementan a medida que se incrementa la velocidad del rotor, debido a que incluyen los efectos de las fuerzas centrífugas por desbalance.

Finalmente, para la medición de los desplazamientos (posiciones) laterales del rotor (x, y) se recomienda el uso de sensores de posición de no contacto (*proximitors*), colocados cerca de la flecha y del disco con desbalance. Las corrientes y velocidades en los actuadores electromecánicos se pueden medir directamente en cada motor de cd y con un decodificador óptico incremental de 2048 Pulsos/rev integrado a los actuadores lineales, que proporcionan movimientos con una resolución efectiva de hasta $0,05 \mu\text{m}$. Comúnmente, los sensores de posición (*proximitors*) que se emplean en un sistema rotor-chumacera son sensores con un ancho de banda muy amplio (los *proximitors* de Bently Nevada tipo 3300XL responden hasta 10 KHz),

Figura 10: Estimación de la señal de perturbación $\hat{\xi}_x$.Figura 11: Estimación de la señal de perturbación $\hat{\xi}_y$.

por lo que soportan muy bien muestreos de 1 KHz (tiempos de muestreo de 1 ms) con un sistema de adquisición de datos convencional. En particular, el sistema rotor-chumacera que se considera en este artículo opera a velocidades angulares hasta los 300 rad/s (47.75 Hz) y la sintonización de los controladores fijan dinámicas en lazo cerrado con frecuencias naturales de 15 rad/s (2.39 Hz).

Observación 7.1. Se hace destacar que para altas velocidades de operación del equipo, el desempeño del balanceo activo propuesto podría verse disminuido. Esto obedece a que el esquema de control es diseñado utilizando un modelo matemático simplificado, el cual solamente considera las primeras velocidades críticas, ω_{crx} y ω_{cry} . Sin embargo, la metodología de diseño de control presentada se puede extender para rotores flexibles usando modelos matemáticos de mayor orden, como aquellos que se obtienen mediante el método de elemento finito.

8. Conclusiones

En este trabajo se propone un esquema de balanceo activo para rotores tipo Jeffcott operando con velocidad variable, utilizando una suspensión activa basada en actuadores electromecánicos lineales para la aplicación de fuerzas de control activo que contrarresten las fuerzas dinámicas provocadas por el desbalance inherente en el rotor. Puesto que el controlador del desbalance requiere información de las señales de perturbación generadas por la excentricidad del rotor y de la velocidad y aceleración de las vibraciones, se propone también un esquema de

estimación en línea de estas señales, el cual únicamente requiere de la medición de las coordenadas de la posición del centro del disco. El esquema incluye un controlador de la velocidad del rotor para considerar el problema de seguimiento (arranque/paro) suave de trayectorias de referencia. El desempeño del esquema de control activo de vibraciones, la rápida estimación de las señales y el control de velocidad angular fueron verificados mediante simulaciones numéricas, cuando el rotor se lleva desde el reposo a una velocidad de operación por arriba de sus velocidades críticas. Los resultados muestran la supresión de las vibraciones de amplitud y frecuencia variables en el sistema rotor-chumacera, incluyendo vibraciones resonantes, la robustez del controlador de velocidad, la efectividad del esquema de estimación y el bajo consumo de energía con la suspensión activa, especificada en términos de sus señales eléctricas de voltaje y corriente. La metodología descrita se puede aplicar también para fines de monitoreo y diagnóstico en línea de fallas que ocurren frecuentemente en maquinaria rotatoria. Uno de nuestros estudios futuros abordará el problema de balanceo activo de un sistema mecánico rotatorio flexible usando un modelo matemático obtenido por el método de elemento finito y considerando un amplio espectro de frecuencias de operación. La implementación experimental del esquema de balanceo en línea también es contemplada, con el propósito de validar la viabilidad de su aplicación en sistemas rotor-chumacera prácticos.

English Summary

Active Vibration Control in a Jeffcott-like Rotor with Variable Speed Using an Electromechanical Suspension

Abstract

An active balancing scheme for a variable rotor speed Jeffcott-like rotor, using a suspension with linear electromechanical actuators, is presented. In addition, an estimation scheme for the perturbation signals induced by the inherent eccentricity on the rotating mechanical system, and a control law synthesized for simultaneous tracking tasks on the rotor speed are proposed. Some simulation results show the fast and efficient performance of the active vibration control scheme for good suppression of variable amplitude and frequency harmonic vibrations associated to the unbalance, as well as an effective estimation of the perturbation signals and robustness of the rotor speed controller. The proposed methodology can be applied for on-line monitoring and fault detection quite common in rotating machinery.

Keywords:

Active vibration control, Jeffcott-like rotor, Disturbance rejection.

Referencias

Arias-Montiel, M., Silva-Navarro, G., 2010. Active unbalance control in a two disks rotor system using lateral force actuators. Proceeding of 7th IEEE In-

- ternational Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, Tuxtla Gutierrez, México, 440-445.
- Arias-Montiel, M., Silva-Navarro, G., 2010. Finite element modelling and unbalance compensation for an asymmetrical rotor-bearing system with two disks. In: *New Trends in Electrical Engineering, Automatic Control, Computing and Communication Sciences*, Edited by C.A. Coello-Coello, A. Pozniak, J.A. Moreno-Cadenas and V. Azhmyakov, Logos Verlag Berlin GmbH, Germany, 127-141.
- Arredondo, I., Jugo, J., Alonso-Quesada, S., Lizárraga, I., Etxebarria, V., 2008. Modelización, análisis y control de sistemas de cojinetes magnéticos activos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 5(4), 17-27.
- Blanco-Ortega, A., Beltrán-Carbajal, F., Silva-Navarro, G., Méndez-Azúa, H., 2010. Control de vibraciones en maquinaria rotatoria. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 7(4), 36-43.
- De Queiroz, M. S., 2009. An active identification method of rotor unbalance parameters. *Journal of Sound and Vibration* 15, 1365-1374.
- De Silva, C. W., 2007. *Vibration damping, control and design*. CRC Press, USA.
- Fliess, M., Márquez, R., Delaleau, E., Sira-Ramírez, H., 2002. *Correcteurs Proportionnels-Intégraux Généralisés*. ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations 7, 23-41.
- Jung-Ho, P., Young-Bog, H., So-Nam, Y., Hu-Seung, L., 2010. Development of a hybrid bearing using permanent magnets and piezoelectric actuators. *Journal of Korean Physical Society* 57(4), 907-912.
- Kejian, J., Changsheng, Z., Ming, T., 2012. A uniform control method for imbalance compensation and automation balancing in active magnetic bearing-rotor systems. *Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control* 134, 021006-1 - 021006-13.
- Knospe, C. R., Hope, R. W., Fedigan, S. J., Williams, R., 1995. Experiments in the control of unbalance response using magnetic bearings. *Mechatronics* 5(4), 385-400.
- Lee, C. W., 1993. *Vibration analysis of rotors*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Mahfoud, J., Der Hagopian, J., Levecque, N., Steffen Jr., V., 2009. Experimental model to control and monitor rotating machines. *Mechanism and Machine Theory* 44, 761-771.
- Pi-Cheng, T., Mong-Tao, T., Kuan-Yu, C., Yi-Hua, F., Fu-Chu, C., 2011. Design of model-based unbalance compensator with fuzzy gain tuning mechanism for an active magnetic bearing system. *Expert Systems with Applications* 38(10), 12861-12868.
- Schweitzer, G., 2002. Active Magnetic Bearings - chances and limitations. *Proceeding of 6th Internat. IFTOMM Conf. on Rotor Dynamics*, Sydney, Australia.
- Schweitzer, G., Maslen, E. H. (Eds), 2010. *Magnetic bearings - theory, design and application to rotating machinery*. Springer, Germany.
- Simoes, R. C., Steffen Jr., V., Der Hagopian, J., Mahfoud, J., 2007. Modal active vibration control of a rotor using piezoelectric stack actuators. *Journal of Vibration and Control* 13(1), 45-64.
- Sira-Ramírez, H., Silva-Navarro, G., Beltrán-Carbajal, F., 2007. On the GPI Balancing Control of an Uncertain Jeffcott Rotor Model. *Proceeding of 4th International Conference on Electrical and Electronics Engineering*, Mexico City, Mexico, 306-309.
- Sira-Ramírez, H., Beltrán-Carbajal, F., Blanco-Ortega, A., 2008a. A Generalized Proportional Integral Output Feedback Controller for the Robust Perturbation Rejection in a Mechanical System. *Sciences et Technologies de l'Automatique (e-STA)* 5(4), 24-32.
- Sira-Ramírez, H., Feliu-Batlle, V., Beltrán-Carbajal, F., Blanco-Ortega, A., 2008b. Sigma-Delta Modulation Sliding Mode Observers for Linear Systems Subject to Locally Unstable Inputs. *Proceeding of 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Ajaccio, France, 344-349.
- Sivrioglu, S., Nonami, K., 1998. Sliding mode control with time-varying hyperplane for AMB systems. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 3(1), 51-59.
- Vance, J., Zeidan, F., Murphy, B., 2010. *Machinery vibration and rotordynamics*. John Wiley and Sons, USA.
- Yang, T., Lin, C., 2002. Estimation of distributed unbalance of rotors. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 124, 976-983.
- Zhou, S., Shi, J., 2001. Active balancing and vibration control of rotating machinery: A survey. *The Shock and Vibration Digest* 33(4), 361-371.