

Diseño Económico-Estadístico de Cartas con Parámetros Variables Totalmente Adaptativas en Presencia de Datos Autocorrelacionados

Rita Peñabaena Niebles*, Oscar Oviedo-Trespalcacios, Katherine Ramírez, Melissa Morón

Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad del Norte, Km 5 Vía Puerto Colombia, Barranquilla, Colombia

Resumen

Como consecuencia de la automatización industrial, la recolección de datos en los procesos productivos puede realizarse de una forma más fácil y rápida, lo cual permite contar con mayor cantidad de información para realizar el análisis. Debido a que los procesos productivos están dirigidos en parte por elementos dinámicos, al reunir los datos a una tasa mayor, las observaciones serán autocorrelacionadas. La omisión de este supuesto hace que las herramientas tradicionales para la monitorización de procesos registren un incremento de las falsas alarmas y de los costos de calidad. Para dar solución a esta problemática, se propone el diseño económico-estadístico de una carta de control con parámetros variables o “totalmente adaptativas”. Los resultados encontrados demuestran la efectividad de esta propuesta para el monitoreo estadístico en procesos de producción. Los enfoques de cartas de control totalmente adaptativas han sido pocos evaluados en escenarios donde los datos presentan altos niveles de autocorrelación y se proponen como una herramienta importante para el control de procesos. Copyright © 2014 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

Palabras Clave:

Análisis Estadístico, Auto-correlación, Control Adaptativo, Diseño Económico, Modelos Autorregresivos.

1. Introducción

Las cartas de control \bar{x} son una de las herramientas de control estadístico de procesos utilizadas para la mejora de la calidad y la productividad de las compañías. En el diseño de una carta \bar{x} para monitorear cambios o corrimientos de la media de un proceso, deben seleccionarse tres parámetros: tamaño de muestra (n), intervalo de muestreo (h) y coeficiente del límite de control (k). En este contexto, la carta \bar{x} tradicional ha demostrado tener inconvenientes al detectar cambios pequeños y moderados en la media del proceso (Apley & Cheol Lee, 2003; A. F. Costa & Rahim, 2001; De Magalhães, B Costa, & Moura Neto, 2006), por tal razón, se ha recurrido a una modificación del diseño de dicha carta de control, utilizando diferentes enfoques, como por ejemplo, la variación de todos los parámetros de la carta aumentado o disminuyendo el rigor de la búsqueda en función del valor de la última muestra tomada (Peñabaena Niebles et al., 2013). Este enfoque recibe el nombre de cartas de control con parámetros variables (VP) o cartas de control “totalmente adaptativas”.

Otra de las desventajas de los gráficos \bar{x} es que trabajan bajo el supuesto de independencia en los datos, sin tener en cuenta que, en muchos procesos de producción los datos están auto-

correlacionados. Así, la utilización de dichos gráficos para procesos con datos dinámicos, arroja falsos resultados sobre el estado del proceso. En los últimos años, autores como Apley (2002), Atienza et al. (2002), Winkel y Zhang (2004), Brence y Mastrangelo (2006), Noorossana y Vaghefi (2006), Sheu y Lu (2009) entre otros, han realizado investigaciones en torno al efecto que tiene la auto-correlación de los datos en cartas de control totalmente adaptativas, las cuales han permitido mejorar el control de calidad de los procesos. Investigadores como Lin (2009) y Costa y Machado (2011), han abordado esta temática, diseñando modelos que demuestran la superioridad estadística de estas cartas frente a otros métodos tradicionales implementados para el manejo de la auto-correlación de datos. Sin embargo, es poco lo que se ha avanzado en este tema desde el punto de vista del diseño económico de la carta de control.

El propósito de este artículo es diseñar un modelo económico-estadístico de una carta de control totalmente adaptativa, para la monitorización de la media de un proceso en presencia de autocorrelación; capaz de lograr un seguimiento más eficiente y la disminución de los costos asociados a la monitorización. Para ello se tomará como base la investigación realizada por Y.-K. Chen, Hsieh, and Chang (2007) que presenta un diseño económico para carta VSSI (Variable Sampling Size and Sampling Interval) para

* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: rpena@uninorte.edu.co (R. Peñabaena Niebles),
URL: <http://goo.gl/BQBw4> (Rita Peñabaena Niebles)

datos auto-correlacionados, que aborda los conceptos de tamaño de muestra e intervalo de muestreo variables. En este artículo se adicionará la característica de límites de control variables, transformando el diseño para una carta totalmente adaptativa o carta VP. Dado que el enfoque principal de esta investigación es posibilitar el diseño de una carta para datos autocorrelacionados, se incorpora adicionalmente el modelo propuesto por Lin (2009), en donde se analizan las propiedades de las cartas de control totalmente adaptativas cuando existe autocorrelación en el proceso con un esquema de series de tiempo autorregresivo de primer orden AR(1). La importancia de esta investigación es que presenta una propuesta para una carta de control VP, no solo desde el punto de vista económico, sino que incorpora el componente estadístico, buscando un equilibrio entre los costos de calidad del proceso y la potencia estadística de la carta de control VP.

2. Diseño Económico-Estadístico de Cartas de Control

El diseño de cartas de control es una herramienta que permite determinar los parámetros óptimos para minimizar el costo esperado por unidad de cierto proceso, dado un nivel de desempeño deseado.

En el diseño estadístico de cartas de control se ha recurrido a variar los parámetros de la misma en función del valor de la última muestra para mejorar su desempeño, en este enfoque conocido como cartas de control adaptativas, el tamaño de muestra (n), el intervalo de muestreo (h) y el coeficiente del límite de control (k) varían entre dos valores uno relajando y otro estricto. Donde n_1 , h_1 , k_1 corresponden al escenario relajado y n_2 , h_2 , k_2 corresponden al escenario estricto, cumpliendo con las siguientes condiciones: $k_1 > k_0 > k_2$; $n_1 < n_0 < n_2$; $h_1 < h_0 < h_2$. También, se define un coeficiente de los límites de advertencia (w) como una fracción de k .

La manipulación de estos parámetros, permitió el surgimiento de modelos de cartas que a través de una serie de combinaciones, permiten minimizar los costos de un diseño económico. Estas cartas adaptativas se clasifican con base en los parámetros que se modifican, estas son:

VSI (Variable Sampling Interval): estas cartas varían el intervalo en el que se toman las muestras, mientras más cerca esté el estadístico de los límites de control y todavía se encuentre en la región bajo control, mayor será el indicio de ocurrencia de una causa asignable, por ende, la siguiente muestra debe ser tomada con mayor prontitud, disminuyendo así el intervalo (Reynolds Jr & Arnold, 1989).

VSS (Variable Sampling Size): el tamaño de la muestra varía de una muestra a otra con base a lo obtenido en la muestra anterior, si el estadístico se encuentra cerca de los límites de control, el tamaño de la muestra siguiente debe ser mayor. Al comparar el desempeño de una carta VSS con una carta de control de tamaño de muestra fijo, en términos de la rapidez en la detección de cambios en la media del proceso, se obtiene que las primeras permiten detectar con mayor facilidad cambios pequeños en la media del proceso (Prabhu, Runger, & Keats, 1993).

VSSI (Variable Sampling Size and Sampling Interval): es una combinación de VSI y VSS (A. F. Costa, 1997).

Carta totalmente adaptativa ó VP (Variable Parameters): en ésta varían el tamaño de muestra, el intervalo de muestra y además los límites de control, siendo introducida por primera vez

por A. F. Costa (1999). Esta carta se caracteriza por detectar más rápidamente los desplazamientos de la media (Jensen, Bryce, & Reynolds, 2008).

Para evaluar el desempeño de las cartas de control se utiliza tradicionalmente el ARL (Average Run Length), que corresponde al valor esperado de la variable aleatoria que representa el número de muestras realizadas antes de que ocurra una señal. Sin embargo, cuando el intervalo de muestreo y el tamaño de muestra no son constantes, el tiempo y las observaciones antes de una señal de alerta no son múltiplos constantes del ARL; haciendo que su uso sea inapropiado para evaluar la efectividad de las cartas adaptativas (Lin, 2009). En este sentido, la propuesta de indicadores apropiados para valorar la actuación de la carta incluyen:

ANOS (Average number of observations to signal): número promedio de observaciones antes de obtener una señal. Se puede distinguir el ANOS bajo control y el ANOS fuera de control. El primero corresponde al número de observaciones individuales desde el comienzo del proceso hasta que la carta indica una falsa alarma. El ANOS fuera de control se define como el número de observaciones individuales desde la ocurrencia de una causa asignable, hasta que la carta arroja una señal de fuera de control (Lin, 2009). Esta medida de desempeño está relacionada con el costo asociado al muestreo, es por esto que es deseable que este valor sea lo más bajo posible sin sacrificar la eficiencia de la carta (Jensen et al., 2008).

ATS (Average Time to Signal): valor esperado de la variable aleatoria que representa el tiempo antes de una señal. Es el tiempo que debe transcurrir en promedio entre una señal de fuera de control y otra (Jensen et al., 2008).

AATS (Adjusted Average Time to Signal): valor promedio ajustado del tiempo desde que ocurre una causa asignable hasta que la carta indica una señal de fuera de control. Una carta con un AATS pequeño indica una mejor habilidad para detectar cambios en la media del proceso (Lin, 2009).

El diseño económico de las cartas se ha convertido en un tema de mucho interés para los investigadores, ya que ha demostrado que pueden lograrse reducciones significativas en los costos asociados al diseño e implementación de las cartas. Investigadores del tema han desarrollado modelos de costos que permiten optimizar los parámetros de las cartas, de tal forma que, si bien la carta entrega información acertada del estado del proceso, es importante que los costos para obtenerla sean óptimos para las compañías. El primero en realizar estudios en este ámbito fue Duncan (1956), quien realizó un diseño económico de la carta \bar{x} , considerando la acción de solo una causa asignable en el proceso. Autores como Chen y Chiou (2005), Chou, et al. (2006), Y.-K. Chen et al. (2007), Yu et al. (2007), Lee (2010), Celano et al. (2006) entre otros, han desarrollado diseños económicos de cartas de control para datos auto-correlacionados, los cuales se basan en modelos de costo desarrollados por Duncan (1956), Lorenzen y Vance (1986), Rahim y Banerjee (1993), Magalhaes y Costa (2002), entre otros.

Generalmente entre los costos considerados en la función se incluyen: costo de muestreo, costo de falsas alarmas, costos de inspección, costos asociados al estado fuera de control, costo de detección y eliminación de la causa asignable, entre otros. Para esto se diseña una función objetivo, que mediante diversas técnicas, algoritmos genéticos o métodos aproximados, establece cuáles son los valores ideales de tamaño de muestra, intervalo de muestreo, coeficiente de límites de control, entre otros

parámetros, dependiendo de qué tipo de carta se diseñará económicamente.

En los últimos 10 años, los investigadores han realizado sus modelos tomando como referencia principal la función de costos de Lorenzen y Vance (1986), seguido por el modelo de Duncan (1956) y Banerjee y Rahim (1988) en igualdad de condiciones. Para todos los casos se han obtenido resultados muy satisfactorios en cuanto a los costos asociados a los diseños económicos de cartas para datos autocorrelacionados. Dichos resultados son favorables para la industria, ya que el desarrollo de sus investigaciones no solo tiene un impacto de carácter académico, sino además un impacto positivo en la competitividad de las organizaciones, ya que otorgan herramientas para mejorar la calidad de los procesos y por ende, reducen los costos.

3. Metodología

Esta sección presenta el método de investigación utilizado para desarrollar el diseño de un modelo económico y estadístico de cartas de control VP, susceptible de ser aplicado a procesos que presentan autocorrelación en los datos. La metodología propuesta contempla: 1. El diseño de la carta de control VP, 2. El desarrollo del modelo de diseño económico que permite evaluar el desempeño de la carta VP mediante el AATS y la función de costo propuesta, 3. El análisis de sensibilidad que busca establecer los parámetros de la carta, para luego implementar los datos obtenidos en la serie de tiempo AR(1) y 4. El monitoreo de la media del proceso mediante la carta de control propuesta.

3.1. Diseño de la Carta de Control VP

Para el análisis, el ciclo de producción se divide en cuatro intervalos de tiempo, el primero corresponde al periodo en que el proceso está bajo control (T_1), el segundo es el periodo fuera de control (T_2), le sigue el periodo de investigación y búsqueda debido a una falsa alarma (T_3), y por último, el tiempo de identificación y corrección de la causa asignable de variación (T_4).

El tiempo del periodo bajo control (T_1), inicia con el ciclo de producción y termina cuando se presenta un corrimiento de la media. La ocurrencia de un corrimiento de la media sigue una distribución exponencial, así el periodo de tiempo esperado durante el cual el proceso está bajo control es $1/\lambda$.

El tiempo del periodo fuera de control (T_2) corresponde al tiempo que tarda la carta en producir una señal después de ocurrido un corrimiento, también es conocido como la medida de desempeño AATS y se calcula $AATS = M - (1/\lambda)$, siendo M el tiempo promedio desde el inicio del ciclo hasta la primera señal después de un corrimiento. Para calcular el valor de M se emplea un enfoque de cadena de Markov usado por Y.-K. Chen et al. (2007), que plantea los estados que pueden presentarse durante la monitorización del proceso, definidos en la Tabla 1.

Tabla 1: Estados de Markov del modelo

Estados	\bar{x}_{i-1}	I_{esimo} tiempo de muestreo
1	Región central	Bajo control
2	Región de advertencia	Bajo control
3	Región central	Fuera de control
4	Región de advertencia	Fuera de control
5	Alarma verdadera / Estado absorbente	

Con base en los estados de Markov establecidos se construye la matriz de transición (P):

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & 0 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} & P_{34} & P_{35} \\ 0 & 0 & P_{43} & P_{44} & P_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

En donde i = Estado anterior y j = Estado Actual.

A pesar de que los estados de la matriz de transición permanecen iguales a los propuestos por Y.-K. Chen et al. (2007), las probabilidades de transición cambian, debido a que la posibilidad de que la observación del periodo anterior caiga en determinada región y su posición actual, está relacionada con los parámetros de muestreo. Dado que la metodología propuesta en este artículo trabaja con límites de control variable, el valor del parámetro k será diferente para cada periodo.

Cada una de las probabilidades de transición se determina de la siguiente forma:

$$P_{11} = \Pr\left\{ \left| z \right| < \frac{w}{\sqrt{1+(n_1-1)\rho}} \mid \left| z \right| < \frac{k_1}{\sqrt{1+(n_1-1)\rho}}, Z \sim N(0,1) \right\} e^{-\lambda h_1}$$

$$= \left\{ 2\phi\left(\frac{w}{\sqrt{1+(n_1-1)\rho}}\right) - 1 \right\} / \left\{ 2\phi\left(\frac{k_1}{\sqrt{1+(n_1-1)\rho}}\right) - 1 \right\} e^{-\lambda h_1}$$

$$P_{12} = 2(a_1 - b_1)/(2a_1 - 1)e^{-\lambda h_2}$$

$$P_{13} = (2b_1 - 1)/(2a_1 - 1)(1 - e^{-\lambda h_1})$$

$$P_{14} = 2(a_1 - b_1)/(2a_1 - 1)(1 - e^{-\lambda h_2})$$

$$P_{21} = (2b_2 - 1)/(2a_2 - 1)e^{-\lambda h_2}$$

$$P_{22} = 2(a_2 - b_2)/(2a_2 - 1)e^{-\lambda h_2}$$

$$P_{23} = (2b_2 - 1)/(2a_2 - 1)(1 - e^{-\lambda h_2})$$

$$P_{24} = 2(a_2 - b_2)/(2a_2 - 1)(1 - e^{-\lambda h_2})$$

$$P_{33} = b'_1 - c'_1$$

$$P_{34} = (a'_1 - b'_1) + (c'_1 - d'_1)$$

$$P_{35} = 1 - a'_1 + d'_1$$

$$P_{43} = b'_1 - c'_1$$

$$P_{44} = (a'_2 - b'_2) + (c'_2 - d'_2)$$

$$P_{45} = 1 + a'_2 + d'_2$$

En donde $\Phi(\cdot)$ es la distribución acumulativa de una variable aleatoria normal estandarizada; σ es la desviación estándar; ρ es el coeficiente de correlación que corresponde a $\rho = \sum_{i,j} r_{ij} / n(n-1)$ conociendo que $R = r_{ij}, i, j = 1, \dots, n$ es la matriz de correlación. Con esta cadena de Markov absorbente se determina $M = r'(I - Q)^{-1}$, en donde $r'(I - Q)^{-1}$ es el número de transiciones en cada estado transitorio antes de una señal de alarma (Ross, 2006). Se conoce que $r' = (P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14})$, I es la

matriz idéntica, Q es la matriz de probabilidades sin el estado absorbente y $t = (h_1, h_2, h_1, h_2)$.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \Phi\left(\frac{k_1}{\sqrt{1+(n_1-1)\rho}}\right) \\
 a_2 &= \Phi\left(\frac{k_2}{\sqrt{1+(n_2-1)\rho}}\right) \\
 a'_1 &= \Phi\left(\frac{k_1 - \sqrt{n_1}\bar{\sigma}}{\sqrt{1+(n_1-1)\sigma}}\right) \\
 b_1 &= \Phi\left(\frac{w}{\sqrt{1+(n_1-1)\rho}}\right) \\
 b_2 &= \Phi\left(\frac{w}{\sqrt{1+(n_2-1)\rho}}\right) \\
 b'_1 &= \Phi\left(\frac{w - \sqrt{n_1}\bar{\sigma}}{\sqrt{1+(n_1-1)\sigma}}\right) \\
 c'_1 &= \Phi\left(\frac{-w - \sqrt{n_1}\bar{\sigma}}{\sqrt{1+(n_1-1)\sigma}}\right) \\
 a'_2 &= \Phi\left(\frac{k_2 - \sqrt{n_2}\bar{\sigma}}{\sqrt{1+(n_2-1)\sigma}}\right) \\
 c'_2 &= \Phi\left(\frac{-w - \sqrt{n_2}\bar{\sigma}}{\sqrt{1+(n_2-1)\sigma}}\right) \\
 d'_1 &= \Phi\left(\frac{-k_1 - \sqrt{n_1}\bar{\sigma}}{\sqrt{1+(n_1-1)\sigma}}\right) \\
 d'_2 &= \Phi\left(\frac{w - \sqrt{n_2}\bar{\sigma}}{\sqrt{1+(n_2-1)\sigma}}\right) \\
 d'_2 &= \Phi\left(\frac{-k_2 - \sqrt{n_2}\bar{\sigma}}{\sqrt{1+(n_2-1)\sigma}}\right)
 \end{aligned} \quad (2)$$

El tiempo del periodo de búsqueda de la falsa alarma (T_3), corresponde al tiempo en el que el proceso estando bajo control emite una señal de que hubo un corrimiento. Este periodo (T_3) es denotado por $t_0 E(FA)$ en donde t_0 es el tiempo promedio de búsqueda de la causa asignable. $E(FA)$ es el número esperado de falsas alarmas por ciclo que se determina $E(FA) = r'(I - Q)^{-1}f$, en donde la transpuesta es f' : Probabilidad de producir falsas alarmas y es determinada $f' = (\alpha_1, \alpha_2, 0, 0)$, en el que $\alpha_i = 2\left\{1 - \Phi\left(k/\sqrt{1+(n_i-1)\rho}\right)\right\}$ y $\Phi(\cdot)$ es la distribución acumulativa de una variable aleatoria normal estandarizada.

Finalmente y una vez detectado un corrimiento, inicia el (T_4) que corresponde al periodo de tiempo entre la detección de la causa asignable y su posterior corrección, es denotado también como t_1 . Este valor es conocido y está dado por el comportamiento del proceso.

3.2. Diseño Económico

Lo siguiente consiste en desarrollar el diseño económico de la carta, para lo cual es necesario establecer la función de costo a utilizar. La función de costo propuesta está compuesta por la longitud de un ciclo de producción $E(T)$, la ganancia esperada de ciclo de producción $E(C)$ y la función de costos de la pérdida esperada por hora $E(L)$.

$$E(T) = M + t_0 E(FA) + t_1 \quad (3)$$

Donde M es el tiempo promedio desde el inicio del ciclo hasta la primera señal después de un corrimiento, t_0 es el tiempo empleado para investigar las falsas alarmas, $E(FA)$ es el número esperado de falsas alarmas por ciclo y t_1 es el tiempo para identificar y corregir la causa asignable.

$$E(C) = V_0(1/\lambda) + V_1(M - 1/\lambda) - C_0 E(FA) - C_1 - sE(N) \quad (4)$$

Donde V_0 es la ganancia de una hora cuando el proceso opera bajo control, V_1 es la ganancia de una hora cuando el proceso opera fuera de control, V_0 es el costo de búsqueda si la señal es falsa, C_1 es el costo de descubrir la causa asignable y ajustar el proceso, s es el costo de cada medida de inspección y por último $E(N)$ es el $ANOS$ o número de observaciones promedio antes de la señal fuera de control se halla:

$$E(N) = r'(I - Q)^{-1}\eta \quad (5)$$

En donde $r'(I - Q)^{-1}$ es el número de transiciones en cada estado transitorio antes de una señal de alarma o de fuera de control y los tamaños de muestra empleados en el modelo definidos como $\eta' = (n_1, n_2, n_1, n_2)$.

Por último la función de costos de la pérdida esperada por hora es igual a:

$$E(L) = V_0 - E(C)/E(T) \quad (6)$$

3.3. Análisis de Sensibilidad

El análisis de sensibilidad consiste en el cambio de parámetros de un modelo para determinar cómo se comporta bajo distintas condiciones. En este caso se quiere establecer los parámetros que optimicen y hagan efectiva la carta de control, es decir, aquellos que logren minimizar la pérdida esperada por hora $E(L)$ y el AATS. Lo anterior con el objetivo de lograr un equilibrio entre el desempeño económico y estadístico de la carta.

Para realizar el análisis de sensibilidad se modifican los valores de los parámetros iniciales del modelo: el tamaño de muestra (n), intervalos de muestreo (h) y límites de control (k). Estas variaciones se harán gradualmente, comenzando con un solo parámetro, dos y finalmente los tres, para todas las combinaciones posibles, de tal forma que se puedan establecer comparaciones entre éstas, y así determinar los valores que resultan más efectivos para el diseño de la carta de control VP. Los cambios realizados a los parámetros se hicieron con base a lo desarrollado por Y.-K. Chen et al. (2007), a fin de permitir comparaciones de desempeño entre la carta VSSI y la carta VP propuesta. El método utilizado para el análisis de sensibilidad es ajustado siguiendo la metodología presentada por Lin (2009) y Sheu y Lu (2009) en sus estudios y que también autores como Prybutok et al. (1997) y Liu et al. (2003) usaron para obtener un mapa de desempeño completo en el dominio de operación de un proceso, permitiendo encontrar soluciones para diferentes escenarios y parámetros. Lo

Tabla 2: Análisis de sensibilidad de la carta VP para $\rho = 0.6$

Cambios en los parámetros	Parámetros						AATS	E(L) Pérdida por hora
	n_1	n_2	h_1	h_2	k_1	k_2		
Inicial	3	5	2.65	0.12	3.94	3	9.66	70.55
$k_0 > \Delta 0.6$	3	5	2.65	0.12	4.54	3.6	11.01	62.75
$k_0 < \Delta 0.6$	3	5	2.65	0.12	3.34	2.4	8.29	83.66
$k_1 < \Delta 0.6$	3	5	2.65	0.12	3.34	3	8.83	75.05
$k_1 > \Delta 0.6$	3	5	2.65	0.12	4.54	3	10.30	69.51
$k_2 < \Delta 0.6$	3	5	2.65	0.12	3.94	3.6	10.23	63.74
$k_2 > \Delta 0.6$	3	5	2.65	0.12	3.94	2.4	9.01	79.76
$n_0 > \Delta 1$	4	6	2.65	0.12	3.94	3	8.45	86.44
$n_0 < \Delta 1$	2	4	2.65	0.12	3.94	3	12.13	60.54
$n_1 < \Delta 1$	2	5	2.65	0.12	3.94	3	12.01	64.80
$n_1 > \Delta 1$	4	5	2.65	0.12	3.94	3	9.36	79.62
$n_2 < \Delta 1$	3	4	2.65	0.12	3.94	3	9.6	64.50*
$n_2 > \Delta 1$	3	6	2.65	0.12	3.94	3	9.71	76.44
$h_0 > \Delta 0.65$	3	5	3.3	0.77	3.94	3	29.86	92.29
$h_1 < \Delta 0.65$	3	5	2.00	0.12	3.94	3	9.36	78.72
$h_1 > \Delta 0.65$	3	5	3.3	0.12	3.94	3	10.41	66.31
$h_2 > \Delta 0.65$	3	5	2.65	0.77	3.94	3	33.8	101.34
$k_0 > \Delta 0.6 \wedge n_0 > \Delta 1$	4	6	2.65	0.12	4.54	3.6	10.54	73.88
$k_0 > \Delta 0.6 \wedge n_0 < \Delta 1$	2	4	2.65	0.12	4.54	3.6	15.35	60.52
$k_0 < \Delta 0.6 \wedge n_0 > \Delta 1$	4	6	2.65	0.12	3.34	2.4	8.14	102.79
$k_0 < \Delta 0.6 \wedge n_0 < \Delta 1$	2	4	2.65	0.12	3.34	2.4	9.79	66.37
$k_0 > \Delta 0.6 \wedge h_0 > \Delta 0.65$	3	5	3.3	0.77	4.54	3.6	33.86	90.09
$k_0 > \Delta 0.6 \wedge h_1 < \Delta 0.65$	3	5	2	0.12	4.54	3.6	10.57	67.86
$k_0 < \Delta 0.6 \wedge h_0 > \Delta 0.65$	3	5	3.3	0.77	3.34	2.4	24.94	97.48
$k_0 < \Delta 0.6 \wedge h_1 < \Delta 0.65$	3	5	2	0.12	3.34	2.4	8.00	95.65
$k_0 > \Delta 0.6 \wedge n_0 > \Delta 1 \wedge h_0 > \Delta 0.65$	4	6	3.3	0.77	4.54	3.6	37.55	102.37
$k_0 < \Delta 0.6 \wedge n_0 < \Delta 1 \wedge h_0 < \Delta 0.65$	2	4	2.00	0.12	3.34	2.4	8.72	72.17

anterior se realiza bajo la premisa que los procesos autocorrelacionados en la industria ocurren en ambientes donde el poder de maniobra es estrecho, a razón de la prevalencia de ensayos destructivos y/o costosos, lenta obtención y preparación de muestras y lotes de producción pequeños.

3.4. Manejo de la Auto-Correlación

Iniciando con el tratamiento de los datos, es conocido que la presencia de la auto-correlación en los datos del proceso puede presentar un efecto negativo sobre la capacidad de detección y las falsas alarmas. Para manejar este efecto, tal como lo muestra la investigación realizada por Lin (2009), se modela la media del proceso μ_i para una carta de control VP, que puede ser definida como una serie de tiempo AR(1), con un intervalo de muestreo $h > 0$ y un tamaño de muestra $n > 0$, de tal forma que se tenga en cuenta la auto-correlación que existe entre los datos de la siguiente forma:

$$\mu_i = (1 - \rho^n)\xi + \rho^n\mu_{i-1} + \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (7)$$

En donde ρ es el factor de correlación, ρ^n medida de correlación entre μ_{i-1} y μ_i , h intervalo de muestreo entre el tiempo t_{i-1} y t_i , ξ es el valor esperado de μ_i , α_i es el shock aleatorio distribuido normalmente con media cero y varianza σ_α^2 , μ_i es la media del proceso distribuida $N(\xi, \sigma_\mu^2 = \sigma_\alpha^2 / (1 - \rho^2))$ y finalmente X_i es cada observación con media ξ y varianza $\sigma_x^2 = \sigma_\mu^2 + \sigma_\epsilon^2$.

3.5. Monitorización Mediante Carta de Control Totalmente Adaptativa

Establecidos los valores del tamaño de muestra, intervalo de muestreo y límites de control que optimizan la carta VP, se procede a diseñar la carta de control para el monitoreo de la media con estos parámetros. En esta carta se introducirán los

datos del proceso y se analizará el comportamiento de ellos a medida en el tiempo, a fin de mejorar la capacidad de detención de inconformes y disminuir falsas alarmas.

4. Caso de Estudio

En esta sección se implementa la metodología propuesta en un proceso de producción industrial que fue adaptado del caso presentado por Y. K. Chen and Chiou (2005). Al aplicar la carta de control en este proceso, se pretende comprobar la efectividad de ésta tanto a nivel estadístico como económico y desarrollar una posterior optimización de la misma.

El proceso industrial corresponde a una empresa productora de gaseosa, con una cantidad de contenido promedio de 600 cc. En el proceso de producción, la gaseosa es inyectada en botellas previamente etiquetadas, y luego, cada 12 botellas es empacada en una caja. Por restricciones de calidad se realiza la inspección de las primeras cuatro botellas antes de ser empacadas. La desviación estándar del proceso de inyección es de 2 cc. De acuerdo con corridas previas, el corrimiento de la media sucede aleatoriamente con una frecuencia de cerca de una, cada cien horas de operación ($\lambda=0.01$). Como resultado, se emplea una carta de control \bar{x} para monitorear el proceso y detectar los corrimientos en la media. Recientemente, por petición del gerente de costos, se realiza un diseño económico de la carta de control \bar{x} . Basado en el análisis de operarios e ingenieros de calidad y el costo del equipo de muestreo, se determina que el costo de cada elemento inspeccionado es de \$5 ($s=5$). El tiempo empleado para investigar las falsas alarmas es de cinco horas ($t_0=5$), mientras que el tiempo empleado para identificar y corregir la causa asignable de variación es 10 horas ($t_f=10$). En promedio, cuando el proceso está fuera de control, la magnitud del corrimiento en el volumen es cercana a 8 cc. La ganancia por hora cuando el proceso está bajo control es de \$250 ($v_0=250$), pero no hay ganancia cuando el proceso está fuera de control ($v_f=0$). Si la causa asignable de variación no existe, el costo de búsqueda es de \$500 por el contrario, el costo promedio si es necesario descubrir la causa asignable y ajustar el proceso es de \$50 ($C_1=50$).

Las muestras (primeras cuatro botellas) de las primeras 100 cajas sucesivas, es tomada como una distribución multivariable con el vector de la media $\mu = (601.604\ 596.602)$ y matriz de covarianza:

$$V = \begin{pmatrix} 1.95 & 2.43 & 2.35 & 1.97 \\ 2.43 & 2.82 & 3.01 & 2.24 \\ 2.35 & 3.01 & 2.59 & 2.44 \\ 1.97 & 2.24 & 2.44 & 2.04 \end{pmatrix}$$

Así, el factor de correlación promedio es estimado como $\rho=+0.6$.

Para la implementación de la metodología se realizará el diseño económico de la carta de control VP para el proceso industrial, se evaluará su desempeño mediante el AATS y el costo, con base en la función de costos propuesta anteriormente. Así mismo se efectuará la simulación del proceso industrial a través de una serie de tiempo AR(1) siguiendo (7) con el fin de garantizar un mejor tratamiento de los datos, y luego se realizará el monitoreo de la media del proceso mediante la carta de control propuesta.

La carta de control VP que se va a diseñar para monitorear el proceso de producción mencionado, es una carta que debe ser

eficiente tanto estadística como económicamente, por tanto se evaluará por medio de la medida de desempeño AATS y del costo a partir de la pérdida esperada por hora. Con base en el proceso industrial, se tiene que $T_1=100$; Para hallar T_2 que corresponde al AATS, se establece la matriz de Transición (P) de la cadena de Markov del proceso de llenado utilizando (1) y (2).

$$P = \begin{pmatrix} 0.72 & 0.26 & 0.026 & 0.001 & 0 \\ 0.69 & 0.3 & 0.018 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.423 & 0.41 & 0.17 \\ 0 & 0 & 0.423 & 0.233 & 0.35 \end{pmatrix}$$

Los componentes para determinar M que se establecen a partir de P y son los siguientes:

$$r' = (0.72\ 0.26\ 0.03\ 0.0013)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$t = \begin{pmatrix} 2.65 \\ 0.12 \\ 2.65 \\ 0.12 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0.72 & 0.26 & 0.03 & 0.0013 \\ 0.69 & 0.3 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0.42 & 0.41 \\ 0 & 0 & 0.42 & 0.23 \end{pmatrix}$$

Entonces, el valor de M es 112.26 h. Empleando este término, el AATS = 12.26 h.

Para determinar el periodo de búsqueda de la causa asignable, se emplea f , en donde:

$$f = \begin{pmatrix} 0.008 \\ 0.104 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, el número promedio de falsas alarmas es $E(FA)=1.7725$.

El siguiente paso es desarrollar el diseño económico. Para determinar la pérdida por hora, es preciso establecer tanto la longitud del ciclo de producción ($E(T)$) empleando (3), como la ganancia esperada de ciclo de producción ($E(C)$) a partir de (4). Obteniendo que $E(T)=131.12$ y $E(C)=23031.78$. Finalmente empleando (6) la pérdida por hora es $E(L)=$74.34$.

Al analizar los resultados obtenidos con estos parámetros de la carta, es posible observar que en un ciclo de producción, el tiempo que transcurre desde que ocurre el corrimiento hasta que se detecta es de 12.26 horas y la ganancia esperada por ciclo de producción es de \$23031, es decir que por cada hora de producción se espera una ganancia de \$175.65.

Es importante destacar que si el proceso estuviese bajo control, la ganancia esperada sería de \$250 por hora, pero como en ciertas

etapas el proceso no se mantiene bajo control, se genera una pérdida de \$74.34 por hora. Si se analizan estos resultados en porcentaje es posible observar que del 100% que se podría ganar (\$250), la ganancia real es del 70% y la pérdida equivale al 30%. En conclusión, el AATS es significativo puesto que transcurre una cantidad de tiempo bastante alta antes de ser detectado el corrimiento de la media, lo cual indica que por un largo periodo de tiempo el proceso sigue trabajando fuera de control, lo que repercute negativamente en el proceso de llenado de gaseosas al arrojar botellas con un contenido fuera de lo establecido (600 cc), además de implicar una reducción en ganancias.

Luego de conocer los resultados estadísticos y económicos de la carta de control diseñada, es necesario desarrollar una metodología que permita mejorar su desempeño. Por lo cual se realiza un análisis de sensibilidad para determinar los parámetros que deben emplearse en la carta para lograr una mayor eficiencia. La tabla 2 muestra los resultados obtenidos con algunas de las posibles combinaciones de parámetros, en la primera columna se especifica el valor en que se incrementó o redujo cada parámetro, en la siguiente se indican los valores que tomaron cada uno de los diferentes parámetros con el respectivo cambio, y en las dos últimas columnas se muestran el AATS y la pérdida por hora $E(L)$. En la tabla 2 cuando se hace referencia a n_0 , h_0 y k_0 indica que el cambio se realiza simultáneamente en los casos relajado y estricto de los parámetros.

A continuación se establecen los parámetros que mejoran el desempeño de la carta de control, es decir, aquellos que logran minimizar la pérdida total y el AATS, de acuerdo con el análisis de sensibilidad. Los diferentes niveles utilizados para cada variable pueden observarse en la Tabla 2.

Al observar los resultados obtenidos en el AATS y en $E(L)$, para cada una de las posibles combinaciones, se pudo apreciar que el comportamiento de estas dos medidas es inversamente proporcional, esto se debe a que la fórmula del $E(L)$ tiene en cuenta el costo en el que se incurre al inspeccionar cada una de las muestras, al no detectarse a tiempo el corrimiento de la media, se realizan mayor número de muestras antes de una señal ($E(N)$) obteniéndose un AATS mayor, lo que se traduce en mayores costo de inspección y aumento de la pérdida por hora $E(L)$.

En general puede concluirse de esta etapa que la combinación de parámetros con los que la carta muestra un mejor desempeño es aquella en la que se incrementa el valor del tamaño de muestra inicial en una unidad. A pesar de que otras combinaciones presentan valores de AATS menores, la diferencia no es considerable estadísticamente, mientras que económicamente si lo es pues se aprecia una disminución grande en el valor de la pérdida por hora en comparación con aquellas que presentan un valor de AATS medio. Los valores para los que el modelo de cartas de control propuesto muestra un mejor desempeño y que se utilizará en el diseño para evaluar la efectividad de la carta se describen en la Tabla 2.

Para considerar la autocorrelación se implementa una serie de tiempo AR(1) empleando (7), ésta queda definida para el caso de estudio de la siguiente forma:

$$\mu_i = (1 - 0.6^{1.385})600 + 0.6^{1.385}\mu_{i-1} + \alpha_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (8)$$

Para evaluar el desempeño de la carta VP se procede a realizar el monitoreo de los datos generados empleando (8) y se introduce aleatoriamente un corrimiento de la media de 8 cc. La Figura 1 muestra la carta de control VP con los datos auto-correlacionados.

En la Figura 1 puede observarse que después del corrimiento ningún punto se ubicó fuera de los límites de control, por lo cual se definen unas políticas de detección que sirvan para determinar la existencia de una causa asignable en el proceso. Las políticas propuestas fueron: Intervenir el proceso cuando un punto caiga fuera de los límites de control, y/o cuatro de cinco puntos consecutivos dentro de los límites de advertencia, y/o diez o más puntos consecutivos se ubican a un mismo lado de la línea central. Utilizando estas reglas podemos definir para el caso de estudio, que la carta pudo detectar el cambio siete observaciones después de ocurrido.

Por último, se evaluaron los resultados obtenidos en el análisis de sensibilidad desde el punto de vista económico con lo desarrollado para el mismo caso por Y.-K. Chen et al. (2007) para la carta VSSI y la carta de control tradicional.

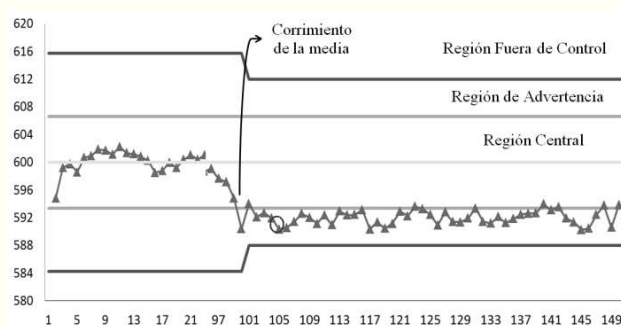


Figura 1: Carta de control VP con los datos auto-correlacionados.

En la Tabla 3 se puede observar que desde el punto de vista económico, la pérdida por hora obtenida usando la carta propuesta fue de 3.98% por encima de los costos obtenidos en la carta VSSI de Y.-K. Chen et al. (2007) y 4.61% por debajo de la carta de control \bar{x} tradicional. Lo anterior se explica debido a que el diseño para la carta VP propuesta busca un equilibrio entre el desempeño económico y estadístico, mientras que el estudio realizado por Y.-K. Chen et al. (2007) solo incluye el diseño económico.

Analizando estadísticamente el desempeño de la carta VP se observa que con las condiciones iniciales del proceso se obtiene un AATS 12.26 h. después del análisis de sensibilidad este se redujo a 9.6 h. Al aplicar las reglas de detección, se obtuvo un AATS de 0.85 h. considerablemente menor que los casos anteriores. Comparando los parámetros obtenidos en el diseño económico de la carta VSSI de Y.-K. Chen et al. (2007), el AATS fue de 10.6 h. es decir un 10% por encima de la carta VP.

5. Análisis de Resultados

Con el propósito de evaluar el funcionamiento de la carta cuando los datos presentan una baja o alta autocorrelación, se generaron escenarios en donde el proceso de llenado de gaseosa mantenía niveles de autocorrelación de 0.4 y 0.8 respectivamente, teniendo en cuenta que inicialmente el proceso presentaba un ρ de 0.6. Las medidas utilizadas para evaluar el desempeño de las mismas bajo las condiciones de correlación de datos definidas fueron el AATS y $E(L)$. Los resultados para los datos con cada uno de los niveles definidos se encuentran en la Tabla 4.

Tabla 3: Comparación del diseño económico de la carta \bar{x} , VSSI y VP

	Carta VP	Carta VSSI	Carta \bar{x}
n_1	3	3	2
n_2	4	5	-
h_1	2.65	2.65	1.2
h_2	0.12	0.12	-
w	1.66	1.66	0
k_1	3.94	3.94	3.11
k_2	3	-	-
E(L)	64.5	62.03	67.62
(%)	-	-3.98%	4.61%

Tabla 4: Desempeño de la carta VP con diferentes niveles de correlación de los datos

Coeficiente Correlación (ρ)	Parámetros de desempeño	
	AATS	E(L)
0.4	8.60	54.14
0.6	9.6	64.50
0.8	10.46	76.30

Al analizar los resultados presentados en la Tabla 4, la carta de control muestra un mejor desempeño para datos que presentan bajos niveles de autocorrelación, porque a medida que disminuye el coeficiente de correlación de los datos, disminuye el AATS y E(L), es decir, que mientras más bajo sea el nivel de correlación de los datos, la carta detectará mucho más rápido el corrimiento de la media y la pérdida por hora generada será menor. Por otra parte se tiene que aunque el desempeño de la carta disminuye a medida que aumenta la correlación, su aplicación es aceptable con altos niveles de autocorrelación.

6. Conclusión

Al proponer una carta de control con parámetros variables (VP) se presenta una nueva alternativa para monitorear procesos con datos auto-correlacionados, la cual presenta buenos niveles de desempeño tanto estadístico como económico.

La propuesta consistió en convertir una carta de control VSSI, en una carta totalmente adaptativa (VP) para evaluar la efectividad en el manejo de datos autocorrelacionados después de ser modelados según una serie de tiempo AR(1).

Para diseñar una carta óptima, eficiente tanto económica como estadísticamente, se desarrolló un análisis de sensibilidad para encontrar los parámetros que hicieran que la carta VP mostrara buenas medidas en su AATS y E(L).

Durante el monitoreo de los datos se observó que la carta no detecta inmediatamente corrimientos en la media, lo que hizo necesario la implementación de políticas de detección para identificar estados fuera de control, permitiendo de esta forma minimizar el AATS. Desde el punto de vista económico la carta presentó un 3.8% más de costos respecto a la carta VSSI propuesta por Y.-K. Chen et al. (2007), lo cual se considera un intercambio de costo aceptable a favor de un mejor desempeño estadístico. Adicionalmente se demostró que la carta VP presenta mejores medidas de desempeño cuando los datos presentan baja autocorrelación.

Finalmente se puede decir, que la carta VP diseñada para datos auto-correlacionados, es una buena alternativa tanto económica como estadísticamente para la monitorización de procesos con presencia de auto-correlación. Los autores sugieren realizar nuevos estudios orientados al diseño de políticas de detección que permitan que este tipo de cartas puedan detectar prontamente cambios en la media. También se sugiere implementar otras herramientas de optimización para la definición de parámetros óptimos de la carta y contrastar con otros esquemas de cartas de control.

English Summary

Statistical-Economic Design for Variable Parameters Control chart in the presence of autocorrelation

Abstract

The collection of data in the process can be done much faster and easier as a result of industrial automation allowing large amount of data for analysis. Because production processes are directed in part by inertial elements, if the data is collected at a higher rate, the observations will be auto-correlated. The violation of the data independence assumption causes an increasing in the false alarms rate and the quality costs of the traditional process monitoring tools. To mitigate this problem, we propose an economic-statistical design of a variable parameters control chart, also known as fully adaptive. The results show the effectiveness of this approach for the statistical monitoring of these processes. The “fully adaptive control charts” have been fairly evaluated in these scenarios, and are proposed as an important tool for the process monitoring under this circumstances.

Keywords:

Adaptive Control. Autocorrelation. Autoregressive Models. Economic Design. Statistical Analysis

Agradecimientos

Este artículo fue escrito en el marco del proyecto *Desarrollo de un Modelo de Cartas de Control para Procesos Altamente Correlacionados* No.121552128846, financiado por el Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación Colombiano. COLCIENCIAS (contrato 651-2011) y ejecutado por la Universidad del Norte.

Referencias

- Apley, D. W., & Cheol Lee, H. (2003). Design of exponentially weighted moving average control charts for autocorrelated processes with model uncertainty. *Technometrics*, 45(3), 187-198.
- Apley, D. W., & Tsung, F. (2002). The autoregressive T2 chart for monitoring univariate autocorrelated processes. *Journal of Quality Technology*, 34(1), 80-96.
- Atienza, O. O., Tang, L., & Ang, B. (2002). A CUSUM scheme for autocorrelated observations. *Journal of Quality Technology*, 34(2), 187-199.
- Banerjee, P. K., & Rahim, M. (1988). Economic Design of Control Charts Under Weibull Shock Models. *Technometrics*, 30(4), 407-414.

- Brence, J. R., & Mastrangelo, C. M. (2006). Parameter Selection for a Robust Tracking Signal. *Quality and Reliability Engineering International*, 22(4), 493-502.
- Celano, G., Costa, A., & Fichera, S. (2006). Statistical design of variable sample size and sampling interval\ bar Xcontrol charts with run rulescontrol charts with run rules. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 28(9-10), 966-977.
- Costa, A. F. (1997). X charts with variable sample size and sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 29(2), 197-204.
- Costa, A. F. (1999). X charts with variable parameters. *Journal of Quality Technology*, 31, 408-416.
- Costa, A. F., & Rahim, M. (2001). Economic design of X charts with variable parameters: the Markov chain approach. *Journal of Applied Statistics*, 28(7), 875-885.
- Costa, A. F. B., & Machado, M. A. G. (2011). Variable parameter and double sampling charts in the presence of correlation: The Markov chain approach. *International Journal of Production Economics*, 130(2), 224-229.
- Chen, Y.-K., Hsieh, K.-L., & Chang, C.-C. (2007). Economic design of the VSSI control charts for correlated data. *International journal of production economics*, 107(2), 528-539.
- Chen, Y. K., & Chiou, K. C. (2005). Optimal Design of VSI—X Control Charts for Monitoring Correlated Samples. *Quality and Reliability Engineering International*, 21(8), 757-768.
- Chou, C.-Y., Chen, C.-H., & Liu, H.-R. (2006). Economic design of EWMA charts with variable sampling intervals. *Quality and Quantity*, 40(6), 879-896.
- De Magalhães, M. S., B Costa, A. F., & Moura Neto, F. D. (2006). Adaptive control charts: A Markovian approach for processes subject to independent disturbances. *International journal of production economics*, 99(1), 236-246.
- De Magalhães, M. S., Costa, A. F., & Epprecht, E. K. (2002). Constrained optimization model for the design of an adaptive X chart. *International Journal of Production Research*, 40(13), 3199-3218.
- Duncan, A. J. (1956). The economic design of X charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, 51(274), 228-242.
- Jensen, W. A., Bryce, G. R., & Reynolds, M. R. (2008). Design issues for adaptive control charts. *Quality and reliability engineering international*, 24(4), 429-445.
- Lee, M. (2010). Economic design of cumulative sum control charts for monitoring a process with correlated samples. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 39(10), 1909-1922.
- Lin, Y.-C. (2009). The variable parameters control charts for monitoring autocorrelated processes. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 38(4), 729-749. doi: 10.1080/03610910802645339
- Liu, H.-R., Chou, C.-Y., & Chen, C.-H. (2003). The effect of correlation on the economic design of warning limit X-bar charts. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 22(3-4), 306-312.
- Lorenzen, T. J., & Vance, L. C. (1986). The economic design of control charts: a unified approach. *Technometrics*, 28(1), 3-10.
- Noorossana, R., & Vaghefi, S. (2006). Effect of autocorrelation on performance of the MCUSUM control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 22(2), 191-197.
- Peñabaena, R. P., Oviedo-Trespalacios, Ó., Vázquez Cabeza, J. G., & Fernández Cantillo, L. M. (2013). Diseño estadístico de cartas de control para datos autocorrelacionados. *Revista Científica Ingeniería y Desarrollo*, 31(2), 291-315.
- Prabhu, S., Runger, G., & Keats, J. (1993). X chart with adaptive sample sizes. *The International Journal Of Production Research*, 31(12), 2895-2909.
- Prybutok, V. R., Clayton, H. R., & Harvey, M. M. (1997). Comparison of fixed versus variable sampling interval shewhart control charts in the presence of positively autocorrelated data. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 26(1), 83-106. doi: 10.1080/03610919708813369
- Rahim, M., & Banerjee, P. (1993). A generalized model for the economic design of \bar{x} control charts for production systems with increasing failure rate and early replacement. *Naval Research Logistics (NRL)*, 40(6), 787-809.
- Reynolds Jr, M. R., & Arnold, J. C. (1989). Optimal one-sided Shewhart control charts with variable sampling intervals. *Sequential Analysis*, 8(1), 51-77.
- Ross, S. M. (2006). *Introduction to probability models*: Academic press.
- Sheu, S.-H., & Lu, S.-L. (2009). Monitoring the mean of autocorrelated observations with one generally weighted moving average control chart. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 79(12), 1393-1406.
- Winkel, P., & Zhang, N.-F. (2004). Serial correlation of quality control data-on the use of proper control charts. *Scandinavian journal of clinical & laboratory investigation*, 64(3), 195-204.
- Yu, F.-J., Rahim, M., & Chin, H. (2007). Economic design of VSI control charts. *International Journal of Production Research*, 45(23), 5639-5648.