

Control predictor con ponderación de retardos: análisis de prestaciones y robustez ante retardo variable

Antonio González^{a,*}, Antonio Sala^b

^aUniversité de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, LAMIH (UMR CNRS 8201), Le Mont Houy, 59313 Valenciennes Cedex 9, Francia

^bInstituto de Automática e Informática Industrial, Universitat Politècnica de Valencia, Cno. Vera s/n, E-46022 Valencia, España

Resumen

Los controladores basados en predictor, en particular los obtenidos por métodos de asignación finita de espectro (también conocido como método de reducción), permiten abordar el control por realimentación del estado de sistemas con retardos constantes y conocidos a partir de un modelo equivalente transformado sin retardo. Sin embargo, si el retardo es variable o existen incertidumbres en el modelo del proceso no es posible compensar su efecto de forma exacta. Este trabajo propone utilizar un predictor con múltiples retardos ponderados, con unos pesos a determinar según un algoritmo iterativo. Con ello se probará que, dado un controlador ya diseñado para un proceso sin retardo, la estructura ponderada propuesta consigue mejores prestaciones y robustez que los predictores de horizonte único. Copyright © 2014 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

Palabras Clave: Retardo variable con el tiempo, Asignación Finita de Espectro, Método de reducción, Desigualdad matricial lineal

1. Introducción

Los retardos temporales aparecen con frecuencia en numerosas aplicaciones de ingeniería de control. Estos son inducidos en el bucle de control por fenómenos tales como transporte de masa, energía o información. Es el caso, por ejemplo, de procesos químicos, biológicos o aplicaciones aeronáuticas Richard (2003); Normey-Rico and Camacho (2007). En la práctica, los retardos temporales pueden ser variables con el tiempo Yue and Han (2005); Pan et al. (2006); Gao et al. (2008), debido a que su valor depende de parámetros que están sometidos a variaciones temporales. El ejemplo más típico de retardos variables reconocido en la literatura son los denominados sistemas de control basados en red Nilsson (1998); Salt et al. (2008). Los retardos en este tipo de sistemas dependen de factores muy variables tales como congestiones puntuales de dispositivos de red, disponibilidad del interfaz de comunicaciones y ancho de banda, etc.

El análisis de la estabilidad y la síntesis de controladores para este tipo de sistemas ha sido y sigue siendo ampliamente explorada en la literatura, básicamente siguiendo dos enfoques: utilización de esquemas de control clásicos y utilización de esquemas de control de compensación de retardo. Los modelos

de sistemas con retardo pueden obtenerse de modelos físicos o bien mediante identificación. En cuanto al retardo variable, normalmente se dispone de cotas máximas y mínimas de su valor y, en algunos casos, puede establecerse un sistema de identificación en línea que permita adaptar el controlador al valor identificado del retardo en cada momento Peng et al. (2004), o bien identificar parámetros y retardo mediante esquemas estandar de control adaptativo De Souza et al. (1988). Identificación y control adaptativo ante retardo, no obstante, quedan fuera de los objetivos del presente trabajo, que se centra en la robustez ante un intervalo de retardo predefinido a priori.

En cuanto a la utilización de esquemas de control “clásicos” para estabilizar los sistemas con retardos, existen variados enfoques en la literatura, tales como la realimentación estática del estado Pan et al. (2006); Valter et al. (2008); Du et al. (2008); Yong et al. (2008); Guangdeng et al. (2009), controladores PID Silva et al. (2005); Oliveira et al. (2009), realimentación estática de la salida o controladores dinámicos Gao et al. (2004); Liu et al. (2006). La idea de estos trabajos consiste en proponer técnicas de síntesis de las ganancias de la ley de control teniendo en cuenta el retardo.

Los modelos con retardo también pueden ser considerados directamente en esquemas clásicos de control predictivo basado en modelos Garcia et al. (1989), de hecho, el predecir futuras salidas es la idea principal de estas técnicas, incluso con diferentes predictores para cada instante futuro a anticipar (control predictivo multi-modelo Di Palma and Magni (2004)).

* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: angensor@gmail.com (Antonio González), asala@isa.upv.es (Antonio Sala).

Por último, los esquemas de control de compensación de re-tardo ('Dead-time compensators (DTC)' en la literatura en lengua inglesa), como Hagglund (1996); Normey-Rico and Camacho (2007) tienen como objetivo adaptar esquemas de control convencionales a procesos con retardos, mediante la inclusión de elementos adicionales en el esquema de control que eliminan el re-tardo de la ecuación característica del sistema en bucle cerrado. De este modo, el diseño de las ganancias de la ley de control puede llevarse a cabo sin tener en cuenta la presencia del re-tardo (en la mayoría de los casos, bajo la suposición de que es conocido y constante). A su vez, cabe distinguir dos enfoques: Predictor de Smith (Smith 1957); Palmor (1996); Normey-Rico and Camacho (2007) (realimentación de salida) y Asignación finita del espectro 'Finite-spectrum assignment (FSA)', Manitius and Olbrot (1979); Artstein (1982); Wang et al. (1998); Yue and Han (2005); Zhong (2006) (realimentación del estado). Esta última técnica está basada en la transformación del estado propuesta en Manitius and Olbrot (1979), y permite reducir un sistema con re-tardo *conocido* a un sistema sin re-tardo, incluso en sistemas variantes en el tiempo Artstein (1982) donde, sin espectro de valores propios que asignar, la técnica se conoce como *método de reducción*.

La versión discreta de la ley de control FSA/reducción se le conoce como realimentación del estado basada en predictor Goodwin and Sin (1984); Garcia et al. (2006); Gonzalez et al. (2012b), y presenta la ventaja de la facilidad de implementación en un controlador digital. Análogamente al controlador FSA continuo, el controlador de realimentación del estado basado en predictor permite, en ausencia de errores de modelado y re-tardo constante y conocido, obtener las mismas prestaciones que el sistema equivalente sin re-tardo Yue and Han (2005). Sin embargo, uno de los problemas reconocidos inherentes a este esquema de control es la posible sensibilidad a errores de modelado en el re-tardo y en el modelo del proceso Michiels and Niculescu (2003). El motivo es que los errores de modelado se acumulan en el cálculo de la predicción futura del estado. Por tanto, el análisis de la robustez en este tipo de sistemas Yue and Han (2005) resulta de interés, especialmente si el re-tardo es variable.

El análisis de estabilidad robusta de sistemas discretos con re-tardo variable ha sido explorada en la literatura considerando esquemas de control convencionales Boukas (2006); Du et al. (2008); Yong et al. (2008); Zhang et al. (2008). Sin embargo, son escasas las contribuciones en la literatura que abordan el problema con esquemas de control basados en predictor. Cabe citar los trabajos Lozano et al. (2004); Garcia et al. (2006), donde se estudia la estabilidad de estos sistemas en un caso muestreado. No obstante, se restringe el estudio sólamente al caso de pequeñas variaciones de magnitud inferior al periodo de muestreo, tanto en el re-tardo como en el periodo de muestreo. Posteriormente, en Gonzalez et al. (2013a,b) se extiende el trabajo anterior, aportando resultados que evalúan la estabilidad robusta a incertidumbres de modelado acotadas para el predictor (método de reducción) con un único horizonte de predicción; un análisis similar en el caso de Predictor de Smith filtrado (introducido en Normey-Rico and Camacho (2009)) se hace en Normey-Rico et al. (2012), donde también se trasla-

dan algunas ideas de predictores de Smith a realimentación del estado.

Los objetivos de este trabajo son tres: (a) ampliar el análisis de estabilidad robusta en Gonzalez et al. (2013a) introduciendo criterios de desempeño adicionales, (b) ampliar dicho análisis al caso de procesos con retardos múltiples de los que sólo se conoce un rango de variación y (c) mejorar los controladores de realimentación del estado basados en predictor introduciendo una nueva opción donde un re-tardo variable podría ser parcialmente cancelado por una combinación ponderada de predictores (para cada uno de los posibles valores de re-tardo).

En los ejemplos numéricos se verá que la opción de re-tardo ponderado consigue mejores prestaciones y robustez que la de un predictor con horizonte de predicción único constante, pese a que la cancelación del re-tardo nunca sea perfecta.

La estructura del trabajo es la siguiente: en la sección siguiente se presentan una revisión de resultados preliminares, así como la notación a utilizar. En la Sección 3 se presentan los resultados principales. En la Sección 4 se muestra un ejemplo numérico ilustrativo, y finalmente en la Sección 5 se exponen las conclusiones.

2. Aspectos preliminares

En esta sección se introducirá la notación a utilizar y se revisarán resultados previos en literatura sobre los aspectos a tratar.

Considérese el sistema discreto lineal con incertidumbres en el modelo y re-tardo variable y desconocido en la entrada (del cual sólamente se conoce los valores de retardos mínimo d_m y máximo d_M):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + \Delta_{A_k})x_k + (B + \Delta_{B_k})u_{k-d_k} \quad \forall k \geq 0 \\ d_m \leq d_k &\leq d_M, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (1)$$

con condiciones iniciales arbitrarias:

$$x_k = \phi_k, \quad k = -d_M, -d_M + 1, \dots, 0 \quad (2)$$

Las matrices de incertidumbre $\Delta_{A_k}, \Delta_{B_k}$ se definen según el modelo estándar de incertidumbres variables acotadas en norma:

$$\begin{pmatrix} \Delta_{A_k} & \Delta_{B_k} \end{pmatrix} = \gamma_m G \Delta_k \begin{pmatrix} H_A & H_B \end{pmatrix} \quad (3)$$

donde G, H_A, H_B son matrices constantes y conocidas, de dimensiones apropiadas, y Δ_k es una matriz con entradas variables con el tiempo y desconocidas, que verifica $\Delta_k^T \Delta_k \leq I$, y γ_m es un escalar positivo cuyo valor determina el volumen de las incertidumbres (márgen de robustez).

Realización aumentada. Usando la propuesta de Hetel et al. (2008) para sistemas con re-tardo genéricos, el sistema anterior puede transformarse a un sistema *sin re-tardo* variante en el tiempo de orden $n + m \cdot d_M$, introduciendo variables de estado adicionales $\psi_k^{[j]}$ con ecuación $\psi_{k+1}^{[j]} = \psi_k^{[j-1]}, j = 1, \dots, d_M$, con $\psi_k^{[0]} \equiv u_k$ de modo que, con la citada elección de variables adicionales, se tiene que $\psi_k^{[j]} = u_{k-j}$.

Reescribiendo la ecuación del estado inicial del proceso (1) como la ecuación variante en el tiempo se tiene:

$$x_{k+1} = (A + \Delta_{A_k})x_k + (B + \Delta_{B_k})\psi_k^{[d_k]} \quad (4)$$

Creando un vector de estado extendido

$$\bar{x}^T = (x^T, \psi^{[1]T}, \psi^{[2]T}, \dots, \psi^{[d_M]T})^T \quad (5)$$

se puede construir una representación matricial ampliada cuya matriz de transición de estado tendría una estructura particular: las primeras n filas estarían formadas por la matriz A y un bloque B de posición cambiante, y las siguientes filas se formarían con filas de la matriz identidad. Se remite al lector a Hetel et al. (2008); Gonzalez et al. (2013a) para detalles sobre la construcción de dicha matriz.

Realimentación del estado con predictor.

Por otro lado, considérese la realimentación del estado basada en predictor Lozano et al. (2004) (versión discreta del método de reducción para sistemas continuos):

$$\begin{aligned} u_k &= \bar{K}\bar{x}_{k+h} \\ \bar{x}_{k+h} &= A^h x_k + \sum_{i=0}^{h-1} A^{h-i-1} B u_{k-h+i} \end{aligned} \quad (6)$$

donde \bar{x}_{k+h} representa la predicción de x_{k+h} con la información disponible hasta el instante k .

La ecuación de la dinámica del sistema en bucle cerrado en representación interna (espacio de estados) formado por el sistema (1) y la ley de control (6) se describe en el siguiente lema:

Lema 1 (Gonzalez et al. (2013a)). *Si A es invertible¹, la ecuación de la dinámica en bucle cerrado del sistema (1) con la ley de control (6) se puede expresar, introduciendo la notación $z_k = \bar{x}_{k+h}$, como²:*

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \tilde{A}_k z_k + B_{d,k} z_{k-d_k} + B_{h,k} z_{k-h} + \sum_{i=1}^h B_{i,k} z_{k-i} \quad (7) \\ \tilde{A}_k &= A + B\bar{K} + A^h \Delta_{A_k} A^{-h} \\ B_{d,k} &= A^h B\bar{K} + A^h \Delta_{B_k} \bar{K} \\ B_{h,k} &= -A^h B\bar{K} \\ B_{i,k} &= -A^h \Delta_{A_k} A^{i-h-1} B\bar{K} \end{aligned}$$

Demostración. Ver prueba del Lema 4.1 en Gonzalez et al. (2013a). \square

Observación 1. Obsérvese que el término sumatorio en (7) que contiene $B_{i,k}$ describe la acumulación de errores del modelo del proceso. Nótese que su magnitud crece proporcionalmente con

¹Nótese que la discretización de un sistema continuo con matriz de estado A_c , el resultado $A = e^{A_c T}$ nunca es una matriz singular.

²En este trabajo se hace el siguiente abuso de notación: $\sum_{i=p}^q \Xi_i = 0$ para $q < p$. Por ejemplo, si determinado sumatorio en los teoremas apareciera como $\sum_{i=3}^2 \Xi_i$, se sustituirá por cero en la implementación numérica.

el valor de h . Por tanto, es razonable pensar que existe un compromiso entre los beneficios conseguidos debido a la cancelación del efecto del retardo en la dinámica del proceso en bucle cerrado, en la medida en la que $h \approx d_k$, y la degradación en la respuesta producida por la acumulación de error de modelado en el cálculo de la predicción del estado \bar{x}_{k+h} en (6). Este compromiso indica la existencia de un valor "óptimo" de horizonte de predicción h .

Observación 2. Nótese que en ausencia de errores de modelado ($\Delta_{A_k} = 0$, $\Delta_{B_k} = 0$), y retardo en la entrada constante y conocido ($d_k = d = h$), la ecuación característica en bucle cerrado presentada en el Lema 1 es $z_{k+1} = (A + B\bar{K})z_k$. Ello justificaría, por tanto, el diseñar la ganancia del controlador \bar{K} sin tener en consideración el retardo.

Retardos múltiples.

Por otro lado, el método de reducción para sistemas con múltiples retardos permite eliminar el retardo de la ecuación característica del sistema transformado, cuando éstos son conocidos Manitius and Olbrot (1979); Artstein (1982). Considérese, por ejemplo, el siguiente sistema con múltiples retardos constantes en la entrada h_j , $j = 1, \dots, N_h$:

$$x_{k+1} = Ax_k + \sum_{j=1}^{N_h} B_j u_{k-h_j} \quad (8)$$

con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x(\kappa') &= \phi_x(\kappa'), \quad \kappa' = -\bar{h}, -\bar{h} + 1, \dots, 0 \\ \bar{h} &= \max_{1 \leq j \leq N_h} h_j \end{aligned}$$

Defínase la siguiente transformación del estado:

$$z_k = x_k + \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i=0}^{h_j-1} A^{-i-1} B_j u_{k-h_j+i} \quad (9)$$

Es fácil comprobar que con la ley de control $u_k = Kz_k$, la ecuación dinámica en bucle cerrado es $z_{k+1} = (A + \tilde{B}K)z_k$, definiendo $\tilde{B} = \sum_{j=1}^{N_h} A^{-h_j} B_j$ siguiendo un desarrollo paralelo al caso continuo discutido en las citadas referencias. La obtención de la dinámica de bucle cerrado ante error de modelado será discutida posteriormente en este trabajo.

Observación 3. En el caso particular de un único retardo en la entrada en el sistema (8), se puede ver fácilmente que se verifica la relación $\bar{x}_{k+h} = A^h z_k$ entre la predicción de x_{k+h} (6) y el estado transformado z_k definido en (9) tomando $N_h = 1$ y $h_1 = h$. Por tanto, la dinámica en bucle cerrado de $\bar{x}_{k+1} = (A + B\bar{K})\bar{x}_k$ es idéntica a la dinámica del sistema transformado $z_{k+1} = (A + A^{-h} BK)z_k$, donde $K = \bar{K}A^h$. En el caso de retardos múltiples, la interpretación de la transformación (9) como un predictor ya no es directa; no obstante, no sin un cierto abuso del lenguaje, se mantendrá, por razones históricas el término de predictor también para retardos múltiples.

Revisión de análisis de estabilidad con controladores basados en método de reducción ante retardo variable.

Aunque la literatura de análisis de estabilidad de sistemas con retardo variable es amplia Pan et al. (2006); Gao et al. (2008) e incluso algunos aspectos de sistemas de control en red están muy relacionados con el tema Salt et al. (2008), son escasas las contribuciones para el caso específico de estabilidad *robusta* con realimentación del estado basada en predictores³. Por otro lado, modelando los sistemas con retardo único y su control por método de reducción según el Lema 1, el análisis de su estabilidad y prestaciones ha sido abordado mediante varios enfoques:

- Realizaciones aumentadas : en Gonzalez et al. (2013a) se aborda el problema de análisis de estabilidad robusta para un único retardo con la ley de control (6).
- Funcionales Lyapunov-Krasovskii: Gonzalez et al. (2012a), Gonzalez et al. (2012b) tratando de trasladar al caso discreto los resultados continuos de Yue and Han (2005).
- Sistemas muestreados, estabilidad ante pequeñas variaciones de período de muestreo Lozano et al. (2004).

Formulación del problema a tratar,

El objetivo de este trabajo es, utilizando realizaciones aumentadas, el mejorar los resultados en literatura anteriormente citados en los siguientes aspectos:

1. Extensión al caso de múltiples retardos variables desconocidos en entrada,
2. Introducción de criterios de desempeño adicionales a la mera estabilidad robusta: tasa de decaimiento geométrico (velocidad de convergencia) y tasa de rechazo de perturbaciones H_∞ ,
3. Mejora del control de realimentación del estado basado en predictor introduciendo ciertos coeficientes de ponderación (a determinar) en la ecuación de transformación de estado definida en (9).

3. Resultado principal

Considérese la generalización del sistema (1) dada por el sistema incierto con N_d múltiples retardos en la entrada variables en el tiempo $d_{j,k}$, $j = 1, \dots, N_d$ y perturbación de proceso w_k dado por:

$$x_{k+1} = (A + \Delta_{A_k})x_k + \sum_{j=1}^{N_d} (B_j + \Delta_{B_{j,k}})u_{k-d_{j,k}} + (B_w + \Delta_{B_{w,k}})w_k \quad (10)$$

$$d_{j,m} \leq d_{j,k} \leq d_{j,M}, \quad j = 1, \dots, N_d$$

³Evidentemente, sin error de modelado ni variación de retardo, el análisis es trivial.

con las condiciones iniciales (arbitrarias):

$$x(\kappa') = \phi_x(\kappa'), \quad \kappa' = -\bar{d}_M, -\bar{d}_M + 1, \dots, 0$$

$$\bar{d}_M = \max_{1 \leq j \leq N_d} d_{j,M}$$

donde $d_{j,k}$ denota el valor variable del retardo j -ésimo en el instante k , que se sabe acotado por unos límites mínimo y máximo $d_{j,m}$ y $d_{j,M}$, respectivamente.

Las matrices de incertidumbre Δ_{A_k} , $\Delta_{B_{j,k}}$, ($j = 1, \dots, N_d$), $\Delta_{B_{w,k}}$ se definen según (3) como:

$$\begin{pmatrix} \Delta_{A_k} & \Delta_{B_{j,k}} & \Delta_{B_{w,k}} \end{pmatrix} = \gamma_m G \Delta_k \begin{pmatrix} H_A & H_{B_j} & H_{B_w} \end{pmatrix} \quad (11)$$

donde G , H_A , H_{B_j} ($j = 1, \dots, N_d$), H_{B_w} son matrices constantes y conocidas, de dimensiones apropiadas, y Δ_k se define de forma análoga a (3). Nótese que (1) corresponde al caso $N_d = 1$ aquí.

Para un análisis de prestaciones posterior, se considerarán, asimismo, unas variables a controlar sobre las que se desea limitar el efecto de w_k dadas por:

$$y_k = C_w x_k \quad (12)$$

Defínase ahora la siguiente transformación del estado que generaliza (9), donde se introducen múltiples retardos h_r , $r = 1, \dots, N_h$, y los coeficientes escalares $\beta_{r,j}$, con:

$$z_k = x_k + \sum_{r=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_d} \sum_{i=0}^{h_r-1} \beta_{r,j} A^{-i-1} B_j u_{k-h_r+i} \quad (13)$$

$$(r, j) \in [1, \dots, N_h] \times [1, \dots, N_d]$$

Los retardos h_r se suponen prefijados de antemano por el diseñador en base al conocimiento aproximado sobre los valores posibles del retardo del sistema, pudiendo ser interpretados como “horizontes” de predicción, en la línea de lo discutido en la observación 3 (adaptado al caso múltiple). Así, el número N_h indica el número de predictores y el número N_d indica el número de retardos del proceso.

Observación 4. Aunque en la literatura referenciada en secciones anteriores se considera $N_h = N_d$ (y en muchos casos $N_h = N_d = 1$), en un caso general, esa igualdad no tiene por qué darse y, en efecto, este trabajo analiza la flexibilidad adicional que aporta el suponer $N_h \neq N_d$.

La interpretación de los coeficientes $\beta_{r,j}$ propuestos en este trabajo es de “aproximar” el retardo $u_{k-d_{j,k}}$ (variable en el contexto de este trabajo) como una combinación de múltiples retardos fijos, $\sum_{r=1}^{N_h} \beta_{r,j} u_{k-h_r}$. Obviamente, dicha “aproximación” no es en absoluto exacta. El valor de las ponderaciones $\beta_{r,j}$ se ajustará posteriormente para obtener las mejores prestaciones, esto es, dado un controlador K diseñado para un cierto sistema con retardos constantes y conocidos (ver Corolario 1 posteriormente), obtener la ponderación de retardos que mejor mantiene las prestaciones del diseño original al usar una realimentación del estado basada en predictor expresada como $u_k = K z_k$, donde z_k se obtiene según (13).

Motivado por la observación anterior, el siguiente lema describe la ecuación dinámica del sistema incierto (10) aplicando la transformación de estado recién definida en (13), como base para un posterior análisis de estabilidad, robustez y prestaciones.

Lema 2. Si A es invertible, La dinámica del sistema en bucle cerrado formado por (10) y la ley de control $u_k = Kz_k$ (donde z_k es el estado transformado definido en (13)) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \tilde{A}_k z_k + (B_w + \Delta_{B_{w,k}}) w_k \\ &+ \sum_{j=1}^{N_d} \tilde{B}_{j,k}^d z_{k-d_{j,k}} - \sum_{r=1}^{N_h} \tilde{B}_r K z_{k-h_r} + \sum_{r=1}^{N_h} \sum_{i=1}^{h_r} \tilde{B}_{i,r,k} z_{k-i} \quad (14) \\ y_k &= C_w z_k - C_w \sum_{r=1}^{N_h} \sum_{i=1}^{h_r} A^{i-h_r-1} \tilde{B}_r K z_{k-i} \\ \tilde{A}_k &= A + \sum_{r=1}^{N_h} A^{-h_r} \tilde{B}_r K + \Delta_{A_k} \quad \tilde{B}_r = \sum_{j=1}^{N_d} \beta_{r,j} B_j \\ \tilde{B}_{j,k}^d &= B_j K + \Delta_{B_{j,k}} \\ \tilde{B}_{i,r,k} &= -\Delta_{A_k} A^{i-h_r-1} \tilde{B}_r K \end{aligned}$$

*Demuestra*cción. Se introduce por conveniencia el siguiente operador en u_k :

$$\Phi_{r,k}^u = \sum_{j=1}^{N_d} \sum_{i=0}^{h_r-1} \beta_{r,j} A^{-i-1} B_j u_{k-h_r+i} \quad (15)$$

Agrupando términos y permutando el orden de los sumatorios el operador anterior puede escribirse como:

$$\Phi_{r,k}^u = \sum_{i=0}^{h_r-1} A^{-i-1} \tilde{B}_r u_{k-h_r+i} \quad \tilde{B}_r = \sum_{j=1}^{N_d} \beta_{r,j} B_j \quad (16)$$

Reorganizando los índices del sumatorio en $\Phi_{r,k}^u$, puede escribirse como:

$$\Phi_{r,k}^u = \sum_{i=1}^{h_r} A^{i-h_r-1} \tilde{B}_r u_{k-i} \quad (17)$$

Es fácil verificar que el operador $\Phi_{r,k}^u$ satisface la siguiente equivalencia:

$$\Phi_{r,k+1}^u - A \Phi_{r,k}^u = A^{-h_r} \tilde{B}_r u_k - \tilde{B}_r u_{k-h_r} \quad (18)$$

Por otro lado, la transformación de estado z_k definido en (13) puede reescribirse de la forma:

$$z_k = x_k + \sum_{r=1}^{N_h} \Phi_{r,k}^u \quad (19)$$

El estado z_k en el instante $k+1$ equivale a:

$$z_{k+1} = x_{k+1} + \sum_{r=1}^{N_h} \Phi_{r,k+1}^u \quad (20)$$

Reemplazando x_{k+1} a partir de (10) se tiene:

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= (A + \Delta_{A_k}) x_k + \sum_{j=1}^{N_d} (B_j + \Delta_{B_{j,k}}) u_{k-d_{j,k}} + \\ &(B_w + \Delta_{B_{w,k}}) w_k + \sum_{r=1}^{N_h} \Phi_{r,k+1}^u \end{aligned} \quad (21)$$

Teniendo en cuenta z_k en (19) y la equivalencia (18), el estado del proceso x_k se puede sustituir en la ecuación anterior obteniendo:

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= (A + \Delta_{A_k}) z_k - \Delta_{A_k} \sum_{r=1}^{N_h} \Phi_{r,k}^u + (B_w + \Delta_{B_{w,k}}) w_k \\ &+ \sum_{j=1}^{N_d} (B_j + \Delta_{B_{j,k}}) u_{k-d_{j,k}} + \sum_{r=1}^{N_h} A^{-h_r} \tilde{B}_r u_k - \sum_{r=1}^{N_h} \tilde{B}_r u_{k-h_r} \quad (22) \end{aligned}$$

Por otro lado, la variable a controlar y_k , expresada en función del estado transformado z_k , se puede expresar como:

$$y_k = C_w z_k - C_w \sum_{r=1}^{N_h} \Phi_{r,k}^u \quad (23)$$

Finalmente, aplicando la ley de control $u_k = Kz_k$ y aplicando las manipulaciones pertinentes, se completa la demostración. \square

Corolario 1. En ausencia de errores de modelado, y asumiendo que los retardos son constantes y conocidos, la ecuación dinámica del sistema en bucle cerrado (14) es $z_{k+1} = (A + \tilde{B}K)z_k$, donde $\tilde{B} = \sum_{j=1}^{N_h} A^{-h_j} B_j$.

*Demuestra*cción. Se puede demostrar fácilmente tomando los valores $N_d = N_h$, $d_{k,j} = h_j$, $\Delta_{A_k} = 0$ y $\Delta_{B_k} = 0$, y los coeficientes $\beta_{r,j} = \delta(r, k)$ donde $\delta(r, k)$ es la función delta de Kronecker (esto es, $\delta(r, k) = 1$ si $r = k$ y $\delta(r, k) = 0$ en caso contrario). \square

El Corolario 1, en el caso de un único retardo se reduce a la Observación 3: entonces el Lema 2 se podría aplicar generando K a partir de una ganancia \tilde{K} que estabilice al sistema “nominal” sin retardo $A + B\tilde{K}$. En el caso múltiple, esta interpretación no es posible debido a la existencia de múltiples matrices B_j , con lo que se debe diseñar K de modo que estabilice al sistema sin retardo $A + \tilde{B}K$ pero \tilde{B} ya no es igual a ningún B_j particular sino una expresión que involucra a todos ellos. Estos resultados (sólo el caso particular de retardo conocido, sin error de modelado) son bien conocidos en literatura y la sección siguiente los generaliza al caso con error de modelado y variaciones de retardo.

Nótese que en el caso de los retardos “ponderados” se está, implícitamente, haciendo la suposición de que la dinámica del proceso es $x_{k+1} = Ax_k + \sum_{r=1}^{N_h} B_r \beta_{r,r} u_{k-h_r}$ y, por tanto, la aplicación del Corolario 1 a dicho sistema conllevaría diseñar un controlador de modo que $z_{k+1} = (A + \tilde{B}K)z_k$ fuera estable, con $\tilde{B} = \sum_{r=1}^{N_h} \beta_{r,r} A^{-h_r} B_r$. Este valor de \tilde{B} es el usado en el ejemplo en la Sección 4: con retardo único, si se dispone de una ganancia que estabilice al sistema sin retardo $x_{k+1} = (A + B\tilde{K})x_k$, entonces la ganancia $K = \tilde{K} \cdot \left(\sum_{r=1}^{N_h} \beta_{r,r} A^{-h_r} \right)^{-1}$ estabiliza $z_{k+1} = (A + \tilde{B}K)z_k$.

3.1. Análisis de estabilidad y prestaciones robustas en bucle cerrado

Una vez discutida la clase de predictores propuesta, el siguiente teorema extiende el resultado de Gonzalez et al. (2013a) al caso de retardos múltiples variables con especificaciones combinadas de tasa de decaimiento, de eliminación de perturbaciones en norma H_∞ y de robustez a error de modelado (con la estructura de incertidumbres normadas definida en (11)). El teorema supone que se aplica la ley de control generalizada a múltiples retardos ponderados $u_k = Kz_k$, con z_k definido en (13).

Defínase previamente el conjunto finito de vectores con todas las posibles combinaciones de retardos:

$$\mathcal{D} = \left\{ \hat{d} = (d_1, \dots, d_{N_d}) \mid d_{j,m} \leq d_j \leq d_{j,M}, j = 1, 2, \dots, N_d \right\} \quad (24)$$

Es fácil observar que el número de elementos del conjunto \mathcal{D} es $\prod_{j=1}^{N_d} (d_{j,M} - d_{j,m} + 1)$. Por ejemplo, si el número de retardos en el proceso es $N_d = 2$ (retardos de entrada d_1 y d_2 , respectivamente), donde $4 \leq d_1 \leq 5$ y $1 \leq d_2 \leq 3$, resulta el conjunto de 6 vectores $\mathcal{D} = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$.

El siguiente teorema enuncia el resultado principal de este trabajo:

Teorema 1. *El sistema en bucle cerrado formado por (1) y la ley de control $u_k = Kz_k$, con z_k definido en (13):*

1. es robustamente estable,
2. garantiza una tasa de rechazo de perturbaciones de la salida y_k respecto w_k : $\|T_{yw}\|_\infty \leq \gamma_w$ y
3. prueba una tasa de decaimiento geométrico α en la velocidad de convergencia ($\|x(k)\| \leq F\|x(0)\|\alpha^k, k > 0, F \in \mathcal{R}$),

si existe una matriz $P > 0$ y ciertos escalares $\rho_m > 0, \mu > 0$ que satisfacen las siguientes desigualdades matriciales lineales⁴ para todo vector \hat{d} en \mathcal{D} :

$$\begin{pmatrix} -\alpha^2 P & 0 & \bar{A}(\hat{d})^T P & \mu \bar{C}_w^T & 0 & \bar{H}^T(\hat{d}) \\ (*) & -\mu \gamma_w^2 I & \bar{B}_w^T P & 0 & 0 & H_{B_w}^T \\ (*) & (*) & -P & 0 & P \bar{G} & 0 \\ (*) & (*) & (*) & -\mu I & 0 & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & -\rho_m I & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (25)$$

$$\bar{d}_M = \max_{1 \leq j \leq N_d} d_{j,M}$$

donde:

$$\bar{A}(\hat{d}) = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_0 & \Gamma_1(\hat{d}) & \Gamma_2(\hat{d}) & \dots & \dots & \Gamma_{\bar{d}_M}(\hat{d}) \\ K & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Gamma}_0 = A + \sum_{r=1}^{N_h} A^{-h_r} \bar{B}_r K + \Gamma_0(\hat{d})$$

⁴El símbolo (*) denota el término necesario para formar una matriz simétrica, el símbolo I denota la matriz identidad de dimensiones apropiadas.

$$\begin{aligned} \Gamma_l(\hat{d}) &= \sum_{j=1}^{N_d} \delta(d_j, l) B_j - \sum_{r=1}^{N_h} \delta(h_r, l) \bar{B}_r \quad l = 0, \dots, \bar{d}_M \\ \bar{G} &= \begin{pmatrix} G^T & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T \\ \bar{H}(\hat{d})^T &= \begin{pmatrix} \{H_A + \sum_{j=1}^{N_d} \delta(d_j, 0) H_{B_j}\}^T \\ \{-H_A \sum_{r=1}^{N_h} \Lambda(h_r, 1) + \sum_{j=1}^{N_d} \delta(d_j, 1) H_{B_j}\}^T \\ \{-H_A \sum_{r=1}^{N_h} \Lambda(h_r, 2) + \sum_{j=1}^{N_d} \delta(d_j, 2) H_{B_j}\}^T \\ \vdots \\ \{-H_A \sum_{r=1}^{N_h} \Lambda(h_r, \bar{d}_M) + \sum_{j=1}^{N_d} \delta(d_j, \bar{d}_M) H_{B_j}\}^T \end{pmatrix} \\ \bar{B}_w &= \begin{pmatrix} B_w^T & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T \\ \bar{C}_w^T &= \begin{pmatrix} C_w^T \\ -[C_w \sum_{r=1}^{N_h} \Lambda(h_r, 1)]^T \\ -[C_w \sum_{r=1}^{N_h} \Lambda(h_r, 2)]^T \\ \vdots \\ -[C_w \sum_{r=1}^{N_h} \Lambda(h_r, \bar{d}_M)]^T \end{pmatrix} \\ \Lambda(h_r, j) &= \begin{cases} A^{j-h_r-1} \bar{B}_r & h_r \leq j \\ 0 & h_r > j \end{cases} \end{aligned}$$

Donde $\delta(i, j)$ es la delta de Kronecker, tal y como se define dentro del Corolario 1. Nótese que el número de LMIs es finito dado que así lo es el cardinal de \mathcal{D} . El valor máximo de tolerancia a incertidumbres de modelado se puede obtener resolviendo el problema de optimización convexa de minimizar ρ_m sujeto a las LMI anteriores. En caso de obtener una solución factible que satisfaga las desigualdades matriciales anteriores, el valor máximo de tolerancia a incertidumbres de modelado se obtiene como $\bar{\gamma}_m = \rho_m^{-1/2}$.

Demostración. De modo análogo a (5), considérese el estado ampliado del sistema

$$\bar{z}_k = (\bar{z}_k^T \quad u_{k-1}^T \quad \dots \quad u_{k-\bar{d}_M}^T)^T \quad (26)$$

y la siguiente función de Lyapunov cuadrática genérica, para cierta matriz $P > 0$ de dimensiones apropiadas:

$$V_k = \bar{z}_k^T P \bar{z}_k \quad (27)$$

y el conjunto de todas las posibles realizaciones del sistema (14) aumentado con \bar{z}_k :

$$\begin{aligned} \bar{z}_{k+1} &= \bar{A}_k^\Delta(\hat{d}) \bar{z}_k + \bar{B}_{w,k}^\Delta w_k \\ \bar{A}_k^\Delta(\hat{d}) &= \bar{A}(\hat{d}) + \gamma_m \bar{G} \Delta_k \bar{H}(\hat{d}) \\ \bar{B}_{w,k}^\Delta &= \bar{B}_w + \gamma_m \bar{G} \Delta_k H_{B_w} \end{aligned}$$

El sistema (14) es robustamente estable con una tasa de decaimiento geométrico α si V_k si satisface, para todas las realizaciones posibles, la siguiente condición:

$$\Delta_\alpha V_k(\hat{d}) < 0 \quad \Delta_\alpha V_k(\hat{d}) = V_{k+1}(\hat{d}) - \alpha^2 V_k \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha V_k(\hat{d}) &= \bar{z}_k^T [\bar{A}_k^{T'}(\hat{d}) P \bar{A}_k'(\hat{d}) - \alpha^2 P] \bar{z}_k + \bar{z}_k^T (\bar{A}_k^\Delta)^T(\hat{d}) P \bar{B}_{w,k}^\Delta w_k \\ &+ w_k^T (\bar{B}_{w,k}^\Delta)^T P \bar{A}_k^\Delta(\hat{d}) \bar{z}_k + w_k^T (\bar{B}_{w,k}^\Delta)^T P \bar{B}_{w,k}^\Delta w_k < 0 \end{aligned}$$

donde \hat{d} es el conjunto de vectores definidos al principio de la sección que define todas las realizaciones posibles a partir de la combinación de los valores de los retardos en la entrada.

El sistema será robustamente estable garantizando una tasa de rechazo de perturbaciones $\|T_{yw}\|_\infty \leq \gamma_w$ si para todo vector $\hat{d} \in \mathcal{D}$ se verifica la siguiente desigualdad:

$$\Delta_\alpha V_k(\hat{d}) + y_k^T y_k - \gamma_w^2 w_k^T w_k < 0 \quad (29)$$

donde teniendo en cuenta que $y_k = \bar{C}_w \bar{z}_k$, y aplicando el complemento de Schur, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} -\alpha^2 P & 0 & \bar{A}_k^T(\hat{d})P & \bar{C}_w^T \\ (*) & -\gamma_w^2 I & \bar{B}_{w,k}^T P & 0 \\ (*) & (*) & -P & 0 \\ (*) & (*) & (*) & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (30)$$

Teniendo en cuenta el lema para productos cruzados (Mao and Chu, 2009, Proposición 2), la desigualdad anterior es equivalente, para cierto escalar $\epsilon > 0$, a (31) en la página 8.

Aplicando nuevamente el Complemento de Schur se obtiene:

$$\begin{pmatrix} -\alpha^2 P & 0 & \bar{A}(\hat{d})^T P & \bar{C}_w^T & 0 & \epsilon \bar{H}^T(\hat{d}) \\ (*) & \gamma_w^2 I & \bar{B}_w^T P & 0 & 0 & \epsilon H_{B_w}^T \\ (*) & (*) & -P & 0 & \gamma_m P \bar{G} & 0 \\ (*) & (*) & (*) & -I & 0 & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & -\epsilon I & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & -\epsilon I \end{pmatrix} < 0 \quad (32)$$

redefiniendo la variable: $\hat{P} = P/\epsilon$, la desigualdad anterior se puede reescribir como:

$$\begin{pmatrix} -\epsilon \alpha^2 \hat{P} & 0 & \epsilon \bar{A}(\hat{d})^T \hat{P} & \bar{C}_w^T & 0 & \epsilon \bar{H}^T(\hat{d}) \\ (*) & \gamma_w^2 I & \epsilon \bar{B}_w^T \hat{P} & 0 & 0 & \epsilon H_{B_w}^T \\ (*) & (*) & -\epsilon \hat{P} & 0 & \epsilon \gamma_m \hat{P} \bar{G} & 0 \\ (*) & (*) & (*) & -I & 0 & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & -\epsilon I & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & -\epsilon I \end{pmatrix} < 0 \quad (33)$$

Finalmente, multiplicando a ambos lados de la desigualdad por $(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}) \text{diag}(I, I, I, I, \gamma_m^{-1} I, I)$, y tras redefinir las variables $P = \hat{P}$, $\rho_m = \gamma_m^{-2}$, $\mu = \epsilon^{-1}$ la prueba queda completada. \square

Observación 5. Para evitar conservadurismo, en el análisis para obtener la tasa de decaimiento robusta óptima habría que evaluar (25) con $\gamma_w \rightarrow \infty$ (equivalentemente, eliminar su fila y columna). Del mismo modo, para evaluar el óptimo en rechazo robusto de perturbaciones habría que, separadamente, plantear (25) con $\alpha = 1$ (en ambos casos, se mantendría el término de error de modelado al valor deseado de margen de robustez). Asimismo, si se fueran a plantear dichas condiciones simultáneamente sería aconsejable utilizar matrices de Lyapunov P diferentes para cada caso.

El resultado anterior tiene ciertos casos particulares de interés:

Corolario 2. Para el sistema sin retardo, haciendo $\bar{A}(\hat{d}) = A + BK$, $\bar{G} = G$, $\bar{H}(\hat{d}) = H_A + H_B K$, $\bar{B}_w = B_w$, y $\bar{C}_w = C_w$, la LMI (25) se convierte en condiciones clásicas en literatura de control \mathcal{H}_∞ (detalles omitidos por brevedad).

Observación 6. Las condiciones propuestas en este trabajo podrían hacerse más generales utilizando una función de Lyapunov $\bar{z}_k^T P(\hat{d}) \bar{z}_k$ diferente para cada configuración de retardo, y definiendo $\Delta_\alpha V = \bar{z}_{k+1}^T P(\hat{d}_1) \bar{z}_{k+1} - \alpha^2 \bar{z}_k^T P(\hat{d}_2) \bar{z}_k$ de modo que las LMI se deberían cumplir para todos los posibles pares (\hat{d}_1, \hat{d}_2) pertenecientes a $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$. Esto requeriría fáciles cambios en las LMIs omitidos por brevedad. El inconveniente es que si el cardinal de \mathcal{D} es grande, esta propuesta elevaría mucho el número de LMIs a resolver.

Corolario 3. En el caso de un único retardo de entrada en el sistema (10) (tomando $N_d = 1$, $d_{j,k} = d_k$, $\beta_{r,j} = 1$) y realimentación del estado con predictor clásica (horizonte único, $N_h = 1$) y considerando sólo estabilidad robusta, las condiciones propuestas se reducirían a las consideradas en (González et al., 2013a, Teorema 4.2)

3.2. Ajuste de los coeficientes de ponderación $\beta_{r,j}$

El algoritmo que se presenta en esta sección tiene como objetivo encontrar la máxima cota de robustez admisible sobre el sistema incierto con retardos variables descrito en (10) y aplicando la ley de control $u_k = K \bar{z}_k$, para una cierta ganancia de controlador K prediseñada que estabilice $A + (\sum_{r=1}^{N_h} A^{-h_r} \bar{B}_r) K$. Dado que si se fijan los $\beta_{r,j}$ el problema es convexo, se realizarán iteraciones entre optimización convexa y optimización por búsqueda de paso variable.

La cota de robustez obtenida debe garantizar un cierto nivel de especificaciones prefijados: tasa de decaimiento geométrico (velocidad de convergencia), y tasa de rechazo de perturbaciones H_∞ . Obviamente, el algoritmo puede reformularse fácilmente si se desea optimizar cualquiera de los otros criterios de desempeño (incluyendo, si se desea, el intervalo de retardo variable), en términos bien conocidos en optimización multicriterio (detalles omitidos por brevedad).

Previamente se introducen los siguientes parámetros:

- Contador de iteraciones κ y número máximo de iteraciones permitido (κ_{max}).
- Índices de los coeficientes $\beta_{r,j}$ a modificar: ι_r, ι_j , respectivamente ($1 \leq \iota_r \leq N_h$ y $1 \leq \iota_j \leq N_d$). Estos índices determinan qué coeficiente $\beta_{r,j}$ debe ser incrementado (o decrementado), si procede, en un determinado paso de iteración.
- Contador de máximos (θ_m): Es un contador que se incrementa cada vez que se alcanza un máximo local de $\bar{\gamma}_m$ sobre un determinado coeficiente $\beta_{r,j}$.
- Incremento Δ_β : Es el valor a sumar (o restar), si procede, al valor del coeficiente $\beta_{r,j}$ con $r = \iota_r$ y $j = \iota_j$.

El algoritmo propuesto, implementado en los ejemplos, es como sigue:

- *Paso 1:* Inicializar los coeficientes $\beta_{r,j}$, $r = 1, 2, \dots, N_d$, $j = 1, 2, \dots, N_h$ a un cierto valor arbitrario y fijar el valor del decaimiento geométrico al valor deseado de prestaciones $\alpha = \alpha_0$ (por ejemplo, $\alpha_0 = 1$ para análisis estabilidad pura). Como recomendación, se sugiere inicializar

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -\alpha^2 P & 0 & \bar{A}^T(\hat{d})P & \bar{C}_w^T \\ (*) & -\gamma_w^2 I & \bar{B}_w^T P & 0 \\ (*) & (*) & -P & 0 \\ (*) & (*) & (*) & -I \end{pmatrix} + \gamma_m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P\bar{G} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_k \begin{pmatrix} \bar{H}(\hat{d}) & H_{B_w} & 0 & 0 \end{pmatrix} + (*) < \\
& \begin{pmatrix} -\alpha^2 P & 0 & \bar{A}^T(\hat{d})P & \bar{C}_w^T \\ (*) & -\gamma_w^2 I & \bar{B}_w^T P & 0 \\ (*) & (*) & -P & 0 \\ (*) & (*) & (*) & -I \end{pmatrix} + \gamma_m \epsilon^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P\bar{G} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{G}^T P & 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} \bar{H}^T(\hat{d}) \\ H_{B_w}^T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{H}(\hat{d}) & H_{B_w} & 0 & 0 \end{pmatrix} < 0 \quad (31)
\end{aligned}$$

los coeficientes haciendo $\beta_{r,j} = 1$ si h_r coincide con el valor de retardo mínimo $d_{m,j}$, y cero para el resto⁵.

- **Paso 2:** Evaluar mediante el Teorema 1 y optimización convexa el valor óptimo de tolerancia $\bar{\gamma}_m$:

- si existe solución factible fijar $\bar{\gamma}_{m_0} = \bar{\gamma}_m$, $\iota_r = 1$, $\iota_j = 1$, $\theta_m = 1$;
- Caso contrario incrementar el valor de α hasta encontrar una solución factible y, en su caso, proceder como se describe anteriormente en este paso.

- **Paso 3:** Repetir los siguientes pasos desde $\kappa = 1$ hasta κ_{max} :

- **Paso 3.1:** Evaluar el valor óptimo $\bar{\gamma}_m$ mediante el Teorema 1, tomando⁶ $\beta_{r,j} = \beta_{r,j} + \Delta_\beta$, donde $r = \iota_r$ y $j = \iota_j$.
- **Paso 3.2:** Si se obtiene mejoría (esto es, $\bar{\gamma}_m > \bar{\gamma}_{m_{k-1}}$) actualizar el valor del coeficiente $\beta_{r,j}$ al nuevo valor $\beta_{r,j} + \Delta_\beta$, asignar $\bar{\gamma}_{m_k} = \bar{\gamma}_m$, e incrementar los índices⁷ ι_r, ι_j , y volver al Paso 3.1.
- **Paso 3.3:** Si $\bar{\gamma}_m \leq \bar{\gamma}_{m_{k-1}}$ o no existe solución factible, evaluar un nuevo $\bar{\gamma}_m$ mediante el Teorema 1, tomando $\beta_{r,j} = \beta_{r,j} - \Delta_\beta$, donde $r = \iota_r$ y $j = \iota_j$.
- **Paso 3.4:** Si $\bar{\gamma}_m > \bar{\gamma}_{m_{k-1}}$ actualizar el valor del coeficiente $\beta_{r,j}$ al nuevo valor $\beta_{r,j} - \Delta_\beta$ y proceder para el resto tal y como se describe en el Paso 3.2.
- **Paso 3.5:** Si $\bar{\gamma}_m \leq \bar{\gamma}_{m_{k-1}}$ o no existe solución factible, incrementar el contador de máximos $\theta_m = \theta_m + 1$.
- **Paso 3.6:** Si $\theta_m > N_h$ y si se ha alcanzado el decaimiento geométrico deseado, finalizar algoritmo. Si no se ha alcanzado el decaimiento geométrico deseado reducir α y volver al paso 3.1.

⁵Según parecen indicar los diferentes ejemplos numéricos en Gonzalez et al. (2013a) y Gonzalez et al. (2012b), los predictores no ponderados con retardos cercanos al retardo mínimo producen los mejores márgenes de estabilidad. Obviamente, esto no es cierto siempre y depende del modelo, de las cotas de error, etc. y por eso se sugiere meramente como un valor razonable para inicializar.

⁶Si la selección $\beta_{r,j}$ diera lugar a $(\sum_{r=1}^{N_h} \beta_{r,r} A^{-h_r})$ singular, incrementar los coeficientes $\beta_{r,j}$ con un pequeño incremento aleatorio repetidamente hasta que deje de serlo.

⁷el incremento de ambos índices se define de modo que todos los coeficientes $\beta_{r,j}$ puedan ser modificados a lo largo de la ejecución del algoritmo.

- **Paso 3.7:** Si $\theta_m \leq N_h$, incrementar los índices ι_r, ι_j , y volver al Paso 3.1.

Si al finalizar el algoritmo el valor del decaimiento geométrico es α entonces los coeficientes de ponderación $\beta_{r,j}$ calculados permite estabilizar el proceso garantizando la tasa a rechazo de perturbaciones y el valor de decaimiento geométrico especificados, además de una tolerancia a incertidumbres de modelado $\bar{\gamma}_m$. Obviamente, si $\alpha_{final} \geq 1$ no se ha conseguido encontrar una combinación de predictores $\beta_{r,j}$ que estabilice al sistema: debería rediseñarse la ganancia que estabiliza al sistema equivalente sin retardo, o intentar probar las prestaciones para un rango de retardos más pequeño.

Podrían, seguramente, construirse otros algoritmos de búsqueda de los $\beta_{r,j}$ más eficientes o que no caigan en posibles mínimos locales, adaptando alguno de los múltiples algoritmos de optimización *genéricos* disponibles en la literatura sobre el tema (por ejemplo, estimando el gradiente a partir de los incrementos, algoritmos genéticos, etc.) como Martínez et al. (2006); Caballero and Grossmann (2007). No obstante, el ahondar con más detalle en la selección del método de optimización no convexa más adecuado no es objetivo del presente trabajo y, en aplicaciones concretas complejas, podría ser de interés revisar otros algoritmos por si fuera pertinente su uso.

4. Ejemplo numérico

En esta sección se propone un ejemplo numérico de aplicación de las ideas propuestas anteriormente. Aunque los resultados son de aplicación a sistemas con múltiple retardo, se ha seleccionado un ejemplo de la literatura con un retardo simple para poder comparar con las soluciones propuestas con predictor de horizonte único $N_r = 1$ en literatura anterior de los autores, demostrando así las mejoras conseguidas con el control multi-predictor ponderado aquí propuesto. La comparación del predictor con horizonte único con otras estrategias en literatura (en particular, realimentación estática del estado) no es objeto del presente trabajo dado que ya ha sido discutida en Gonzalez et al. (2013a, 2012b), mostrándose las ventajas del control predictor.

Considérese el proceso del péndulo invertido discretizado a periodo $T_s = 30$ ms que aparece en Gao and Chen (2007), con un modelo de incertidumbres descrito según las ecuaciones (3)

con los siguientes valores de los parámetros:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_{k-d_k} + B_w w_k \\
 A_k &= A + G \Delta_k H_A \quad B_k = B + G \Delta_k H_B \\
 A &= \begin{pmatrix} 1,0078 & 0,0301 \\ 0,5202 & 1,0078 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -0,0001 \\ -0,0053 \end{pmatrix} \\
 G &= 0,01 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H_A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,1 \end{pmatrix} \\
 B_w &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

donde el estado del proceso $x_k = [x_{1,k}^T, x_{2,k}^T]^T$ se asume completamente accesible y el retardo variable de entrada está comprendido entre $1 \leq d_k \leq 3$. La incertidumbre Δ_k es una matriz de 2×3 con seis parámetros inciertos afectando cada uno a un elemento de A o B .

Como la filosofía general de la compensación del retardo es intentar aplicar diseños sin retardo a procesos con retardo, inicialmente se diseña un controlador por realimentación estática del estado para conseguir una máxima tolerancia a errores de modelado Δ_k sobre el sistema original *sin retardo*, manteniendo las siguientes especificaciones mínimas:

- Decaimiento geométrico: $\alpha = 0,95$.
- Tasa de rechazo \mathcal{H}_∞ a perturbaciones o dinámica no modelada: $\gamma_w = 100$.

La ley de control obtenida es $u_k = \bar{K}x_k$, donde la ganancia del controlador es $\bar{K} = (1013,7 \quad 203,6)$. Esta ley de control consigue una tolerancia a error de modelado de $\bar{\gamma}_m = 0,7004$.

Para aplicar el método de reducción, se considera la ley de control propuesta $u_k = K z_k$, donde z_k se define en (13). Se consideran tres retardos para horizonte de predicción ($N_r = 3$) en z_k : $h_1 = 1$, $h_2 = 2$ y $h_3 = 3$, de modo que K se obtiene a partir de \bar{K} según se indica en el Corolario 1, para estabilizar $A + \sum_{r=1}^{N_h} \tilde{B}_r K$, esto es, $K = \bar{K}(\beta_1 A^{-1} + \beta_2 A^{-2} + \beta_3 A^{-3})^{-1}$, donde a su vez se denota los coeficientes $\beta_{r,j}$ de la expresión (13) como $\beta_1 = \beta_{1,1}$, $\beta_2 = \beta_{2,1}$, $\beta_3 = \beta_{3,1}$, dado que $N_d = 1$ y por tanto j sólo toma un valor.

El objetivos del análisis de prestaciones robustas y optimización de la ponderación $\beta_{r,j}$ es verificar simultáneamente dos condiciones:

- *Decaimiento robusto*: analizar los márgenes de robustez para asegurar una cierta tasa de decaimiento prefijada (buscando el mayor margen optimizando sobre $\beta_{r,j}$)
- *Rechazo de perturbación \mathcal{H}_∞ robusto*: Seleccionar los $\beta_{r,j}$ de modo que el efecto de una perturbación en la entrada w_k sobre la variable de posición $x_{1,k}$, esto es, $C_w = (1 \quad 0)$ tenga una tasa de rechazo de perturbaciones $\gamma_w = \|T_{yw}\|_\infty \leq 100$ para cualquier planta dentro de las cotas de error de modelado calculadas.

Obviamente, la optimización multicriterio (tolerancia a error de modelado, tolerancia a perturbaciones, rapidez del transitorio)

genera un frente de Pareto de modo que, fijando dos de los tres criterios se obtiene una solución óptima respecto al tercero. De las condiciones arriba especificadas se, deduce que se fijan la tolerancia a error de modelado y a perturbaciones y se optimiza velocidad de respuesta, aunque, obviamente, ello no es la única opción de diseño.

Resultados.

El margen de error de modelado obtenido de modo que se verifiquen las anteriores condiciones se comparará con estrategias de horizonte único $N_r = 1$ de Gonzalez et al. (2013a), que servirán de punto de inicio al algoritmo.

En las tres primeras filas de la *Tabla 1* se muestra la tolerancia a incertidumbres de modelado que se consigue aplicando el Teorema 1 aplicando un único horizonte de predicción $h = 1$, $h = 2$ o $h = 3$, respectivamente. Estos resultados se han obtenido para análisis de estabilidad pura (fijando decaimiento geométrico $\alpha = 1$, $\gamma_w = 100$). Nótese que en los tres casos no se puede demostrar que el sistema en bucle cerrado sea estable (no existe solución factible).

Tal y como se indica en el Paso 2 del algoritmo de la sección 3.2, se incrementa el decaimiento geométrico hasta 1,51, valor que permite obtener una solución factible (pero inestable), y desde la cual se comienza a iterar a partir de los coeficientes iniciales $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0$ (que obtienen un mayor valor para $\bar{\gamma}_m$). En la cuarta fila de la *Tabla 1* se muestra los coeficientes que estabilizan el sistema con decaimiento $\alpha = 1$. El paso de incremento de los coeficientes se fija en $\Delta_\beta = 0,01$.

Tabla 1: Cálculo de $\bar{\gamma}_m$ para un decaimiento geométrico $\alpha = 1$ y tasa de rechazo de perturbaciones $\gamma_w = 100$

β_1	β_2	β_3	$\bar{\gamma}_m$
1	0	0	no factible [it. 1]
0	1	0	no factible
0	0	1	no factible
1.383	1.178	0.478	0,1084 [it. 762]

A la vista de la tabla, el análisis propuesto indica que el retardo variable tiene un efecto muy inestabilizante y, con el diseño sin retardo \bar{K} elegido, ningún predictor a horizonte único con $1 \leq h \leq 3$ puede ser probado estable con las LMI propuestas⁸. Sin embargo, los predictores de horizonte múltiple consiguen estabilidad robusta con tolerancia $\gamma_m = 0,1084$ a incertidumbre paramétrica y 0,01 (esto es, γ_w^{-1} , por teorema de pequeña ganancia) a dinámica no modelada y nolinealidad de norma acotada.

Obviamente, los múltiples objetivos (decaimiento, robustez a incertidumbre paramétrica, robustez a perturbaciones e incertidumbre exógenas) se podrían priorizar de forma diferente, dependiendo de la posible aplicación concreta.

Por ejemplo, partiendo de los coeficientes obtenidos anteriormente (cuarta fila de la *Tabla 1*), se vuelve a ejecutar el algoritmo de la sección 3.2 para optimizar el valor del decaimiento geométrico con una tolerancia a errores de modelado

⁸De hecho, son inestables, ver página siguiente.

de $\bar{\gamma}_m = 0,1$ y elevando la tasa de rechazo a perturbaciones a $\gamma_w = 10000$ (lo que implica, de hecho, que dicho rechazo deja de ser un objetivo de diseño). Como resultado se obtiene un decaimiento geométrico $\alpha = 0,971$ y los coeficientes encontrados son $\beta_1 = 1,305$, $\beta_2 = 1,131$, $\beta_3 = 0,486$. En ese caso, no obstante, la tolerancia a perturbaciones externas es muy pequeña (aunque la cota prefijada $\bar{\gamma}_m = 0,1$ provee de suficiente robustez a incertidumbres por el teorema de pequeña ganancia, siempre que tengan la estructura propuesta).

Simulaciones. En la Figura 1 (parte superior) se representa la evolución de la posición en los instantes de muestreo (estado $x_{1,k}$) a partir de un estado inicial de posición $x_{1,0} = 1$ y velocidad $x_{2,0} = 0$, con estos últimos coeficientes de ponderación. En la parte inferior de la Figura 1 se representa la acción de control. Nótese que el tiempo de establecimiento al 2% (en torno a 1.2 segundos), está dentro del margen impuesto por el decaimiento geométrico de 0,971 (aproximadamente de 1.7 segundos al 2% con periodo de muestreo $T_s = 0,03s$). En la Figura 2 se representa el patrón de retardo variable utilizado en la simulación (arbitriariamente elegido como aleatorio, dado que la estabilidad y tasa de decaimiento están garantizadas para cualquier posible patrón de retardo entre las cotas d_m y d_M).

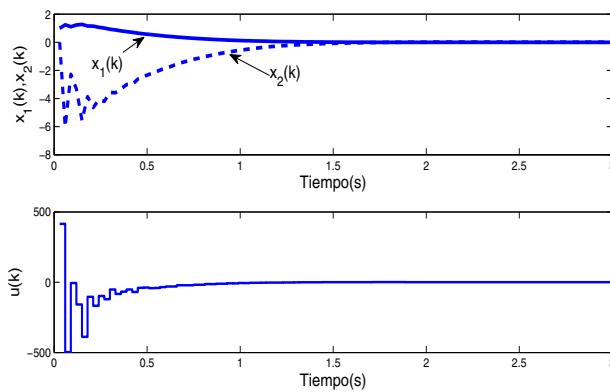


Figura 1: Evolución de los estados (parte superior) y acción de control u_k (parte inferior), con $\beta_1 = 1,305$, $\beta_2 = 1,131$, $\beta_3 = 0,486$

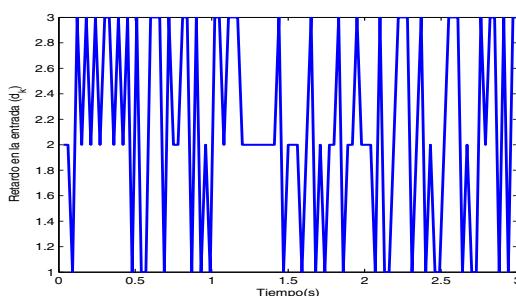


Figura 2: Retardo de entrada d_k utilizado en la simulación (aleatorio)

Comparación con otras propuestas en literatura.

FSA predictor simple. En cuanto a la comparación con propuestas de literatura a horizonte único, la simulación de los diseños de predictor a horizonte único (filas 1,2 y 3 de la Tabla 1) no es necesaria, dado que se puede comprobar, para cada una de las filas, que el polo dominante de al menos una de las realizaciones asociadas a los distintos posibles valores de retardo está fuera del círculo unidad. Por lo tanto, aunque las LMIs no factibles no implican necesariamente que el resultado sea inestable (son sólo condiciones *suficientes* de estabilidad, posiblemente conservativas), en este caso puede comprobarse explícitamente que *sí es inestable* (para un caso particular de retardo constante) y, por tanto, no es necesario simularlo.

Predictor de Smith filtrado en realimentación del estado. En Normey-Rico et al. (2012) se aborda el mismo ejemplo en el contexto del predictor de Smith filtrado, con el mismo modelo, período de muestreo y rango de retardo, con la ganancia⁹ $\bar{K} = (102,9100 \quad 80,7916)$. Dicho diseño se optimiza para retardo nominal fijo igual a 2 y polo dominante 0,9981; asimismo, se incorpora un filtro “robustificador” (véase la citada referencia para detalles sobre el procedimiento seguido). Posteriormente, se plantean condiciones LMI que prueban estabilidad (sin considerar error de modelado en dicho ejemplo) para retardo variable entre 1 y 3.

Comparando dichos resultados con los aquí presentados, con la misma ganancia \bar{K} , la optimización de $\beta_{r,j}$ propuesta produce un tiempo de establecimiento 10 veces menor que en la citada referencia (decaimiento geométrico $\alpha = 0,982$, con $\beta_1 = 0,010$, $\beta_2 = 0,199$ y $\beta_3 = 0,469$). Se remite al lector a comparar las figuras 10 y 11 de Normey-Rico et al. (2012) con la Figura 3 a continuación. Obviamente, dentro de la misma metodología, al ser ésta multicriterio, la optimización de otros criterios diferentes a la tasa de decaimiento habría dado lugar a respuestas temporales diferentes.

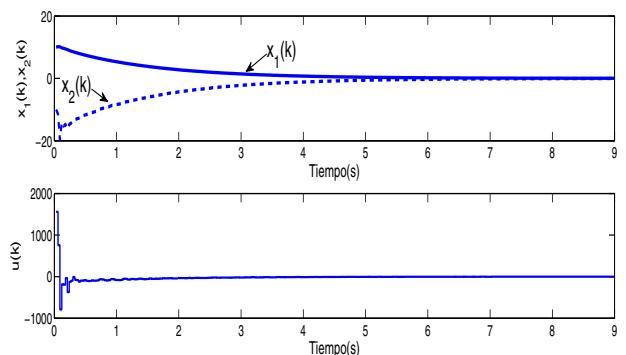


Figura 3: Evolución de los estados (parte superior) y acción de control u_k (parte inferior), con menor decaimiento geométrico $\alpha = 0,982$ y condiciones de estado iniciales: $x_1(0) = 10$, $x_2(0) = -10$

⁹En este caso, dado que los objetivos del caso nominal sin retardo eran diferentes, la ganancia “base” es diferente al caso anterior.

En definitiva, el ejemplo muestra cómo las técnicas propuestas permiten optimizar el diseño del predictor para conservar en lo posible las prestaciones nominales o robustas de un diseño inicial sin retardo ante retardos variables, y que la optimización multi-retardo consigue superar las prestaciones de estrategias con un único retardo ya que este último es un caso particular del aquí propuesto. Dependiendo del problema concreto, el ingeniero de control es el que debe decidir si la degradación de prestaciones o robustez originada por la presencia del retardo es o no aceptable, así como la priorización de los diferentes criterios de estabilidad/robustez para obtener el predictor que mejor los acomode.

Obviamente, la metodología podría extender el ejemplo a múltiples retardos e intervalos de retardo mayores. Ello aumentaría el número de coeficientes a optimizar y, atendiendo a consideraciones de compromiso especificaciones/robustez, las prestaciones de tasa de decaimiento geométrico obtenibles empeorarían. Como no dan lugar a ninguna conclusión sustancialmente nueva, no se ha considerado relevante incluir dichas situaciones en este trabajo.

5. Conclusiones

En este trabajo se generalizan resultados de literatura previa y se introduce una nueva propuesta de controlador basado en transformación del estado por método de reducción, donde los retardos múltiples tratan de ser compensados con una ponderación de retardos fijos.

El trabajo analiza la estabilidad robusta de los sistemas discretos inciertos con múltiples retardos variables en la entrada y la nueva ley de control propuesta. En el análisis se introduce también criterios de desempeño basados en el decaimiento geométrico y tasa de rechazo H_∞ a perturbaciones externas o dinámica no modelada.

Se propone un algoritmo iterativo basado en alternar un paso de optimización convexa y otro de optimización por búsqueda unidimensional a paso variable que optimiza la tolerancia a incertidumbres de modelado admisible dadas unas cotas de desempeño prefijadas. Los resultados con los retardos ponderados mejoran sensiblemente respecto a predictores con horizonte de predicción único en literatura, como muestra un ejemplo numérico dado que, en efecto, los predictores a horizonte de predicción único son un caso particular del predictor múltiple ponderado propuesto.

Agradecimientos

Los autores agradecen el soporte financiero del Gobierno Español (MINECO), proyecto DPI2011-27845-C02-01 (A. González, A. Sala), del proyecto PROMETEOII/2013/004 de la Generalitat Valenciana (A. Sala) y del Gobierno Francés (Ministère de Educación, CNRS, région Nord-Pas-de-Calais, Délégation Régionale à la Recherche et à la Technologie du Campus international sur la sécurité et l'intermodalité dans les transports – CISIT) y la Comunidad Europea (A. González).

English Summary

Weighted-delay predictor-based control: performance and robustness analysis with time-varying delay.

Abstract

Predictor-based controllers, in particular those obtained by Finite Spectrum Assignment (a.k.a. reduction) method, allow controlling systems with constant and known delays by using an equivalent delay-free model. However, if delay is time-varying or there exist uncertainties in the process model, delay effects cannot be exactly compensated. This work proposes a multiple weighted-delay predictor, where the weighting coefficients are computed by an iterative algorithm. Then, it will be proved that, given a pre-existing controller designed for some delay-free process, the proposed scheme achieves better robustness and performance than single-horizon predictors.

Keywords:

Time-varying delay, Finite Spectrum Assignment, reduction method, Linear matrix inequality

Referencias

- Artstein, Z., 1982. Linear systems with delayed control: A reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control* 27 (4), 869–879.
- Boukas, E., 2006. Discrete-time systems with time-varying time delay: stability and stabilizability. *Mathematical Problems in Engineering* 2006.
- Caballero, J., Grossmann, I., 2007. Una revisión del estado del arte en optimización. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 4 (1), 5–23.
- De Souza, C., Goodwin, G., Mayne, D., Palaniswami, M., 1988. An adaptive control algorithm for linear systems having unknown time delay. *Automatica* 24 (3), 327–341.
- Di Palma, F., Magni, L., 2004. A multi-model structure for model predictive control. *Annual Reviews in Control* 28 (1), 47–52.
- Du, D., Jiang, B., Zhou, S., 2008. Delay-dependent robust stabilisation of uncertain discrete-time switched systems with time-varying state delay. *International Journal of Systems Science* 39 (3), 305–313.
- Gao, H., Chen, T., 2007. New results on stability of discrete-time systems with time-varying state delay. *IEEE Transactions on Automatic Control* 52 (2), 328–334.
- Gao, H., Chen, T., Lam, J., 2008. A new delay system approach to network-based control. *Automatica* 44 (1), 39–52.
- Gao, H., Lam, J., Wang, C., Wang, Y., 2004. Delay-dependent output-feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay. *IEE Proceedings Control Theory and Applications* 151 (6), 691.
- García, C., Prett, D. M., Morari, M., 1989. Model predictive control: theory and practice - a survey. *Automatica* 25 (3), 335–348.
- García, P., Castillo, P., Lozano, R., Albertos, P., 2006. Robustness with respect to delay uncertainties of a predictor observer based discrete-time controller. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*.
- Gonzalez, A., García, P., Albertos, P., Castillo, P., Lozano, R., 2012a. Robustness of a discrete-time predictor-based controller for time-varying measurement delay. *Control Engineering Practice* 20 (2), 102–110.
- Gonzalez, A., Sala, A., Albertos, P., 2012b. Predictor-based stabilization of discrete time-varying input-delay systems. *Automatica* 48 (2), 454–457.
- Gonzalez, A., Sala, A., García, P., Albertos, P., 2013a. Robustness analysis of discrete predictor-based controllers for input-delay systems. *International Journal of System Science* 44 (2), 232–239.
- Gonzalez, A., Sala, A., Sanchis, R., 2013b. LK stability analysis of predictor-based controllers for discrete-time systems with time-varying actuator delay. *System & Control Letters* 62 (9), 764–769.

- Goodwin, G., Sin, K., 1984. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Guangdeng, Z., Linlin, H., Hongyong, Y., 2009. Further results concerning delay-dependent H_∞ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delay. *Mathematical Problems in Engineering* 2009.
- Hagglund, T., 1996. An industrial dead-time compensating PI controller. *Control Engineering Practice* 4 (6), 749–756.
- Hetel, L., Daafouz, J., Iung, C., 2008. Equivalence between the Lyapunov-Krasovskii functionals approach for discrete delay systems and that of the stability conditions for switched systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* 2 (3), 697–705.
- Liu, X., Martin, R., Wu, M., Tang, M., 2006. Delay-dependent robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delay. *IEE Proceedings Control Theory and Applications* 153 (6), 689.
- Lozano, R., Castillo, P., Garcia, P., Dzul, A., 2004. Robust prediction-based control for unstable delay systems: Application to the yaw control of a mini-helicopter. *Automatica* 40 (4), 603–612.
- Manitius, A., Olbrot, A., 1979. Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control* 24 (4), 541–552.
- Mao, W., Chu, J., 2009. D-stability and d-stabilization of linear discrete time-delay systems with polytopic uncertainties. *Automatica* 45 (3), 842–846.
- Martínez, M., Sanchis, J., Blasco, X., 2006. Algoritmos genéticos aplicados al diseño de controladores robustos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 3 (1), 39–51.
- Michiels, W., Niculescu, S., 2003. On the delay sensitivity of Smith predictors. *International Journal of Systems Science* 34 (8), 543–551.
- Nilsson, J., 1998. Real-time control systems with delays. Ph.D. dissertation, department of Automatic Control, Lund, Sweden: Lund Institute of Technology.
- Normey-Rico, J., Camacho, E., 2007. *Control of dead-time processes*. Springer Verlag.
- Normey-Rico, J., Camacho, E., 2009. Unified approach for robust dead-time compensator design. *Journal of Process Control* 19 (1), 38–47.
- Normey-Rico, J., Garcia, P., Gonzalez, A., 2012. Robust stability analysis of filtered smith predictor for time-varying delay processes. *Journal of Process Control* 22 (10), 1975–1984.
- Oliveira, V., Cossi, L., Teixeira, M., Silva, A., 2009. Synthesis of pid controllers for a class of time delay systems. *Automatica* 45 (7), 1778–1782.
- Palmor, Z., 1996. Time-delay compensation smith predictor and its modifications. *The Control Handbook* 1, 224–229.
- Pan, Y., Marquez, H., Chen, T., 2006. Stabilization of remote control systems with unknown time varying delays by LMI techniques. *International Journal of Control* 79 (7), 752–763.
- Peng, C., Yue, D., Sun, J., 2004. The study of Smith prediction controller in NCS based on time-delay identification. In: *Control, Automation, Robotics and Vision Conference, 2004. ICARCV 2004 8th. Vol. 3*. IEEE, pp. 1644–1648.
- Richard, J., 2003. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica* 39 (10), 1667–1694.
- Salt, J., Casanova, V., Cuenca, A., Pizá, R., 2008. Sistemas de control basados en red modelado y diseño de estructuras de control. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 5 (3), 5–20.
- Silva, G., Datta, A., Bhattacharyya, S., 2005. *PID controllers for time-delay systems*. Birkhauser, Boston.
- Smith, O., 1957. Closer Control of loops with dead time. *Chemical Engineering Progress* 53 (5), 217–219.
- Valter, J., et al., 2008. Robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delay: an LMI approach. *Mathematical Problems in Engineering* 2008.
- Wang, Q., Lee, T., Tan, K., 1998. *Finite spectrum assignment for time-delay systems*. Springer Verlag.
- Yong, H., Min, W., Qinglong, H., Jinhua, S., 2008. Delay-dependent H_∞ control of linear discrete-time systems with an interval-like time-varying delay. *International Journal of Systems Science* 39 (4), 427–436.
- Yue, D., Han, Q., 2005. Delayed feedback control of uncertain systems with time-varying input delay. *Automatica* 41 (2), 233–240.
- Zhang, B., Xu, S., Zou, Y., 2008. Improved stability criterion and its applications in delayed controller design for discrete-time systems. *Automatica* 44 (11), 2963–2967.
- Zhong, Q., 2006. *Robust control of time-delay systems*. Springer Verlag.