



ScienceDirect

Disponible en [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



[www.elsevier.es/RIAI](http://www.elsevier.es/RIAI)

Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 11 (2014) 142–154

## Revisión de las Técnicas de Asignación de Autoestructuras: Aplicación en Sistemas Aeroespaciales

J. Crespo <sup>a,\*</sup>, J. Aranda <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Infraestructura, Sistemas Aeroespaciales y Aeropuertos, Universidad Politécnica de Madrid (UPM) Madrid

<sup>b</sup> Departamento de Automática, Ingeniería Electrónica e Informática, Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) Madrid

### Resumen

Las técnicas de asignación de autoestructuras (Eigenstructure Assignment – EA) han sido aplicadas con éxito al diseño de controladores en diferentes sectores industriales durante las últimas décadas. En este artículo se presentan los aspectos más interesantes del método general y de las técnicas de asignación comúnmente utilizadas. Los métodos de asignación son considerados como técnicas de control modal, por lo que en el diseño de controladores aplicado a cualquier sistema se infiere un análisis de los modos del mismo. Se incluye una revisión de las aplicaciones más interesantes sustentada por los trabajos realizados por numerosos autores. En particular, se introduce una aplicación concreta de los métodos de asignación de autoestructuras al sector aeroespacial. Copyright © 2014 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

### Palabras Clave:

Control aeroespacial, asignación de autoestructuras, desacople dinámico.

### 1. Introducción

Desde un punto de vista general, uno de los objetivos de diseño de los sistemas de control clásico es ajustar la ganancia de un controlador que permita que los autovalores del sistema en lazo cerrado se encuentren próximos a un conjunto de polos deseados. En sistemas MIMO además de los autovalores se ha de considerar a los autovectores. Los primeros determinan el tipo de respuesta del sistema y la estabilidad entre otras, mientras que los segundos caracterizan la respuesta del mismo. Con estas premisas, el problema de diseño del control se convierte en un problema de determinación de los autovalores y autovectores del sistema en lazo cerrado. La aplicación de técnicas de determinación de autovalores y autovectores del sistema da lugar a las denominadas técnicas de Asignación de Autoestructuras, conocidas en la literatura como Eigenstructure Assignment (EA).

Las técnicas de asignación de autoestructuras EA, denominadas técnicas de control modal, han recibido atención preferente por parte de investigadores durante los años 90. Estas técnicas tienen como objetivo situar los autovalores y los autovectores del sistema en lazo cerrado en posiciones deseadas del plano complejo. De forma más concreta, se permite al diseñador satisfacer los criterios de amortiguamiento, tiempo de asentamiento y desacople de los modos del sistema por medio de

una selección apropiada de la autoestructura del sistema en lazo cerrado.

El objetivo del presente trabajo es realizar una revisión de los métodos de asignación de autoestructuras, de la literatura relacionada con los aspectos matemáticos generales de los métodos y sobre todo presentar aquellas referencias técnicas relacionadas con aplicaciones aeroespaciales.

La estructura del artículo agrupa varias secciones. El capítulo 2 hace una revisión general del estado del arte de las técnicas de asignación de autoestructuras. En el capítulo 3 se presenta el fundamento matemático básico del diseño del controlador y los métodos de asignación de autoestructuras. Un proceso de diseño sugerido se presenta en el capítulo 4, complementando este con el capítulo 5, donde se introduce una aplicación práctica del método al control de actitud de un satélite.

### 2. Publicaciones sobre métodos de asignación de autoestructuras

Es difícil establecer el momento exacto en que la técnica atrajo el interés de los investigadores e ingenieros diseñadores de sistemas de control. Por ello, se van a mencionar aquellos trabajos relacionados con la técnica que han supuesto un avance determinante en el desarrollo de diferentes métodos. Referenciando estos cronológicamente, aparecen los trabajos de (Wonham, 1967) a finales de los años 60 y principios de los 70, bajo contrato de NASA. En este trabajo se presenta el resultado

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [javier.crespo@upm.es](mailto:javier.crespo@upm.es) (J. Crespo\*)  
[jaranda@dia.uned.es](mailto:jaranda@dia.uned.es) (J. Aranda)

fundamental para la resolución del problema de posicionamiento de sistemas lineales con entradas múltiples por medio de la realimentación de estados, prestando especial atención a la relocalización de los autovalores.

La técnica inicial trataba de asignar la autoestructura mediante realimentación de estados, dando lugar a trabajos adicionales como el de (Moore, 1976), en el que se pretendía deducir las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la realimentación más conveniente de las variables de estado, de forma que se obtengan los autovalores y autovectores en lazo cerrado especificados. Posteriormente estos trabajos tuvieron continuación con los de otros autores como (Porter *et al*, 1978), en el que se presentaba una técnica de asignación de autovectores en lazo cerrado para sistemas multivariados lineales en el tiempo con autovalores diferentes por medio de realimentación de estados.

En el trabajo de (Kimura *et al*, 1975) se aplican técnicas EA a sistemas que realimentan la salida. Se plantea, que el problema de asignación de polos como una técnica de control moderno que recoge criterios de control clásico.

Los trabajos de (Andry *et al*, 1983) se muestran como de los más interesantes en el espectro de actividades relacionadas con la técnica EA. Además de presentar una revisión de los trabajos realizados sobre la técnica, justifican el estudio del problema tomando como referencias de partida los trabajos anteriores. En este trabajo se solucionó la ecuación:  $[(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) + \mathbf{BKC}] \mathbf{v}_i = 0$ ; siendo  $\lambda_i$  los autovalores y  $\mathbf{v}_i$  los autovectores. Los métodos matemáticos utilizados para el cálculo de los vectores deseados incluían técnicas de proyección de autovectores. Se concluye que el autovector deseado tiene la forma  $\mathbf{v}_i = (0, 1, \dots, x)$ , donde un “0” representa una condición no deseada, un “1” representa una condición deseada y una “x” una condición con valor diferente a “0” o “1” (denominada condición indiferente). Con esta técnica se obtienen diferentes soluciones para la matriz de ganancia del controlador  $\mathbf{K}$  en función del tipo de realimentación. El estudio presentaba un algoritmo de aproximación para la obtención de los correspondientes autovectores. En este trabajo también se presentaba un sistema de control de aeronave como aplicación fundamental de la técnica.

Puede decirse que el objetivo principal de los investigadores desde el punto de vista matemático se ha centrado en la resolución del problema por diferentes técnicas. Entre estas se han utilizado técnicas de minimización, como la de (Mengali *et al*, 2003) en la que primeramente se fijan los componentes de los autovectores deseados y numéricamente se minimiza un índice cuadrático lineal, para alcanzar los autovalores deseados dentro de los límites especificados. Otras técnicas se basan en la descomposición en valores singulares (SVD), como el trabajo presentado por (Burrows *et al*, 1989), en el que además se comienzan a estudiar la robustez de la técnica por medio de la realimentación de estados.

Otros investigadores siguieron la línea de asignación simultánea y desarrollo de algoritmos de asignación. Este es el caso del trabajo de (Choi, 1998), presentando el caso de

asignación de autoestructuras derecha e izquierda de forma simultánea.

Una de las preocupaciones adicionales contempladas por los investigadores para el desarrollo de método de asignación, bien sea por realimentación de estados o de la salida es la robustez. Hay que considerar que los métodos de asignación EA no son métodos robustos en sí mismo, sino que es necesario establecer estrategias que permitan “robustificar” el proceso. En cierto modo los trabajos realizados por (Andry *et al*, 1983) aplicados al control de vuelo ya trataban aspectos relacionados con la robustez del método.

Los trabajos de (Patton *et al*, 1994) presentan directamente el problema del control robusto por asignación de autoestructuras, tomando como índices de robustez funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria.

Aplicando el método EA a un piloto automático genérico de cualquier aeronave, que tiene como requisito el desacoplamiento de los modos del sistema, (Wilson *et al*, 1992) trata el problema de la robustez del sistema después de la asignación de la autoestructura, concretamente aplicada a la estabilidad robusta.

En el trabajo de (Duan, 2002) se denomina a la técnica de asignación de autoestructuras ESA (Eigenstructure Assignment). Se propone la resolución de la autoestructura mediante la introducción de dos algoritmos, que permiten la repetición de los autovalores en lazo cerrado respecto de los de lazo abierto. Este mismo investigador vuelve a proponer la misma técnica en (Duan, 2003) aplicable a realimentación de la salida. Así mismo, en (Xue *et al*, 2005) se trata de nuevo la técnica del método de asignación EA, denominándola también ESA.

Es interesante resaltar que algunos investigadores han trabajado en el diseño y desarrollo de diferentes herramientas software. Cabe destacar en particular las herramientas utilizadas para entorno MATLAB desarrolladas por (Liu *et al*, 1998) y (Magni *et al*, 2002), aunque recientemente ha aparecido en el mercado una denominada ESCORT Software (Srinathkumar, 2011).

Focalizando la atención de las publicaciones especializadas al sector aeronáutico y espacial, se ha de mencionar que estas constituyen un sector objeto de interés para investigadores e ingenieros que desarrollan su actividad en el ámbito del control. Existen numerosas referencias a diferentes ámbitos del sector aeroespacial, que atienden a diferentes tipos de aeronaves, aviones, helicópteros, lanzadores, satélites y más recientemente los aviones no tripulados UAV (Unmanned Air Vehicle). A continuación se relacionan una serie de trabajos relacionados con la aplicación de estas técnicas al sector aeroespacial.

El trabajo de (Srinathkumar, 1978) aplicado al controlador lateral de una aeronave muestra como se aplica la técnica EA para un sistema que realimenta la salida. El trabajo de (Sobel *et al*, 1985), marca la pauta en el desarrollo de algoritmos para la asignación de la autoestructura aplicada también al desarrollo de sistemas de control de vuelo en el sector aeronáutico. Se propone el desacoplamiento de los modos dinámicos para encontrar la independencia existente entre los movimientos de la aeronave.

Continuando con el vuelo automático, aparece la aplicación a autopilotos de misiles. El trabajo desarrollado por (Wilson *et al.*, 1992) desarrolla un controlador realimentando la salida, que tiene como objetivo conseguir la mejor autoestructura alcanzable para mantener criterios de robustez. Se utilizan criterios de minimización entre autoestructuras reales y alcanzables por medio de la aplicación de la ecuación de Lyapunov.

Otro trabajo relacionado con los autopilotos aplicados a misiles es el de (Döll *et al.*, 2001), donde se diseña un controlador para este tipo de vehículos basado en asignación de autoestructuras multi-modelo. El trabajo incluye técnicas de análisis y síntesis  $\mu$ .

El trabajo de (Bong *et al.*, 2007) presenta la relación entre los métodos de diseño EA y el control de vuelo. En el trabajo se valora la estabilidad robusta frente a variaciones de los parámetros del sistema, en el que se trata la pretendida falta de robustez del método.

Dentro de esta perspectiva histórica es necesario mencionar los trabajos desarrollados para Garteur por (Faleiro *et al.*, 1997) aplicados al control de vuelo de aeronaves (RCAM), así como los desarrollados por (De la Cruz *et al.*, 1997) sobre el mismo tema.

En cuanto al sector espacial, y en concreto a lanzadores espaciales, se encuentra el trabajo de (Oliva *et al.*, 2002). Este compara la metodología EA con las técnicas de control óptimo. El objetivo es estudiar el desacoplamiento de los modos obtenidos mediante la aplicación de ambas técnicas. En aplicaciones a satélites flexibles, el trabajo de (Wang *et al.*, 2011) se centra en la robustez de este tipo de sistemas complejos.

Al igual que en (Duan, 2002) el de (Tsai *et al.*, 2004) también se refiere a estas técnicas como metodología ESA. Este último trabajo combina la metodología EA con los métodos LEQG/LTR, aplicados al control de actitud de un satélite. Se tratan los aspectos relacionados con la robustez del sistema minimizando las limitaciones de cada uno de los métodos tratados.

Enlazando el control de actitud de un vehículo con estructuras flexibles y con la técnica EA, se han desarrollado diversos trabajos. Cabe mencionar el trabajo de (Juang *et al.*, 1989), en el que se trata la asignación de autoestructura robusta, para lo que se utiliza descomposición QR. En el sentido de la flexibilidad del sistema y con aplicación a satélites se presentan los trabajos de (Aranda *et al.*, 2007), (Crespo *et al.*, 2009) y (Crespo *et al.*, 2011), que estudia el comportamiento de un satélite flexible con técnicas de asignación paramétricas.

Continuando con la elasticidad de vehículos, el trabajo de (Merkel *et al.*, 2004), presenta la metodología EA aplicada al control de elementos flexibles en el ámbito aeronáutico, y en el que se plantea un método de resolución para un sistema con incertidumbres en el modelo.

La técnica EA también se aplica al control lateral de velocidad de misil. Este trabajo se presenta en (Bruyère *et al.*, 2003). Respecto del control robusto, los trabajos desarrollados y publicados en la literatura técnica son diversos. Entre las aplicaciones y las técnicas encontramos el aplicado a lanzadores de vehículos, (Ganet *et al.*, 2003), al control de vuelo robusto

(Satoh *et al.*, 2003), o la combinación de técnicas EA y QFT (Wu *et al.*, 2004).

A pesar de que la técnica EA ha sido desarrollada ampliamente durante los años 90, siguen apareciendo referencias en la literatura reciente de diversas aplicaciones. El trabajo de (Nieto-Wire *et al.*, 2007) aplica la técnica al diseño de un sistema de control de vuelo para modelos de túnel aerodinámico de las denominadas aeronaves “tailless”. Esta aplicación fue de nuevo presentada en (Nieto-Wire *et al.*, 2009).

En cuanto a la aplicación en helicópteros encontramos el trabajo de (Garrad *et al.*, 1989). En este, el objetivo fue obtener un controlador para desacoplar todos los modos de este tipo de vehículos, además de diseñar un estimador de estados aplicando técnicas de asignación de autoestructuras.

Otras aplicaciones en helicópteros como la de (Clarke *et al.*, 2003) tratan de definir la autoestructura adaptada a especificaciones de tipo militar. El objetivo principal de este trabajo fue el de obtener una respuesta satisfactoria para el modo de periodo corto. Como continuación de este trabajo (Pomfret *et al.*, 2008) adopta la autoestructura, que denomina ideal del trabajo del 2003, a una aplicación muy concreta en un modelo de helicóptero denominado Lynx.

De nuevo el trabajo de (Pomfret *et al.*, 2009) presenta el método EA aplicado a un helicóptero de rotor simple, y aplicado al caso más complejo del mando de velocidad. El objetivo perseguido fue el de desacoplamiento de los modos basados en estándares de diseño militares.

El trabajo de (Srinathkumar, 2008) presenta la adaptación de la teoría y métodos de la asignación de autoestructuras a las cualidades de vuelo de helicópteros y al controlador latero-direccional de aeronaves.

Por último, un escenario novedoso en lo que a control de sistemas aeroespaciales se refiere se abre con los vehículos no tripulados (UAV y UAS). Estos vehículos desde su aparición, han sido progresivamente adaptados a diversas aplicaciones ofreciendo nuevos escenarios para los sistemas de control.

La aplicación a helicópteros no tripulados también ha aparecido en algunos trabajos como el de (Antequera *et al.*, 2006). En este se considera la aplicación de la técnica por realimentación de estados y se comparan los resultados con un controlador LQ diseñado para esta función.

Otras aplicaciones de los métodos de control basados en autoestructuras a otro tipo de aeronaves no tripuladas se presentan en las aplicaciones presentadas en (Thimmaraya *et al.*, 2010).

### 3. Fundamento matemático de los métodos de asignación de autoestructuras

El objetivo de diseño de los métodos de Asignación de Autoestructuras es diseñar un controlador  $K$ , bien por realimentación de la salida o por realimentación de estados, que garantice que la autoestructura del sistema en lazo cerrado se encuentre próxima a la requerida, denominándose autoestructura deseada.

El fundamento matemático de las técnicas de Asignación de Autoestructura procede de la consideración de un sistema dinámico lineal e invariable en el tiempo (1):

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= \mathbf{A}\vec{x} + \mathbf{B}\vec{u} \\ \vec{y} &= \mathbf{C}\vec{x} + \mathbf{D}\vec{u}\end{aligned}\quad (1)$$

Donde  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado del sistema,  $\vec{y} \in \mathbb{R}^p$  representa el vector de salida y  $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada. Los autovalores  $\lambda_i$  de la matriz de estado  $\mathbf{A}$  del sistema en lazo abierto se obtienen de la ecuación característica

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (2)$$

Dados los autovalores  $\lambda_i$ , se definen además los autovectores por la derecha  $\mathbf{v}_i$  y los autovectores por la izquierda  $\mathbf{w}_i$ . Estos autovectores satisfacen las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{v}_i &= \lambda_i \mathbf{v}_i \\ \mathbf{w}_i^T \mathbf{A} &= \lambda_i \mathbf{w}_i^T\end{aligned}\quad (3)$$

Definiéndose las matrices de autovectores por la derecha y por la izquierda respectivamente:

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \\ \mathbf{W}^T &= [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n]\end{aligned}\quad (4)$$

Si  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}^T$  son normalizadas se cumple la expresión:

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{W}^T \quad (5)$$

La solución en el dominio del tiempo de las ecuaciones dadas para el sistema (1) (Davidson, 1994) para los estados del sistema se representan por:

$$\vec{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (6)$$

Y para la salida del sistema la solución es:

$$\vec{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (7)$$

Así, la matriz dinámica del sistema  $\mathbf{A}$  puede estar representada por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}^{-1} \quad (8)$$

Siendo  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Considerando el desarrollo en serie de  $e^{\mathbf{A}t}$  siguiente:

$$\begin{aligned}e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots = \mathbf{I} + (\mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}^{-1}) t + \frac{(\mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}^{-1})^2 t^2}{2!} + \frac{(\mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}^{-1})^3 t^3}{3!} + \dots \\ &= \mathbf{V} \left[ \mathbf{I} + \Lambda t + \frac{\Lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\Lambda^3 t^3}{3!} + \dots \right] \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V} e^{\Lambda t} \mathbf{V}^{-1} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t} \mathbf{w}_i^T\end{aligned}\quad (9)$$

La solución para la ecuación de estado del sistema descrito por (6) presenta una dependencia de los autovectores  $\mathbf{v}_i$  y  $\mathbf{w}_i$  representada por:

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t} \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^T \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (10)$$

Y para la salida:

$$\vec{y}(t) = \mathbf{C} \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t} \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^T \int_0^t \mathbf{C} e^{\lambda_i(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (11)$$

Desde el punto de vista del sistema y de la aplicación del método EA interesa conocer la interacción entre los elementos que participan en las ecuaciones (10) y (11) con los autovalores y autovectores del sistema. Como puede observarse tanto entrada  $\vec{x}(t)$  como salida  $\vec{y}(t)$  dependen tanto de los autovalores  $\lambda_i$ , como de los autovectores por la derecha  $\mathbf{v}_i$ , como de los autovectores por la izquierda  $\mathbf{w}_i^T$ . Concretamente para la salida  $\vec{y}(t)$ , el primer término representa la solución homogénea de la ecuación diferencial que depende de las condiciones iniciales y el segundo término representa la solución forzada que depende de la entrada al sistema. El comportamiento dinámico de cualquier sistema depende de los siguientes factores:

- Los autovalores  $\lambda_i$  determinan la velocidad de crecimiento y decrecimiento de la respuesta. Los autovectores por la derecha  $\mathbf{v}_i$  y por la izquierda  $\mathbf{w}_i^T$  determinan las variables de estado que participan en la respuesta de cada modo, caracterizando la forma de la misma, es decir la respuesta transitoria.
- La condición inicial del sistema  $\mathbf{x}(0)$  determina el grado con que cada modo participa en la respuesta libre del sistema. De hecho, el producto dado por los autovectores por la izquierda junto con las condiciones iniciales ( $\mathbf{w}_i^T \mathbf{x}(0)$ ) determina esta participación.
- Las entradas al sistema  $\mathbf{u}(\tau)$  pueden excitar los modos del sistema no deseados, estando representado matemáticamente por la relación del producto  $\mathbf{w}_i^T \mathbf{B}$ .

Del estudio pormenorizado realizado sobre la ecuación (11) se infiere que la autoestructura tiene un papel importante tanto en la respuesta homogénea como en la respuesta forzada. Se ha observado la relación entre los autovectores por la derecha y por la izquierda con la respuesta del sistema y como una entrada particular puede excitar ciertos modos del sistema. Desde un punto de vista ideal puede resultar interesante que algunos modos del sistema no sean afectados por las entradas al mismo. Este proceso representa un desacoplamiento modal, ya que trata de independizar las acciones de control de cualquier canal del sistema respecto del resto de modos del mismo. En realidad se está requiriendo al sistema que desacople las acciones de control respecto del comportamiento del sistema.

La caracterización del comportamiento del sistema en lazo cerrado dependerá del controlador obtenido. Este a su vez estará

caracterizado por el efecto de la autoestructura seleccionada como autoestructura deseada. Para obtener un comportamiento adecuado de la respuesta del sistema, se debe asignar tanto los autovectores por la derecha como por la izquierda a la vez que se realiza la asignación de los autovalores del mismo.

Estas consideraciones sobre la relación existente entre los autovalores y autovectores por la derecha y por la izquierda y como repercuten sobre el comportamiento del sistema, en la respuesta del mismo y en la determinación de la forma de las respuestas, induce a plantear la posibilidad de seleccionar una autoestructura concreta que permitirá al sistema trabajar de una forma muy determinada

### 3.1. Estructura del Controlador

El problema del control estriba en determinar el valor de un controlador  $\mathbf{K}$  para el sistema lineal e invariante en el tiempo definido por (1). Los métodos de asignación de autoestructuras contemplan leyes de control por realimentación de estados y por realimentación de la salida. En la asignación del método EA para obtener un controlador estático por realimentación de la salida, la ley de control está dada por:

$$\vec{u} = -\mathbf{K}\vec{y} \quad (12)$$

Que para el caso de acceso completo a los estados del sistema se convierte en  $\vec{u} = -\mathbf{K}\vec{y} = -\mathbf{K}\mathbf{C}\vec{x}$ , siendo la matriz de la salida  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ , y convirtiendo el problema en realimentación de estados. Con lo que la dinámica del sistema en lazo cerrado, considerando realimentación de la salida está dada por:

$$\dot{\vec{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})\vec{x} \quad (13)$$

La autoestructura deseada estará compuesta por un conjunto de autovalores deseados  $\Lambda_d$  y de autovectores deseados  $V_d$  para el sistema en lazo cerrado, que tienen como componentes:

$$\begin{aligned} \Lambda_d &= [\lambda_{d1}, \dots, \lambda_{dp}] \\ V_d &= [v_{d1}, \dots, v_{dp}] \end{aligned} \quad (14)$$

Relacionando la autoestructura deseada (14) con el sistema en lazo cerrado (13) se obtiene la expresión:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})V_d = V\Lambda_d \quad (15)$$

El problema de control consiste en encontrar una matriz real  $\mathbf{K}$  tal que los autovalores de la matriz  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})$  incluyan los autovalores deseados  $\lambda_{di}$  como un subconjunto de los autovalores del sistema y que los autovectores se encuentren lo más próximo posible al conjunto de autovectores deseados  $v_{di}$  correspondientes a cada autovalor.

Para cualquier par de autovalores deseado dado por  $\lambda_{di}$  y sus correspondientes autovectores asociados  $v_{di}$ , se puede expresar la ecuación (15) como:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})v_i = \lambda_i v_i \quad (16)$$

Manipulando la expresión para obtener los autovectores del sistema se obtiene:

$$v_i = (\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}v_i \quad (17)$$

A partir de esta expresión se define un subespacio admisible dado por las columnas de la matriz  $(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$ . El autovector alcanzable se puede obtener proyectando el autovector deseado sobre el subespacio admisible antes mencionado. Reordenando la ecuación (17) en forma matricial se obtiene:

$$[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] \begin{bmatrix} v_i \\ \mathbf{K}\mathbf{C}v_i \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

Esta expresión puede estar representada para una solución no trivial como el espacio nulo dado por:

$$\begin{bmatrix} v_i \\ \mathbf{K}\mathbf{C}v_i \end{bmatrix} \in \{\mathbb{N} : [\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}]\} \quad (19)$$

En donde  $\mathbb{N}$  representa el espacio nulo de  $[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}]$ .

Precisamente este espacio nulo representa el espacio de vectores alcanzables. Todos los autovectores alcanzables que se corresponden con los autovectores deseados para el sistema en lazo cerrado deben ubicarse en el subespacio definido por las columnas de la matriz  $[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}]$ . Esto implica que los autovectores deseados pueden ser fácilmente obtenibles si pertenecen a este subespacio y si existe una matriz del controlador  $\mathbf{K}$ . Relacionando por tanto los autovectores por la derecha con la matriz del controlador y la matriz de la salida del sistema se define un nuevo vector  $\vec{w}_i = \mathbf{K}\mathbf{C}v_i$  denominado vector de parámetros por la derecha, que cuando es aplicado a un conjunto de autovectores permite llegar a la obtención del controlador expresado como:

$$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{W}}(\mathbf{C}\mathbf{V})^{-1} \quad (20)$$

### 3.2. Asignación de Autovalores

La asignación de los autovalores del sistema representa el primer paso en el proceso de asignación de la autoestructura. La asignación ha de realizarse para obtener aquellos valores deseados para el sistema en lazo cerrado, teniendo en cuenta la información obtenida del sistema en lazo abierto a partir del análisis modal.

La selección de autovalores para el sistema en lazo cerrado, es decir los autovalores deseados, se puede llevar a cabo con requisitos clásicos: tiempo de respuesta, amortiguamiento,

frecuencia natural y efecto de dominancia de los autovalores. El proceso de asignación de autovalores, basado en estos requisitos, es independiente del proceso de asignación de autovectores en los métodos de asignación EA.

La asignación de la posición de los autovalores se debe realizar a partir de la información del análisis del sistema en lazo abierto, permitiendo seleccionar posiciones fijas de los autovalores. Sin embargo, si el sistema lo exige, el diseñador del sistema de control podría determinar una región determinada en el plano complejo para posicionar los autovalores del sistema. La segunda técnica ofrece mayor libertad en la selección de la posición de los autovalores. Ambas técnicas son dependientes del sistema bajo consideración.

La estabilidad es otro requisito de diseño clásico que afecta a la asignación de autovalores. Los autovalores deseados han de ser posicionados en el plano complejo en regiones que permitan estabilizar el sistema y que lo hagan controlable.

En el proceso de selección de los autovalores deseados se pueden seguir diferentes aproximaciones para obtener la solución óptima. En determinadas ocasiones, los autovalores deseados pueden estar muy próximos a los autovalores del sistema en lazo abierto, modificando sólo aquellos que necesiten prestaciones diferentes en lazo cerrado.

Es interesante fijarse de nuevo en la ecuación de la salida del sistema en el dominio del tiempo (11). En esta se observa la participación de los autovalores  $\lambda_i$  en los términos de respuesta homogénea y forzada determinando la respuesta transitoria y la frecuencia natural del modo  $e^{\lambda_i t}$ . Si en un sistema MIMO fuera posible forzar las respuestas del sistema para que aparecieran sólo algunos modos, sólo algunos autovalores determinarían la respuesta del sistema. Esto permite determinar de forma más clara la implicación de los autovalores del sistema en la respuesta del mismo. Esto simplifica la selección de autovalores (Clarke *et al.*, 2003).

### 3.3. Asignación de Autovectores

El segundo subproceso integrado en la asignación de la autoestructura es la asignación de los autovectores. Se ha demostrado la dependencia existente entre los autovalores del sistema y los modos del mismo, y como estos afectan a la salida. Tanto los autovalores como los autovectores pueden ser modificados en lazo cerrado afectando a la dinámica de cualquier sistema.

Los autovectores caracterizan la forma y el acoplamiento de los diferentes modos del sistema. Existen diversos métodos para determinar los autovectores deseados  $V_d$  a partir de un conjunto de autovalores deseados  $\Lambda_d$ . Los métodos empleados dependen de las técnicas para obtener los controladores, pero básicamente todos requieren una especificación de los autovalores y autovectores deseados. A partir de estos datos se obtiene un autovector admisible en lazo cerrado que está contenido en un subespacio de una dimensión relacionada con el número de entradas  $m$  (Liu *et al.*, 1998). Generalmente los autovectores en lazo cerrado no pueden ser asignados de forma arbitraria. De

hecho en sistemas reales la asignación del autovector no está relacionada con el subespacio admisible obtenido. Por ello, en la aplicación más general de la asignación de los autovectores son utilizadas técnicas de proyección del autovector deseado sobre el subespacio alcanzable.

Los grados de libertad que posee el diseñador para la asignación de la autoestructura han sido estudiados tanto para realimentación de la salida como para realimentación de estados. De acuerdo con (Liu *et al.*, 1998) y a partir de (Srinathkumar, 1978), y para una ley de control de realimentación de la salida como  $\vec{u} = -K\vec{y}$ , sólo es posible asignar un  $\max(m,p)$  autovalores y un  $\min(m,p)$  elementos del correspondiente autovector de forma precisa, siendo  $m$  el número de entradas y  $p$  el de salidas.

Para la asignación de un número mayor de elementos del autovector de  $\min(m,p)$  es necesario realizar una aproximación precisa entre el autovector deseado y el obtenible. Este requisito es obtenido por medio de técnicas de proyección (Andry *et al.*, 1983), proyectando el autovector deseado sobre el subespacio del autovector obtenible. La Tabla 1 muestra los grados de libertad disponibles en la asignación de la autoestructura teniendo en cuenta que el número de entradas  $m$  es menor que el de salidas  $p$ : ( $m < p$ ).

Tabla 1. Libertad de Asignación en la Autoestructura

Parámetro	Grado de Asignación
Autovalores asignables	$p$
Autovectores asignables	$p$
Número de salidas utilizables en la realimentación	$p$
Elementos especificados en cada autovector que pueden ser desacoplados	$m$

### 3.4. Métodos de Asignación

Existen diversas técnicas matemáticas desarrolladas para la asignación de autoestructuras aplicables al cálculo del controlador  $K$ . Todas ellas comparten los mismos criterios en lo que a la autoestructura deseada, alcanzable y obtenida se refiere. Todas ellas comienzan el análisis desde la asignación básica y continúan aplicando algunos de los métodos típicos utilizados en la asignación de autoestructuras.

#### Proyección de autovectores:

Este método está muy relacionado con el de asignación básica. De forma general, los autovectores deseados  $v_i^d$ , no se encuentran disponibles en el subespacio formado por el espacio nulo dado por  $[A - \lambda_{di}I \ B]$ , sino que este subespacio ha de ser expandido para llegar a obtener los autovectores deseados. A este subespacio se le denomina subespacio alcanzable, dando lugar a los autovectores alcanzables. Cualquier combinación del nuevo espacio expandido del espacio nulo generará un autovector  $v_i$ , que no coincide con el autovector deseado. Por lo tanto, existe una diferencia euclídea entre el autovector deseado y el alcanzado. Utilizando técnicas de proyección puede minimizarse la referida distancia y aproximarse al autovector deseado.

### Métodos de asignación directa:

A los métodos de asignación directa se les denomina DEA (Direct Eigenstructure Assignment) (Davidson *et al.*, 1994). El método DEA, toma como base las técnicas de proyección de autovectores deseados, por lo que el procedimiento de diseño es similar. Este método se declara como no iterativo.

Considerando la ecuación del autovector para el sistema en lazo cerrado:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{V} = \mathbf{V}\Lambda_d \quad (21)$$

Para cada modo deseado se tiene lo siguiente:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{v}_i = \lambda_{di}\mathbf{v}_i \quad , \text{para } i = 1 \dots p \quad (22)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i - \lambda_{di} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{v}_i = 0 \quad (23)$$

$$[\mathbf{A} - \lambda_{di}\mathbf{I} \quad \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{v}_i \end{bmatrix} = 0 \quad (24)$$

De esta ecuación se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{v}_i \end{bmatrix} \in \mathbb{N}[\mathbf{A} - \lambda_{di}\mathbf{I} : \mathbf{B}] \quad (25)$$

La expresión (25) coincidente con la (19), representa un espacio nulo, que no tiene una solución trivial. Cualquier combinación de este espacio nulo puede producir un vector  $\mathbf{v}_i$ , que cuando es considerado como un autovector, permitirá obtener el autovalor deseado  $\lambda_{di}$ . A este conjunto de soluciones se le denomina “Vector de espacio alcanzable”. Este método fue propuesto por (Andry *et al.*, 1983), siendo conocido como el método del espacio nulo. En este método el autovector alcanzable  $\mathbf{v}_i$ , puede ser obtenido mediante proyección del vector deseado  $\mathbf{v}_{di}$  en el espacio alcanzable.

Existen otros métodos para determinar el vector de espacio alcanzable. A partir del desarrollo matemático anterior (23):

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i - \lambda_{di} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{v}_i = 0 \quad (26)$$

$$(\lambda_{di}\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_i = \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{v}_i \quad (27)$$

El vector  $\mathbf{v}_i$  debe permanecer en el espacio definido por las columnas de  $(\lambda_{di}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ , pudiendo esta matriz ser tomada como vector básico para los autovalores del sistema en lazo cerrado. En este sistema no es necesario calcular el espacio nulo. Si se tiene la precaución de no hacer coincidir los autovalores deseados en lazo cerrado con los autovalores en lazo abierto del sistema, no se presentarán problemas de cálculo en la matriz  $(\lambda_{di}\mathbf{I} - \mathbf{A})$ . Por lo tanto, la matriz de ganancia del controlador por extensión al conjunto completo de autovalores y autovectores

se obtiene a partir de (27), y donde las matrices inversas son pseudoinversas:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{V}\Lambda_d - \mathbf{A}\Lambda_d)(\mathbf{C}\mathbf{V}^{-1}) \quad (28)$$

### Métodos de asignación recursiva:

Los métodos de asignación recursiva tienen como objetivo mejorar la robustez del sistema. Todos ellos están basados en la minimización de una función de coste, que estará relacionada con la sensibilidad de la autoestructura y con la robustez del sistema.

Los métodos de asignación recursiva seleccionan los autovectores del sistema en lazo cerrado a partir de los subespacios de autovectores alcanzables. Esta función tiene como objetivo minimizar la sensibilidad global de la matriz de autovectores. Estas técnicas son aplicables tanto a sistemas que realimentan la salida como a los que realimentan estados.

Por tanto, el objetivo principal de los métodos de asignación recursiva es seleccionar los autovectores del sistema en lazo cerrado de los subespacios alcanzables a partir de los autovectores deseados para que la sensibilidad completa de la matriz de autovectores sea mínima. A la vez se busca que la sensibilidad de los autovalores sea lo más baja posible. Existen diversas técnicas de asignación basadas en procedimientos recursivos que se presentan a continuación.

#### Rango $n$ :

A partir del método de asignación introducido en la metodología DEA, se define el de Rango  $n$ . Este tiene como objetivo asignar autoestructuras con baja sensibilidad de autovalores. Esto se obtiene resolviendo la matriz ortogonal más próxima a la matriz de autovectores por la derecha. Las columnas de esta matriz ortogonal son proyectadas en el subespacio alcanzable formando una matriz de rango  $n$ .

El método calcula en cada iteración la matriz ortogonal más próxima a la forma real de la matriz de autovectores por la derecha. La matriz de autovectores obtenida es proyectada en la matriz alcanzable para obtener una actualización de rango  $n$  de la matriz de autovectores.

Matemáticamente el método está basado en el desarrollo de (Liu *et al.*, 1998). Este contempla el espacio de autovectores obtenidos después de un proceso iterativo, repetido  $k$  veces, con el que la matriz de autovectores queda definida como  $\mathbf{V}^k$ . El método matemático define la matriz ortogonal  $\mathbf{U}^k$  como la más próxima a  $\mathbf{V}^k$  según el criterio de minimización de Frobenius definido como:

$$\min_{\mathbf{U}^k} \|\mathbf{U}^k - \mathbf{R}^k\|_F \quad (29)$$

Y considerando que  $(\mathbf{U}^k)^T \mathbf{U}^k = \mathbf{I}$ . La solución de este problema es  $\mathbf{R}^k = \mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{Y}^T$ , siendo  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  matrices cuadradas y  $\mathbf{S}$  una matriz diagonal. La solución mínima de la ecuación (29) viene dada por  $\mathbf{U}^k = \mathbf{X}\mathbf{Y}^T$ . De forma descriptiva el proceso iterativo se realiza de la siguiente forma:

- Especificación de los autovalores y autovectores deseados,  $\Lambda_d$  y  $V_d$  respectivamente. Este paso representa el inicio de la iteración ( $k = 0$ ).
- Obtención de la matriz  $U^k$  más próxima a la deseada  $V^k$ .
- Utilizar técnicas de proyección para proyectar  $U^k$  en el subespacio de autovectores alcanzado.
- Calcular la sensibilidad global de la matriz de autovectores  $\eta(V)$ . Si el criterio de diseño no es alcanzado se repite el proceso. Este índice de sensibilidad es estable si se han conseguido los objetivos.
- Cálculo del controlador  $K$ .

#### Rango 1:

(Rank 1 Update): Este método iterativo actualiza cada uno de los autovectores de la matriz de autovectores de forma individual. Cada autovector es sustituido por uno con ortogonalidad máxima al subespacio formado por el anterior. Esta solución es equivalente a requerir que el ángulo disponible entre el vector que es realmente ortogonal a este espacio y un autovector alcanzable sea minimizado. Por ello, los autovectores en lazo cerrado se requieren para que sean tan ortogonales como sea posible entre sí, lo que mejora la medida de sensibilidad global de los autovalores. Este método inicialmente desarrollado por (Kautsky *et al.*, 1985) para el caso real, fue posteriormente planteado para el caso complejo por (Mudge *et al.*, 1988). Los algoritmos de cálculo de estos controladores también utilizan algoritmos de proyección y la decisión de iteración la basan en el cálculo del índice de sensibilidad dado por  $\eta(V)$  como en el caso anterior.

#### Métodos KNV:

El objetivo principal de los métodos propuestos por (Kautsky *et al.*, 1985) es doble. Por un lado es determinar una solución bien condicionada (robusta) en términos de la sensibilidad de los autovalores asignados frente a perturbaciones, y como segundo objetivo que las matrices de ganancia del sistema sean mínimas.

Existen dos métodos iterativos para el cálculo de un controlador robusto aplicado a sistemas realimentados por estados, conocidos como *método 0* y *método 1*.

**Método 0:** El Objetivo del método es seleccionar vectores que sean lo más ortogonales posible al espacio formado por el resto de los vectores. La solución se encuentra por iteración, en la que cada vector es reemplazado por un nuevo vector con ángulo máximo al espacio actual.

**Método 1:** La solución es obtenida por iteración y aplicación del método de actualización de rango-1. El objetivo es seleccionar un nuevo vector que minimice la medida de condición de la matriz en cuestión. El proceso finaliza al encontrar un valor adecuado en el número de condición.

El cálculo de la matriz del controlador se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$(A + BK) V = V \Lambda_d \quad (30)$$

$$(BKC) = V \Lambda_d V^{-1} - A \quad (31)$$

La matriz  $B$  se puede descomponer en la siguiente expresión:

$$B = [U_0 \ U_1] \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Siendo  $U_0$  y  $U_1$  matrices ortogonales y  $Z$  no singular. Sustituyendo el valor de  $B$  en la expresión (28) se obtiene la siguiente:

$$ZKC = U_0^T (V \Lambda_d V^{-1} - A) \quad (33)$$

$$0 = U_1^T (V \Lambda_d V^{-1} - A) \quad (34)$$

De aquí:

$$U_1^T (\lambda_{di} I - A) v_i = 0 \quad (35)$$

Para evitar obtener una solución trivial tal como  $v_i = 0$ , el autovector alcanzable debe permanecer en el espacio nulo de la matriz  $U_1^T (\lambda_{di} I - A)$ . En la práctica este resultado no es mejor que el obtenido del espacio nulo de  $[A - \lambda_{di} I \ B]$ . La matriz del controlador obtenida a partir de la expresión (33) queda como:

$$K = Z^{-1} U_0^T (V \Lambda_d V^{-1} - A) C^{-1} \quad (36)$$

Al igual que en los métodos anteriores, este se basa en la minimización del condicionamiento de la matriz de autovectores  $\eta(V)$ .

Los métodos expuestos en esta sección se han presentado como métodos iterativos. Independientemente de la técnica utilizada todos ellos tienen como objetivo mejorar algún índice de comportamiento, como se ha visto los índices de condicionamiento de la matriz de autovectores. El objetivo global de estas técnicas iterativas es mejorar la sensibilidad de la autoestructura frente a perturbaciones

#### 4. Procedimiento de diseño

La especificación de la autoestructura deseada afecta a los autovalores y autovectores deseados para el sistema en lazo cerrado. La apropiada selección de la autoestructura deseada tiene un impacto importante sobre la ganancia de realimentación.

La especificación de los autovalores, como se ha visto en las secciones anteriores, puede realizarse con criterios de control clásico: amortiguamiento y frecuencia natural. También es factible establecer como autovalores deseables aquellos que sean próximos a los autovalores del sistema en lazo cerrado, si la especificación lo permite.

Los autovectores deseados sin embargo necesitan que sean especificados por el diseñador, a veces de forma precisa, elemento a elemento. Los requisitos más interesantes se resumen en:

**Requisitos de Desacoplo de los Modos:** Los autovectores se relacionan con el sistema por medio de un modo del mismo, definido por un autovalor y por la contribución que hace cada uno de ellos al vector de estado. Esta contribución es medible por el valor del elemento del autovector. Si alguno de los elementos del autovector tiene valor uno, indica un acoplamiento perfecto con el elemento del vector de estado correspondiente.

Por el contrario, si el valor del mismo elemento del autovector tiende a cero indica un pobre o nulo acoplamiento. Esta última cualidad es la que se utiliza para requerir desacoplo de los elementos del vector de estado con los modos del sistema. Es decir el autovector es un mero transmisor de acoplamiento matemático, que se traduce en acoplamiento físico. En resumen, en la aplicación de cualquier método EA el autovector deseado ha de contener los requisitos de desacoplo de los modos.

**Requisitos de Robustez:** La robustez de los sistemas es dependiente de los métodos de obtención de los controladores. Básicamente se presentan sistemas que tratan de reducir la sensibilidad de los autovalores frente a variaciones del sistema como una primera opción. Desde la perspectiva puramente teórica es interesante mencionar las definiciones y demostraciones relacionadas con la sensibilidad de las matrices del sistema y de los autovalores y autovectores del mismo en (Wilkinson, 1965). Un criterio clásico de establecimiento de requisitos de robustez es la medida de la robustez del lazo y trabajar con las funciones de sensibilidad. Estas funciones de sensibilidad se definen como la matriz de transferencia desde el sumador de la entrada hasta el sumador de la salida. La función de sensibilidad puede relacionarse con los márgenes de ganancia y de fase (Faleiro *et al.*, 1997).

En (Patton *et al.*, 1994) se presenta directamente el problema del control robusto, tomando como índices de robustez las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria. Otras formas de evaluar la robustez de los sistemas se introduce en (Mudge, 1988), en el que la robustez está relacionada con la sensibilidad de los autovalores. La sensibilidad de los autovalores frente a cualquier variación de los parámetros se demuestra a partir de la ecuación (16) que relaciona el par autovalor-autovector con la matriz de estado del sistema en lazo cerrado (Ching-Fang Li, 1993).

Finalmente, otras técnicas están basadas en la ortogonalidad de los autovectores frente al resto de autovectores del subespacio obtenido. Cuanto mayor es la ortogonalidad mayor es la robustez del sistema medida como la interacción de los modos del mismo (Pratt, 2000).

El procedimiento de diseño se presenta en la figura 1. Se observa que el procedimiento comienza con un análisis modal del sistema, que tiene como objeto la identificación de los modos del sistema. La determinación de la autoestructura deseada, esto es de los autovalores y autovectores deseados constituyen los requisitos de diseño. Con ello se está definiendo el comportamiento deseado del sistema en lazo cerrado.

El proceso continúa con la aplicación de cualquiera de los métodos de asignación descritos para finalizar con el análisis final comprobando el comportamiento del sistema en lazo cerrado.

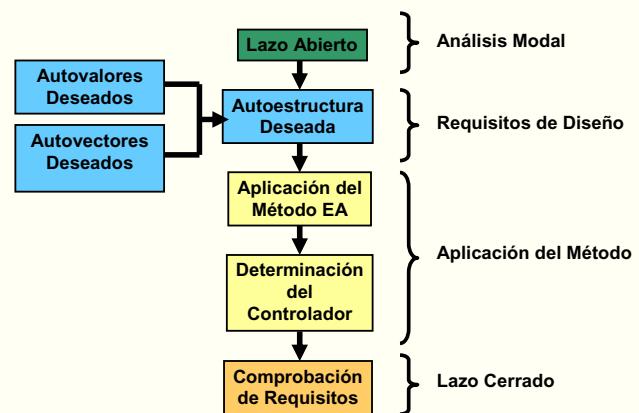


Figura 1: Procedimiento de diseño

## 5. Aplicación de los métodos de asignación de autoestructuras

En esta sección se presenta el diseño de un controlador de orientación del movimiento de actitud de un satélite. Este ejemplo práctico tiene como objetivo aplicar el procedimiento de diseño descrito en la sección anterior. Concretamente, se pretende diseñar un control de actitud en tres ejes para un satélite en órbita baja.

La orientación de este tipo de vehículos es su órbita se puede llevar a cabo con diferentes actuadores, tal como ruedas de reacción, ruedas de momentos, magnetopares o expulsores de gas (thrusters) entre otros. El control de actitud de un satélite se realiza en el sistema de control de actitud (AOCS – Attitude and Orbit Control System). Este computador realiza las medidas de los sensores de actitud (sensores estelares, de campo magnético de horizonte), desarrolla la ley de control y por último gestiona el control de los actuadores. La figura 2 muestra el diagrama de bloques de un sistema de control con estas características.

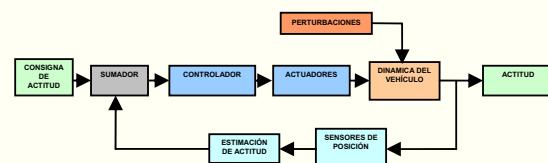


Figura 2: Diagrama de bloques de un AOCS

El problema que aquí se plantea está relacionado con el control de actitud de un satélite rígido al que se demanda un apuntamiento preciso sobre la superficie terrestre. Bajo estos requisitos, alguno de las caras del satélite permanecerá apuntando permanentemente hacia la Tierra durante su órbita. Las maniobras que debe realizar el satélite, y sobre las que se requiere control, son las de alabeo, cabeceo y guñada, como muestra la figura 3.

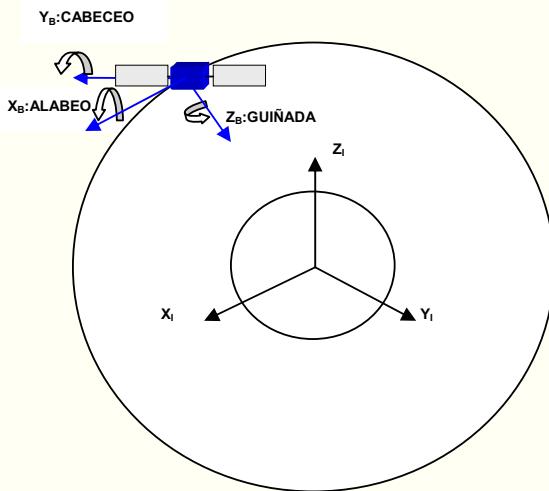


Figura 3: Maniobras de orientación de un satélite

Para conseguir el control en tres ejes representado es necesario disponer de tres actuadores alineados con los ejes locales del vehículo. Una solución adecuada para este problema es la utilización de ruedas de reacción. Por tanto, una corrección completa de actitud se consigue al maniobrar conjuntamente los tres actuadores del satélite.

La definición del sistema dinámico parte del modelo matemático del satélite obtenido por medio de las ecuaciones dinámicas del mismo. Este modelo incluye el modelo rígido del vehículo, junto con perturbaciones que pudieran afectar al movimiento del mismo. En este tipo de modelos matemáticos se utilizan los sistemas de referencia terrestre, orbital y ejes cuerpo. Por tanto, el error de actitud del satélite se obtiene al valorar las diferencias entre ejes cuerpo y ejes orbitales. Si el error es cero, el satélite posee la orientación deseada. En (Crespo *et al.*, 2011), se presenta el modelo matemático de un satélite de estas características.

El modelo en espacio de estados relaciona los elementos de la matriz de estado  $\mathbf{A}$  y de control  $\mathbf{B}$  con las submatrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}_m$  y  $\mathbf{G}$  (ver expresión 37). Estas son respectivamente las matrices de masa, giroscópica y de rigidez, que a su vez se relacionan con las propiedades físicas del satélite, como son sus momentos de inercia y la velocidad angular orbital.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_m & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{(n-m) \times m} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Matemáticamente el satélite está definido en espacio de estados por la expresión (1). Considerando que el movimiento del vehículo está linealizado entorno a un punto de equilibrio, se plantean los siguientes datos numéricos obtenidos de (Crespo *et al.*, 2011) para las matrices del sistema  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8.4225e-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.6485e-5 \\ 0 & -1.0503e-3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.2383e-3 & 1.1909 & 0 & -1.2396e-3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2.5058e-002 & 0 & 0 \\ 0 & 2.6931e-002 & 0 \\ 0 & 0 & 3.0960e-002 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}; \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

Siendo el vector de estado:  $\vec{x} = [\phi \ \theta \ \psi \ \dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ , donde los símbolos  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$  representan los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada respectivamente. Los últimos tres elementos del vector de estado son las velocidades angulares correspondientes a los mencionados ángulos. Al seleccionar la matriz de control  $\mathbf{C}$  como una matriz diagonal unitaria, se está asumiendo que el problema se convierte en una realimentación de estados. Con ello todas las variables controladas son medibles por sensores de velocidad angular y de posición angular.

Siguiendo el procedimiento descrito en la figura 1, el diseño comienza por el análisis modal del sistema. Esto permite obtener la relación de los modos dinámicos (alabeo, cabeceo y guiñada) con los autovalores y autovectores del sistema. Este análisis realizado sobre el sistema en lazo abierto añade información adicional, como la relacionada con la estabilidad del sistema y un factor determinante que es el acoplamiento de los modos dinámicos. La Tabla 2 muestra los datos numéricos del sistema en lazo abierto.

Del análisis modal se observa que un autovalor de alabeo se encuentra posicionado en el semiplano derecho del plano complejo induciendo inestabilidad, y que el autovalor correspondiente a guiñada presenta oscilación.

La tabla 2 también incluye información relativa al acoplamiento de los modos. Esta característica se determina por medio del valor numérico de los autovectores. Se observa en la tabla que los modos de alabeo y guiñada se encuentran acoplados, y que el modo de cabeceo se encuentra desacoplado del resto (valor cero). Esta última característica está relacionada con el proceso de linealización. En un sistema real, y para este tipo de vehículos, se encuentra un acoplamiento mecánico entre todos los modos, más acentuado en los mencionados modos de alabeo y guiñada.

La Figura 4 muestra los autovalores en el plano complejo para el sistema en lazo abierto, donde se observa gráficamente los datos de la tabla 2.

Tabla 2. Autoestructura del sistema en lazo abierto

Modos del Sistema	Alabeo	Cabeceo	Guíñada
<b>Autovalores</b>	2.9321e-02 -2.9332e-02	-6.1449e-04 ± 3.4818e-02i	0 ± 3.2408e-02i
	6.0987e-02 5.8913e-02	0	6.1801e-04
<b>Autovectores</b>	0	9.9948e-01	0
	9.9771e-01 9.9783e-01	0	9.9939e-01

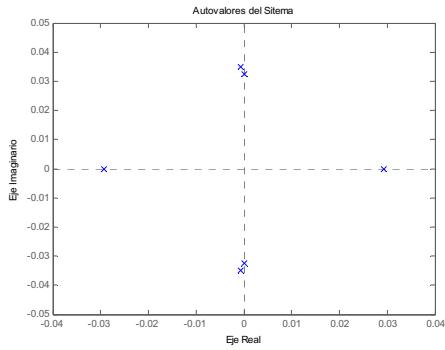


Figura 4: Autovalores del sistema en lazo abierto

El sistema en lazo cerrado es requerido en primer lugar para estabilizar el sistema y en segundo lugar para obtener un desacoplamiento adicional entre los modos del sistema. La característica de desacoplamiento mecánico de los modos del sistema permitiría no inducir errores en las maniobras de actitud. Los requisitos de diseño aplicados a este diseño son los siguientes:

- Los autovalores requeridos para los tres modos introducen amortiguamiento al sistema.
- Se seleccionarán los autovalores deseados para el sistema en lazo cerrado tan próximos como puedan estar a los autovalores en lazo abierto para evitar un excesivo esfuerzo de control. Este requisito no es aplicable al autovalor inestable del modo de alabeo.
- Se requiere desacoplamiento entre las maniobras de alabeo y guíñada y viceversa. Se requiere mantener el desacoplamiento existente entre los modos de alabeo-guíñada y cabeceo.

El valor del controlador estático obtenido es:

$$\mathbf{K} = [ \begin{array}{cccc} -6.4984e+000 & 7.1415e-011 & -1.4507e-005 & -2.2291e+001 \\ & \dots & 9.1234e-010 & -1.5872e-003 \\ 2.1156e-010 & -2.7931e-001 & -1.2747e-012 & 5.4385e-010 \\ & \dots & -6.4409e+000 & -7.3890e-012 \\ -8.6464e+001 & -5.2957e-011 & -1.2136e-001 & -2.8075e+002 \\ & \dots & -1.9437e-010 & -3.9319e+000 \end{array} ]$$

La Tabla 3 muestra los resultados obtenidos para el sistema en lazo cerrado, en donde se ha utilizado una técnica de proyección de los autovectores deseados para obtener el controlador. Comparando los resultados de la figura 4 con los de la figura 5 se observa la mejora obtenida en el sistema en cuanto a estabilidad y amortiguamiento de los modos.

Tabla 3. Autoestructura obtenida por técnicas de proyección

Modos del Sistema	Alabeo	Cabeceo	Guíñada
<b>Autovalores Obtenidos</b>	-0.27932 ± 0.28980i	-8.6730e-02 ± 3.2409e-02i	-6.1457e-02 ± 3.4820e-02i
	5.3955e-002	0	1.5059e-006
<b>Autovectores Obtenidos</b>	0	9.9574e-001	0
	9.2611e-001	0	9.9751e-001

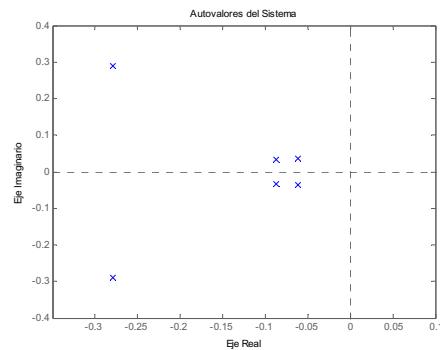


Figura 5: Autovalores del sistema en lazo cerrado

Los datos presentados en la Tabla 3 muestran que se mantiene el desacoplamiento del modo cabeceo con el resto de los modos. El acoplamiento entre la maniobra de guíñada y la de alabeo es prácticamente nulo, pero el desacoplamiento de la maniobra de alabeo con la de guíñada no ha desaparecido por completo. Esto no representa un inconveniente para el sistema, ya que aunque se induzca un movimiento no deseado sobre el eje de guíñada no afecta al propósito del sistema, ya que no varía el apuntamiento del vehículo sobre la superficie terrestre.

Se ha simulado una maniobra de corrección de actitud. Esta maniobra se simula mediante un impulso unitario, generando las maniobras de orientación en alabeo, cabeceo y guíñada. La Figura 6 representa esta situación. Las columnas de este gráfico representan las maniobras de orientación y las filas representan los datos de actitud para cada uno de los canales. La consigna consiste en una magnitud angular requerida a cada uno de los ejes del sistema satélite. Con esta figura se puede comprobar de forma gráfica los resultados numéricos. En la primera columna de la figura (maniobra de alabeo) se observa el desacoplamiento existente con el ángulo de cabeceo y la elevada repercusión sobre el de guíñada. La segunda columna muestra la maniobra de cabeceo y como los movimientos alrededor de los ejes de alabeo y cabeceo permanecen a cero, esto es, existe un elevado desacoplamiento entre los tres canales. Y por último, la maniobra de guíñada no tiene repercusión ni sobre el ángulo de alabeo ni sobre el de cabeceo. Con estos datos, se observa que el desacoplamiento mayor se ha obtenido para la interacción entre la maniobra de guíñada y el canal de alabeo, que el canal de cabeceo está completamente desacoplado del resto de canales, y que el resultado menos favorable es el correspondiente a la maniobra de alabeo debido a la repercusión sobre el eje de guíñada. Sin embargo, esta situación no es preocupante en este tipo de vehículos desde la perspectiva de orientación, ya que el lado del satélite orientado hacia la

superficie terrestre permanece inalterable. En otro tipo de sistemas, en los que se produjera esta situación habría que rehacer el diseño del controlador. Finalmente las acciones de control se presentan en la Figura 7. Se observa que el esfuerzo de control más elevado se presenta en el controlador de guiñada para la maniobra de alabeo.

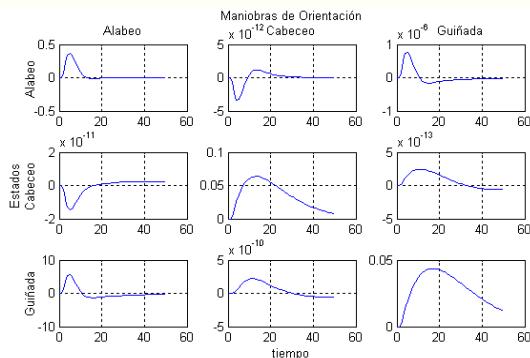


Figura 6: Respuesta del sistema en lazo cerrado

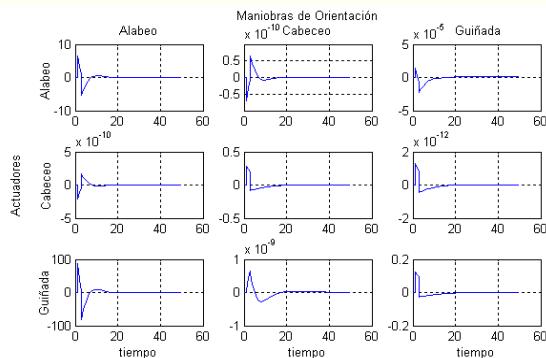


Figura 7: Esfuerzo de control

## 6. Conclusión

En este trabajo se ha realizado una revisión de la bibliografía referente a los métodos de asignación de autoestructuras con dos objetivos claros y diferenciados. Por un lado, hacer un repaso de los trabajos más relevantes relacionados con el desarrollo de las técnicas de asignación de autoestructuras y cómo estas han evolucionado a lo largo de las últimas décadas, y por otro, se ha revisado la bibliografía que relaciona estos métodos con aplicaciones reales al sector aeroespacial.

Con el objeto de ilustrar el proceso de diseño y desarrollo de un controlador por estos métodos se han presentado datos numéricos aplicados al controlador de actitud de un satélite. Este tipo de sistemas son altamente acoplados, en este caso entre las maniobras de actitud, lo que representa un reto de diseño para el controlador. El diseño de controladores por técnicas de asignación de autoestructuras encaja perfectamente con los requisitos perseguidos en sistemas mecánicamente acoplados.

En la aplicación numérica se ha tenido como objetivo principal el de desacoplo de los modos activos de control de actitud del

sistema. La complejidad de este tipo de sistemas, en lo que al desacoplo de los modos dinámicos del sistema se refiere, reside en obtener una independencia aceptable de las maniobras de orientación para el vehículo. Se ha puesto de manifiesto en la aplicación presentada que se ha obtenido un desacoplo aceptable en lazo cerrado, mejorando el comportamiento del sistema en lazo abierto. En el análisis de resultados del sistema en lazo cerrado, también se ha observado, que no ha sido posible obtener el requisito del movimiento de guiñada.

Si bien en este artículo se ha hecho referencia casi exclusivamente a trabajos relacionados con la aplicación de las técnicas de asignación de autoestructuras de forma individual, hay que tener en cuenta que estas técnicas pueden combinarse con otras de diseño de sistemas de control, como por ejemplo las técnicas QFT. Algunos investigadores han trabajado y trabajan en esta línea, combinando de esta forma diferentes técnicas.

## English Summary

### A survey of Eigenstructure Assignment methods: Application to Aerospace Systems.

## Abstract

The methods based on Eigenstructure Assignment (EA) have been applied to the successful design of controllers in different industrial application over the last decades. In this paper the most interesting aspects of the EA methods are reviewed. The EA methods are considered by control researchers as a modal method. The paper also includes a review to the literature related to aerospace applications and EA controllers design. A numerical example is included in this work to show the whole process taken to design a static controller applied to a spacecercraft.

## Keywords:

Aerospace control, Eigenstructure assignment, Dynamic decoupling.

## Referencias

- Andry, A. N.; Shapiro, E. Y.; Chung, J. C. (1983) "Eigenstructure Assignment for Linear Systems". IEEE Transactions On Aerospace And Electronic Systems Vol. AES-19, no. 5 Septiembre de 1983, pp. 711-729.
- Antequera, N., Santos, M. y De la Cruz, J.M. (2006). A Helicopter Control based on Eigenstructure Assignment. *11th IEEE Int. Conf. on Emerging Technologies and Factory Automation*, 2006, pp.719-724.
- Aranda, J. y Crespo, J. (2007). Agosto de 2007: Modal Analysis Applied to Spacecraft Attitude Control. *Congreso AIAA Guidance, Control and Dynamics Conference*, Savannah, Georgia, EEUU, 20-23 de Agosto de 2007. Código AIAA Meeting Papers CD-CODE: 1500-339019.
- Bong, Y.; Choi, J. W. (2007). Eigenstructure Assignment Considering Probability of Instability with Flight Control Application. *International Journal of Control, Automation and Systems*. Vol. 5, No. 6, Diciembre de 2007, pp. 607-613.
- Bruyère, L., White, B.A., Tsourdos, A. (2003). Dynamic Inversion for Missile Lateral Velocity Control Via Polynomial Eigenstructure Assignment. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*. 11-14 de Agosto de 2003, Austin, Texas.
- Burrows, S. P., Patton R. J., Szymanski J. E. (1989). Robust Eigenstructure Assignment with a Control Design Package. *IEEE Control Systems Magazine*. Issue 4, Junio de 1989, pp. 29-32.
- Ching-Fang Li (1993): Ching-Fang Li. "Advanced Control Systems Design". Prentice Hall Series in Advanced Guidance and Control and their Applications, 1993.

- Choi, J.W. (1998). A Simultaneous Assignment Methodology of Right/Left Eigenstructures. *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*. Vol. 34, Issue 2, Abril de 1998, pp. 625-634.
- Clarke, T., Ensor, J., Griffin, J. (2003). Desirable Eigenstructure for Good Short-Term Helicopter. *Proceedings of the Institution for Mechanical Engineering Vol. 217 Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2003, pp.43-56.
- Crespo, J. y Aranda, J. (2009). Application of the Eigenstructure Assignment Method to Design Flexible Spacecrafts Controllers. *Congreso EUCASS - European Conference for Aerospace Sciences*, Versailles, Francia, del 6 al 9 de Julio de 2009. ISBN: 978-2-930389-47-8.
- Crespo, J. y Aranda, J. (2011). Eigenstructure Assignment Based Controllers Applied to Flexible Spacecraft. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2011. DOI: 10.177/2041302510393027.
- Davidson, J.B., Dominich A. (1994). Gain Weighted Eigenspace Assignment. *NASA Technical Memorandum 109130*, Mayo de 1994.
- De la Cruz, J.M.; Aranda, J. (1997) Método de Asignación de Autoestructura para Diseño de Sistemas MIMO . *XVII Curso de Automática en la Industria*, 16 – 20 de Junio de 1997.
- Döll, C.; Le Gorrec, Y., Ferreres, G. y Magni, J. F. (2001). A Robust Self-Scheduled Missile Autopilot. *Design by Multi-model Eigenstructure Assignment Control Engineering Practice* 9. Vol. 9, Octubre 2001, pp.1067-1078.
- Duan G. R. (2002). Parametric Eigenstructure Assignment via State Feedback: A Simple Numerically Reliable Approach. *Proceedings of the 4º World Congress on Intelligent Control and Automation*, vol. 1, Junio de 2002, 165-173.
- Duan G. R. (2003). Parametric Eigenstructure Assignment Via Output Feedback Based on Singular Value Decompositions . *IEE Proceedings on Control Theory Applications*. Vol. 150, Issue 1. Enero de 2003, pp. 93-100.
- Faleiro, L., Pratt, R. (1997). RCAM Design Challenge Presentation Document: An Eigenstructure Assignment Approach . *GARTEUR/TP-088-18*. Abril de 1997.
- Ganet-Choeller, M., Rongier, I. (2003). Scheduled Robust Attitude Control Law for Flexible Launchers using Eigenstructure Assignment and  $H_{\infty}$  Techniques. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference And Exhibit*, AIAA 11-14 de Agosto de 2003, Austin, Texas.
- Garrad, W. L., Low, E., Prouty, S. (1989). Design of Attitude and Rate Command Systems for Helicopters Using Eigenstructure Assignment. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 12, nº 6, Noviembre-Diciembre de 1989, pp. 783-792.
- Juang, J., Lim, K., Junkins, J. L. (1989). Robust Eigensystem Assignment for Flexible Structures. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol.12, Nº3, Mayo-Junio de 1989, pp. 381-387.
- Kautsky, J., Nichols, N.K., Van Dooren, P. (1985). Robust Pole Assignment in Linear State Feedback. *International Journal of Control*, Vol. 41, 1985, pp. 1129-1155.
- Kimura, H. (1975). Pole Assignment by Gain Output Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Issue 4, Vol. 20, Agosto de 1975, pp. 509-516.
- Liu, G. P., Patton, R. J. (1998). *Eigenstructure Assignment for Control System Design*. John Wiley and Sons, 1998.
- Magni, Jean-Francois. (2002). *Robust Modal Control with a Toolbox for Use with MATLAB*. ONERA-Toulouse. Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2002.
- Mengali, G. (2003). Role of Eigenvectors in Aircraft Dynamics Optimization. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 26, No. 2, Marzo-Abril de 2003, pp. 340-346.
- Merkel, M., Heinrich, M., Cark, U. (2004). Enhanced Eigenstructure Assignment for Aeroelastic Control Application. *Aerospace, Science and Technology. German Aerospace Congress, y Aerospace* , Junio de 2004, pp. 533-543.
- Moore, B. C(1976). On the Flexibility Offered by State Feedback in Multivariable Systems Beyond Closed Loop Eigenvalue Assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Octubre de 1976, pp. 207-214.
- Mudge, S.K., Patton, R. J. (1988). Analysis of the Technique of Robust Eigenstructure Assignment with Application to Aircraft Control. *IEE Proceedings*, Vol. 135, nº 4, Julio de 1988, pp. 275-281.
- Nieto-Wire y Sobel, C. (2007). Eigenstructure Assignment for a Tailless Aircraft . *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, 20 – 23 de Agosto de 2007, Hilton Head, Carolina del Sur.
- Nieto-Wire, C. y Sobel, K. (2009). Reconfigurable Delta Operator Eigenstructure Assignment for a Tailless Aircraft. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Chicago, Illinois, Agosto de 2009. AIAA-2009-6306.
- Oliva, A. P., Leite Filho, W. C. (2002). Eigenstructure versus Optimal Control for Decoupling. *Control Engineering Practice*, Vol. 19, Issue 10, Octubre de 2002, pp. 1059-1079.
- Patton, R. J.; Liu, G. P. (1994). Robust Control Design Via Eigenstructure Assignment, Genetic Algorithms and Gradient-Based Optimisation. *IEE Proceedings-Control theory applications*, Mayo de 1994, volumen 141, issue 3, pp 202-208.
- Pomfret, A., Griffin, S., Clarke, T. (2008). Eigenstructure Assignment for Helicopter Hover Control. *Proceedings of the 17th World Congress*. The International Federation of Automatic Control Seoul, Korea, 6-11 de Julio, 2008-IFAC, pp. 5776 – 5781
- Pomfret, A., Clarke, T. (2009). Desirable eigenstructure for good short-term helicopter handling qualities: the rate command response case. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering Part G*, vol. 223, nº 8, Abril de 2009. DOI: 10.1243/09544100AERO584, pp 1059-1065.
- Porter, B. y D'azzo, J. (1978). Algorithm for closed-loop eigenstructure assignment by state feedback in multivariable linear systems, *Int. J. Control*, Vol. 27, pp.943-947, 1978.
- Pratt, R.W. (2000). Flight Control Systems: Practical Issues in Design and Implementation. *Control Engineering Series* 57. Edited by Roger W. Pratt, The Institution of Electrical Engineers.
- Satoh, A., Sugimoto, K. (2003). Partial Eigenstructure Assignment Approach for Robust Flight Control. *Journal of guidance, control and dynamics*, Vol. 27, nº 1, 2004, pp. 145-149.
- Sobel, K. M., Shapiro, E. Y. (1985). Application of Eigenstructure Assignment to Flight Control Design. *Some Extensions Journal of Guidance*, Vol. 10, Issue. 1, Febrero de 1987, pp. 73-81.
- Srinathkumar, S. (1978). Eigenvalue/Eigenvector Assignment Using Output Feedback . *NASA Technical Paper 1118*. Febrero de 1978.
- Srinathkumar , S. (2008). Eigenstructure Control: A Flight Vehicle Handling Qualities Design Tool. *Proceedings of the International Conference on Aerospace Science and Technology* 26-28 de Junio de 2008, Bangalore, India.
- Srinathkumar, S. (2011). Eigenstructure Control Algorithms. ISBN: 978-1-84919-259-0.
- Thimmaraya, R., Nararaj, C. y Lee, D. (2010). Linear Time-Varying Tracking Control with Application to Unmanned Aerial Vehicles. 2010 AACC. 2010 American Control Conference Marriott Waterfront, Baltimore, MD, USA 30 de Junio a 2 de Julio, 2010, pp. 806-811.
- Tsai, H., Lin, J., Chiang, T., Cheng, C. (2004). Optimal Satellite Attitude Control Systems Design by Combination of Eigenstructure Assignment and LEQG/LTR Methods. *Proceedings of the 5º World Congress on Intelligent Control and Automation*. Junio de 2004, pp. 407-412.
- Wang, F., Ankersen, F., Tsourdos, A., Stanley, A., White, B, The design of polynomial Eigenstructure Assignment Controller and its robust analysis for flexible spacecraft precise control system. *AIAA Guidance, Navigatin and Control Conference*, AIAA 2011. 8-11 August 201, Portland, Oregon. DOI: 10.2514/6.2011-6508
- Wilson, Robert F., Cloutier, James R., Yedavalli, R. K. (1992). Control Design for Robust Eigenstructure Assignment in Linear Uncertain Systems. *IEEE Control Systems*. Octubre de 1992, pp. 29-34.
- Wonham, W. M (1967). On Pole Assigment in Multi-input Controllable Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-12(6), pp. 660-665.
- Wu, F., Wei, W., Grimble, M.J. (2004). Robust MIMO Control-System Design Using Eigenstructure Assignment and QFT . *IEE Proceedings: Control theory and applications*, Vol. 151, nº 2, 2004 , pages. 198-209.
- Xue, Y.; Duan, G-R. (2005). Eigenstructure Assignment for Linear Systems with Constrained Output Via State Feedback – a Parametric Approach. *Proceedings of the fourth international conference on machine learning and cybernetics*, Guangzhou, 18-21de Agosto de 2005, pp. 1454-1459.