



## Estabilización del Péndulo Invertido Sobre Dos Ruedas mediante el método de Lyapunov

O. Octavio Gutiérrez Frías\*

UPIITA-Instituto Politécnico Nacional, Av. Instituto Politécnico Nacional 2580, Barrio La Laguna Ticomán, GAM, 07340 México D.F., México.

### Resumen

En este trabajo, se presenta un controlador no lineal para estabilizar el sistema Péndulo Invertido Sobre Dos Ruedas. Como primera etapa la estrategia de control, se basa en una linealización parcial por realimentación, para posteriormente proponer una función candidata de Lyapunov en combinación con el principio de invariancia de LaSalle con el fin de obtener el controlador estabilizador. El sistema en lazo cerrado obtenido es asintóticamente estable localmente alrededor del punto de equilibrio inestable, con un dominio de atracción calculable. Copyright © 2013 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

### Palabras Clave:

Sistema Subactuado, Péndulo Invertido Sobre Dos Ruedas, Método de Lyapunov, Control No Lineal.

### 1. Introducción

Los sistemas péndulos invertidos en los últimos años han sido considerados por los investigadores como sistemas de pruebas de distintas estrategias de control (Lozano et al., 2000), (Aguilar and Gutiérrez, 2008), (Bloch et al., 2000), (Åström and Furuta, 2000), (Shiriaev et al., 2004). En el caso del Péndulo Invertido Sobre Dos Ruedas (**PISDR**) ha llamado la atención recientemente, dando la pauta a varios trabajos como son: (Balogh and Parent, 2003), (Salerno and Angeles, 2003), (Kim et al., 2005), (Kalra et al., 2007), (Ren et al., 2008), (Vermeiren et al., 2011), por mencionar algunos. Este dispositivo consiste en un péndulo con libertad para rotar conectado a dos ruedas actuadas por motores de corriente directa siendo una versión simplificada del sistema denominado *Segway* (Segway Inc., 2011). El objetivo principal de control en este sistema, es mantener en la posición vertical al péndulo y las ruedas en reposo. Además, como la aceleración angular del péndulo no puede controlarse directamente, el sistema se considera un sistema subactuado. En lo que refiere al control de este sistema existen en la literatura algunos trabajos que abordan el tema. Grasser et al. (Grasser et al., 2002) diseñaron en 2002, un vehículo basado en un Péndulo Invertido Sobre Dos Ruedas denominado JOE, proponiendo dos controladores para estabilizar la dinámica del sistema. En (Pathak et al., 2005) se presenta un análisis del modelo dinámico desde el punto de vista de controlabilidad y linealización, para posteriormente proponer una estrategia que utiliza

la linealización parcial por realimentación, obteniendo dos controladores, uno de posición y otro de velocidad. Viguria et al. en (Viguria et al., 2006) desarrollaron un prototipo de vehículo que usa la estabilización del péndulo invertido, implementando dos leyes de control (lineal y no lineal), con el cual se obtuvo un sistema de experimentación que permite el estudio de diversos controladores. En (Jeong and Takahashi, 2008), se propone un robot para la asistencia humana basado en el péndulo móvil para colaborar con el ser humano en distintas tareas. Otro trabajo interesante, es la propuesta de Khac Duc et al. (Do and Seet, 2010), en la cual solucionan el problema de control de este sistema mediante técnicas de saturación anidadas. Existen otros trabajos, en los cuales se han propuesto soluciones al problema usando diversas técnicas como: redes neuronales (Noh et al., 2010), control por modos deslizantes (J. Huang et al., 2010) y control lineal (Nawawi et al., 2008). Podemos mencionar, que en la literatura todavía no se ha reportado una solución general al problema de estabilización de este tipo de sistema.

En este artículo, se desarrolla una ley de control no lineal para estabilizar el sistema Péndulo Invertido Sobre Dos Ruedas, la cual permite estabilizar asintóticamente y localmente el sistema en lazo cerrado, teniendo una región de atracción grande que puede calcularse. La estrategia de control se basa en el método de Lyapunov combinado con una realimentación parcial. El trabajo se organiza de la siguiente manera: La sección 2 describe el modelo dinámico del **PISDR** y una linealización parcial. En la sección 3 se obtiene una ley de control para estabilizar el **PISDR** alrededor del punto de equilibrio inestable. En esa misma sección se presenta el análisis de estabilidad del

\*Autor en correspondencia.

Correo electrónico: [ogutierrezf@ipn.mx](mailto:ogutierrezf@ipn.mx) (O. Octavio Gutiérrez Frías)

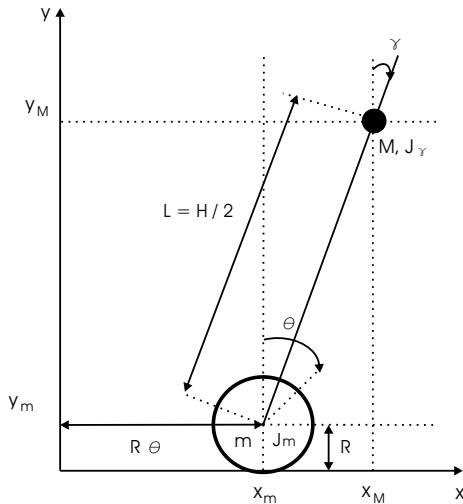


Figura 1: Péndulo Invertido Sobre Dos Ruedas.

sistema en lazo cerrado. La sección 4 presenta algunas simulaciones numéricas. La sección 5 está dedicada a las conclusiones. Finalmente, en la última sección se presentan algunos apéndices.

## 2. Modelo del péndulo invertido sobre dos ruedas

El Péndulo Invertido Sobre Dos Ruedas mostrado en la Figura 1, es un sistema mecánico que consiste en un péndulo invertido conectado a dos ruedas actuadas por motores de corriente directa<sup>1</sup>, el cual puede girar libremente. El modelo no lineal puede ser obtenido mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange (Yamamoto, 2009) y esta definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [(2m + M)R^2 + 2J_m]\ddot{\theta} + MLR\cos\gamma\ddot{\gamma} - MLR\dot{\gamma}^2\sin\gamma &= f \\ MLR\cos\gamma\ddot{\theta} + [ML^2 + J_y]\ddot{\gamma} - MgL\sin\gamma &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\theta$  y  $\gamma$  son el ángulo de rotación de las ruedas y el ángulo de inclinación del péndulo, respectivamente. El voltaje aplicado a los motores de las ruedas está representado por la variable  $f$ . Los parámetros  $M$  y  $J_y$  corresponden a la masa y momento de inercia del péndulo;  $m$ ,  $J_m$  y  $R$  son la masa, el momento de inercia y el radio de las ruedas. Finalmente,  $L$  es la distancia del centro de gravedad del péndulo al eje de las ruedas.

Con el fin de normalizar el sistema y simplificar los cálculos algebraicos subsecuentes, se proponen las siguientes constantes positivas y variables de escalamiento.

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\frac{g}{L}}t & u &= \frac{f}{MRg} \\ \mu &= \frac{R}{L} & \eta &= \left(1 + \frac{J_y}{ML^2}\right) \\ \delta &= 2\left(\frac{J_m + mR^2}{MR^2}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Por lo tanto, el sistema obtenido se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (\delta + 1)\mu\ddot{\theta} + \cos\gamma\ddot{\gamma} - \dot{\gamma}^2\sin\gamma &= u \\ \mu\cos\gamma\ddot{\theta} + \eta\ddot{\gamma} - \sin\gamma &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

donde, el símbolo “derivada” corresponde a la diferenciación con respecto al tiempo normalizado (adimensional)  $\tau$ . Al aplicar una linealización por realimentación parcial al sistema expresado en (3) de la forma (ver (Spong, 1996)).

$$u = a_0v + a_1 \quad (4)$$

con

$$\begin{aligned} a_0 &= (\delta + 1)\mu - \frac{\mu}{\eta}\cos^2\gamma \\ a_1 &= \frac{1}{\eta}\cos\gamma\sin\gamma - \dot{\gamma}^2\sin\gamma \end{aligned} \quad (5)$$

El sistema normalizado (3) es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma} &= \frac{1}{\eta}\sin\gamma - \frac{\mu}{\eta}\cos\gamma v \\ \ddot{\theta} &= v \end{aligned} \quad (6)$$

Entonces, el conjunto de ecuaciones diferenciales (6) puede expresarse como:

$$\dot{q} = f(q) + g(q)v \quad (7)$$

siendo

$$f(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta}\sin\gamma \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}; g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\mu}{\eta}\cos\gamma \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y  $q = (\gamma, \dot{\gamma}, \theta, \dot{\theta})$ . Cabe hacer notar, que cuando  $v = 0$  y  $\gamma \in [0, 2\pi]$  el sistema tiene dos puntos de equilibrio:  $q = (0, 0, 0, 0)$  y  $q = (\pi, 0, 0, 0)$ , los cuales son inestable y estable, respectivamente.

**Formulación del Problema:** El objetivo primordial es proponer un controlador que estabilice asintóticamente el sistema alrededor del punto de equilibrio inestable utilizando el método de Lyapunov, suponiendo que el péndulo se encuentra inicialmente en el semiplano superior  $I_s = (-\gamma_s, \gamma_s)$  con  $\gamma_s < \pi/2$ . En otras palabras, la intención es llevar el péndulo a la posición superior y la posición angular de la rueda a cero, de manera simultanea.

Finalmente, examinando la relación  $\mu/\eta$ , podemos comentar que si esta fuera muy pequeña, el diseño de la estrategia de estabilización es más complicado (o imposible cuando  $\mu/\eta \rightarrow 0$ ). Esto se puede observar en la primera ecuación del modelo (6), donde no existiría una acción de control adecuada que actuara sobre la variable  $\gamma$  haciendo más difícil la estabilización del sistema, aunque se tenga un dominio de atracción adecuado. Por el contrario, cuando  $\mu/\eta$  es lo suficiente grande, es posible obtener un controlador que estabilice al sistema. Una manera de sencilla de verificar lo anterior, es a partir de analizar la controlabilidad del sistema linealizado (Ver Apéndice A).

<sup>1</sup>En este caso el péndulo está restringido a moverse únicamente en un plano bidimensional.

### 3. Estrategia de Control

En esta sección, se establecen los aspectos para diseñar el controlador  $v$ , que estabilice al sistema alrededor del punto de equilibrio inestable mediante el método de Lyapunov. La idea principal consiste en proponer una función definida positiva (o Función de Lyapunov)  $V(q)$ , de tal manera que su derivada sea al menos semi-definida negativa para un dominio de atracción. Para posteriormente, aplicar el teorema de invariancia de LaSalle para determinar la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado.

#### 3.1. Función candidata a Lyapunov

Inspirado en el trabajo presentado en (Aguilar et al., 2005), se construirá la función  $V$  definida positiva localmente cuya derivada sea disipativa con respecto a la variable auxiliar  $\dot{\xi}(q) = \dot{\theta} + g'_1(\gamma)\dot{\gamma}$ , donde la función  $g'_1(\gamma) = \frac{\partial g_1}{\partial \gamma}$  será calculada posteriormente.

Proponemos la siguiente función positiva.

$$V(q) = \frac{\dot{\xi}^2(q)}{2} + \frac{k_r \xi^2}{2} + l\psi(q) \quad (8)$$

donde  $k_r$  y  $l$  son constantes positivas y la función  $\psi(q)$  se seleccionará tal que

$$\frac{\partial \psi(q)}{\partial q} f(q) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \psi(q)}{\partial q} g(q) = \dot{\xi} \quad (9)$$

Por tal motivo, para poder encontrar una solución simple a  $\psi(q)$  se sugiere que  $\partial\psi/\partial\dot{\theta} = \dot{\theta}$ , entonces de la ecuación del lado derecho de (9) se obtiene:

$$\dot{\xi}(q) = \dot{\theta} - \frac{\mu}{\eta} \cos \gamma \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\gamma}} \quad (10)$$

Tomando en cuenta que  $\dot{\xi}(q) = \dot{\theta} + g'_1(\gamma)\dot{\gamma}$  y sustituyendo en (10) tenemos la siguiente relación:

$$\frac{\partial g_1(\gamma)}{\partial \gamma} \dot{\gamma} = -\frac{\mu}{\eta} \cos \gamma \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\gamma}} \quad (11)$$

De la ecuación (11), se propone que la función  $\psi$  tenga la siguiente forma:

$$\psi(q) = \frac{h_1}{2} \dot{\gamma}^2 + \frac{\dot{\theta}^2}{2} + w(\gamma) \quad (12)$$

donde la función escalar  $w(\gamma)$  y la constante  $h_1$  se determinan al sustituir la función  $\psi(q)$  en la ecuación del lado izquierdo de (9) obteniendo:

$$\dot{\gamma} \left( \frac{h_1}{\eta} \sin \gamma + \frac{\partial w}{\partial \gamma} \right) = 0 \quad (13)$$

De tal manera que  $w(\gamma) = \frac{h_1}{\eta}(\cos \gamma - 1)$ , siendo  $h_1 = -k_p$  y  $k_p > 0$ .

**Lema 1:** Considera la función de Lyapunov  $V$  descrita en (8), donde  $\psi(q)$  se representa como:

$$\psi(q) = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{k_p}{2} \dot{\gamma}^2 + \frac{k_p}{\eta} (1 - \cos \gamma) \quad (14)$$

Por lo tanto,  $V$  es definida positiva localmente para  $\gamma \in I_s$ , donde el conjunto  $I_s$  y  $\gamma_s$  están definidos por

$$I_s = \{\gamma \in \mathbb{R} : |\gamma| < \gamma_s < \pi/2\} \\ \gamma_s = \cos^{-1} \sqrt{\frac{1+l}{k_p \left(\frac{u}{\eta}\right)^2}} \quad (15)$$

de tal forma que se debe satisfacer que:

$$\frac{1+l}{k_p} > \left(\frac{\mu}{\eta}\right)^2$$

Finalmente, las variables auxiliares se proponen como:

$$\xi(q) = \theta + k_p \frac{\mu}{\eta} \sin \gamma \quad , \quad \dot{\xi}(q) = \dot{\theta} + k_p \frac{\mu}{\eta} \cos \gamma \dot{\gamma} \quad (16)$$

*Demuestra:*

De la definición de  $V$  dada en (8) y (14) podemos expresarla de la siguiente manera:

$$V(q) = E_p(q) + E_c(q)$$

donde  $E_p(q)$  es la energía potencial del sistema en lazo cerrado

$$E_p(q) = k_r \frac{\dot{\xi}^2}{2} + l \frac{k_p}{\eta} (1 - \cos \gamma)$$

y  $E_c(p)$  define la energía cinética

$$E_c(q) = \frac{\dot{\xi}^2}{2} + l \frac{\dot{\theta}^2}{2} - l \frac{k_p}{2} \dot{\gamma}^2$$

Claramente, de la definición de  $\xi$ , podemos decir que  $E_p(q)$  es definida positiva globalmente, porque para todo  $q \neq 0$ ,  $E_p(q) > 0$ . A continuación, se analizará si  $E_c > 0$  para todo  $\gamma \in I_s$ , por consiguiente, partiendo del hecho que  $E_c$  se puede expresar como una forma cuadrática  $z^T Q z$  donde

$$Q = \begin{bmatrix} 1+l & \frac{k_p \mu}{\eta} \cos \gamma \\ \frac{k_p \mu}{\eta} \cos \gamma & \frac{k_p^2 \mu^2 \cos^2 \gamma}{\eta^2} - k_p l \end{bmatrix}$$

y  $z^T = (\dot{\theta}, \dot{\gamma})$ . Por lo tanto,  $E_c(q)$  es definida positiva localmente si el determinante de la matriz  $Q$  es positivo es decir:

$$k_p l (- (1+l) + k_p \frac{\mu^2}{\eta^2} \cos^2 \gamma) > 0$$

Por consiguiente, la función de Lyapunov propuesta es definida positiva localmente para todo  $\gamma \in I_s$ . ■

#### 3.2. Ley de Control No Lineal

Tomando como referencia la función de Lyapunov  $V$  propuesta previamente en (8), se procede a calcular su derivada con respecto al tiempo a lo largo de la trayectoria del sistema (7) y empleando (9) se obtiene la siguiente expresión.

$$\dot{V}(q) = \dot{\xi} \left[ \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial q} f(q) + \left( \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial q} g(q) + l \right) v + k_r \xi \right] \quad (17)$$

Por lo tanto, de la expresión de (17), se propone la siguiente ley de control no lineal

$$v = -\frac{\dot{\xi} + g_b}{g_a} \quad (18)$$

donde

$$\begin{aligned} g_a &= \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial q} g(q) + l = 1 + l - k_p \frac{\mu^2}{\eta^2} \cos^2 \gamma \\ g_b &= \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial q} f(q) + k_r \xi = \frac{k_p \mu}{\eta} \left( \frac{\cos \gamma}{\eta} - \dot{\gamma}^2 \right) \sin \gamma + k_r \xi \end{aligned} \quad (19)$$

la cual produce que

$$\dot{V}(q) = -\dot{\xi}^2 \quad (20)$$

Cabe mencionar, que la ley de control propuesta en (18) no tiene singularidades, es decir,  $g_a = 0$ , y con el fin de evitar este problema es suficiente que las condiciones  $q_0 = (\gamma_0, \dot{\gamma}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0)$ , con  $\gamma_0 \in I_s$  pertenezca a una vecindad del origen tal que

$$V(q_0) < K_s = \frac{k_r}{2} \left( k_p \frac{\mu}{\eta} \sin \gamma_s \right)^2 + l \frac{k_p}{\eta} (1 - \cos \gamma_s) \quad (21)$$

por lo tanto, se pueden deducir de la ecuación (20) que la función V es decreciente.

*Nota 1:* Es importante mencionar que la desigualdad propuesta en (21) define la región de estabilidad para el sistema en lazo cerrado. Es decir, para cualquier condición iniciales  $q_0$ , tal que  $V(q_0) < K_s$ , con  $\gamma_0 \in I_s$ , se deduce que  $V(q(t)) < K_s$  y  $|\dot{\gamma}(t)| < \gamma_s$ . La Figura 5 muestra la curva de nivel de  $V(q)$ , observando que el conjunto definido por  $\{q \in R^4 : V(q) < K_s\}$  es un conjunto compacto. Entonces, debido a lo anterior, podemos definir un conjunto compacto  $\Omega$  como:

$$\Omega = \{q = (\gamma, \dot{\gamma}, \theta, \dot{\theta}), |\gamma| < \pi/2 : V(q) < K_s\} \quad (22)$$

En otras palabras, el conjunto  $\Omega$  tiene la propiedad que todas las soluciones para el sistema en lazo cerrado (conformado por las ecuaciones (6) y (18)) que inician en  $\Omega$  permanecen en  $\Omega$  para todo el tiempo. Podemos decir que,  $\Omega$  es un conjunto invariante para el sistema en lazo cerrado y este será usado para aplicar el Teorema de Invariancia de LaSalle.(Khalil, 2002).

### 3.3. Análisis de estabilidad

Debido, a que la función  $V(q)$  es definida positiva para  $q \in \Omega$  y la función  $\dot{V}(q)$  es semidefinida positiva, podemos concluir que el punto de equilibrio  $q_0 \in \Omega$  es estable en el sentido de Lyapunov. Esto implica que  $q$  es acotada para cualquier condición inicial tal que  $q_0 \in \Omega$ . Para finalizar la prueba recurriremos al teorema de invariancia de LaSalle.

Se define el siguiente conjunto

$$S = \{q \in \Omega : (\dot{\theta} + k_p \frac{\mu}{\eta} \cos \gamma \dot{\gamma})^2 = \dot{\xi}^2 = 0\} \quad (23)$$

Enseguida, se procede a calcular el conjunto invariante  $M \subset S$ . El teorema de LaSalle garantiza que cualquier solución que

inicia en el conjunto compacto  $\Omega$  se aproximan a  $M$  como  $t \rightarrow \infty$  (Khalil, 2002).

Podemos observar, del conjunto  $S$  que  $\xi = \bar{\xi}$  y  $\dot{\xi} = 0$ , donde  $\bar{\xi}$  es constante, además, de las expresiones (17) y (18) es claro que la ley de control se seleccionó tal que

$$\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial q} f(q) + \left( \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial q} g(q) + l \right) v + k_r \xi = 0 \quad (24)$$

y sustituyendo

$$\ddot{\xi} = \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial q} (f(q) + g(q)v)$$

en la ecuación (24) obtenemos:

$$k_r \bar{\xi} + lv = 0 \quad (25)$$

Entonces, la entrada  $v$  es constante en  $S$ , dada por  $v = \bar{v} = -\frac{k_r \bar{\xi}}{l}$  y de la primera ecuación del sistema (6), tenemos

$$\ddot{\theta} = -\frac{k_r \bar{\xi}}{l} \quad (26)$$

Se analizarán los siguientes dos casos:

*Caso 1:* Si la constante  $\bar{\xi} \neq 0$ , entonces  $\theta(t)$  y  $\dot{\theta}(t)$  no están acotadas en  $S$ , por tanto  $\ddot{\theta}$  es estrictamente positiva o negativa, siendo este hecho una contradicción. Además, cuando  $\bar{\xi} = 0$ , tenemos que  $\dot{\theta} = 0$ , por tanto  $\dot{\theta}$  es constante, provocando otra vez que  $\theta$  no esté acotada en  $S$  y por tal motivo tenemos una contradicción. Intuitivamente este caso significa que es imposible mantener el péndulo en la posición vertical, si el movimiento de las ruedas es en una sola dirección.

*Caso 2:* Si  $\theta = 0$  y  $\dot{\xi} = 0$ , esto implica de la definición de la variable  $\xi$  que se obtenga lo siguiente:

$$\gamma = \sin^{-1} \frac{\bar{\xi} \eta}{k_p \mu} = 0 \quad (27)$$

y consecuentemente  $\gamma = 0$  o  $\gamma = n\pi$ , pero suponiendo que las condiciones iniciales pertenecen a  $\Omega$ , se concluye que la variable  $\gamma$  debe ser cero.

Por otra parte,  $\theta \neq 0 = \bar{\theta}$ ,  $\dot{\gamma} \neq 0 = \bar{\gamma}$  y  $\dot{\xi} = 0$ <sup>2</sup>, entonces de la definición de  $\xi$  se obtiene:

$$\bar{\theta} + k_p \frac{\mu}{\eta} \sin \bar{\gamma} = 0 \quad (28)$$

Entonces, si usamos el primer renglón de (6), observamos que  $\dot{\gamma} = 0$  y  $v = \ddot{\theta} = 0$  por tel motivo  $\sin \bar{\gamma} = 0$ , y como  $\bar{\gamma} < \pi/2$  (por encontrarse  $q(t)$  en  $\Omega$ ), por tanto,  $\bar{\gamma} = 0$ . Y de la ecuación de arriba se deduce que  $\bar{\theta} = 0$ . Lo anterior significa que el péndulo se mantiene en un ángulo fijo con desplazamiento de las ruedas fijo, sin aplicación de una ley de control. Este caso es imposible porque es necesario un acción de control para mantener el valor del ángulo  $\bar{\gamma}$  fijo. Por lo tanto, para que la ecuación descrita en (28) se cumpla, se deduce que  $\theta = 0$  y  $\gamma = 0$ .

<sup>2</sup>Esto significa que  $\bar{v} = 0$

Por consiguiente, el conjunto invariante más grande  $M$  contenido en  $S$ , se constituye por el punto de equilibrio inestable. Entonces, del teorema de LaSalle garantizamos que todas las trayectorias del sistema en lazo cerrado que inician en  $\Omega$  convergen hacia el conjunto invariante más grande  $M$ , que es el punto de equilibrio  $q = 0$ .

Finalmente, se hace un resumen de los resultados en la siguiente proposición:

*Proposición 1:* Considerando al sistema (6) en lazo cerrado con el controlador (18) expresado como:

$$v = -\frac{\dot{\xi} + \frac{k_p\mu}{\eta} \left( \frac{\cos \gamma}{\eta} - \dot{\gamma}^2 \right) \sin \gamma + k_r \xi}{1 + l - k_p \frac{\mu^2}{\eta^2} \cos^2 \gamma} \quad (29)$$

y las constantes estrictamente positivas  $k_p$ ,  $l$  y  $k_r$ , suponiendo que las condiciones iniciales pertenecen al (o inician en el) conjunto compacto  $\Omega$ . Entonces, el origen del sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable localmente y el dominio de atracción es la región definida por la desigualdad (21).

#### 4. Simulaciones Numéricas

Para evaluar el desempeño del controlador no lineal propuesto, se llevaron a cabo algunas simulaciones computacionales usando el programa MATLAB™.

En el primer experimento, se seleccionaron los parámetros físicos  $\mu = 0,55$  y  $\eta = 1,33$ , así como los parámetros del controlador expresado en (18) como  $k_p = 30$ ,  $k_r = 1,2$  y  $l = 1$ , además, las condiciones iniciales propuestas son:  $\gamma_0 = 0,9[\text{rad}]$ ,  $\dot{\gamma}_0 = 0,02[\text{rad/s}]$ ,  $\theta_0 = 0[\text{rad}]$  y  $\dot{\theta}_0 = 0[\text{rad/s}]$ . Por otra parte, para observar el efecto de los parámetros físicos ( $\mu$  y  $\eta$ ) en la respuesta del sistema en lazo cerrado se realizó otra simulación con las mismas condiciones iniciales y parámetros del controlador, pero proponiendo los valores de  $\mu = 0,72$  y  $\eta = 1,33$ . Las Figuras 2 y 3 muestran la respuesta en lazo cerrado de cada uno de los estados, para los dos valores de los parámetros  $\mu$  y  $\eta$ . El primer caso, se representa mediante una línea continua y el segundo con una línea punteada.

Note que, la estrategia de control propuesta, encierra al péndulo cerca del origen (posición invertida) por medio de movimientos suaves, mientras que las ruedas inician su movimiento con oscilaciones muy grandes (provocando un desplazamiento lineal grande), pero de igual manera de una forma suave. En ambos casos, existe una reducción gradual en la amplitud de las oscilaciones. Intuitivamente, la energía inicial del péndulo es transferida a las ruedas por medio de movimientos grandes. Para que finalmente, la energía total sea disipada lentamente por el controlador. Además, se puede observar de las figuras que al modificar el parámetro  $\mu$  la respuesta converge más lentamente.

Finalmente, se realiza un segundo experimento para evaluar la robustez del controlador no lineal considerando las condiciones iniciales y parámetros del primer caso, pero incluyendo el término  $-\beta\dot{\gamma}$  en la coordenada subactuada, es decir en la primera ecuación diferencial del modelo (6) con  $\beta = 0,06$ . En la

Figura 4 se observa la respuesta del sistema en lazo cerrado cuando el amortiguamiento está presente. Y como se puede observar cuando se incluye el amortiguamiento el sistema tiende a desestabilizarse, convergiendo de manera más lenta.

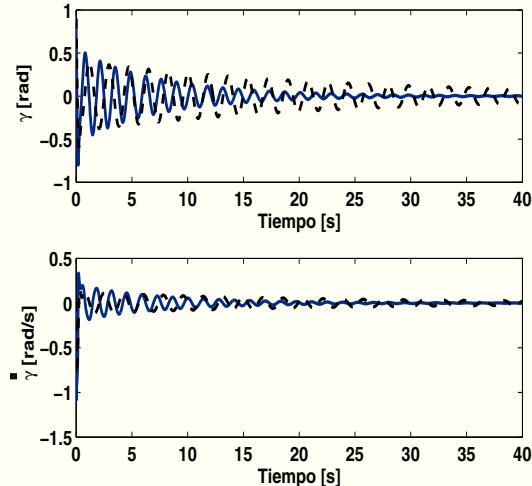


Figura 2: Comportamiento de las variables  $\gamma$  y  $\dot{\gamma}$  del sistema en lazo cerrado para dos valores de  $\mu$  y  $\eta$ .

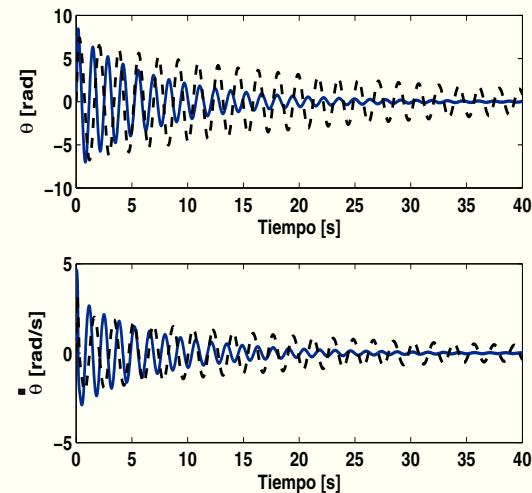


Figura 3: Comportamiento de las variables  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  del sistema en lazo cerrado para dos valores de  $\mu$  y  $\eta$ .

#### 5. Conclusión

En este artículo, se propone una estrategia de control muy simple para estabilizar el sistema Péndulo Invertido Sobre Dos Ruedas. El controlador permite que la respuesta del sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable alrededor del punto de equilibrio inestable  $q = 0$ , suponiendo que la posición inicial del péndulo está por encima de la horizontal. El dominio de

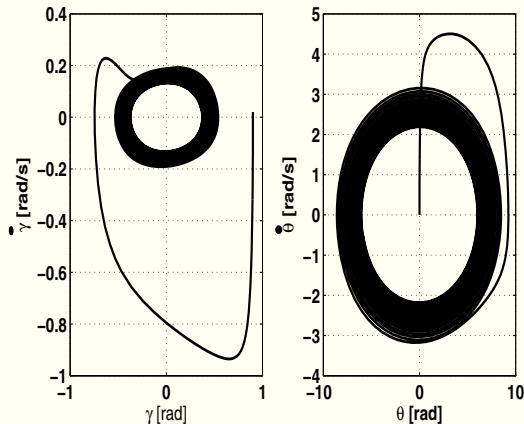


Figura 4: Comportamiento del sistema en lazo cerrado en presencia del amortiguamiento.

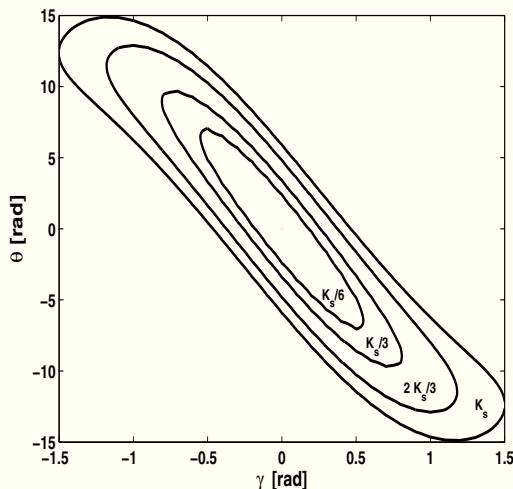


Figura 5: Curva de Nivel para  $V(q)$ .

atracción del sistema en lazo cerrado es grande y se puede estimar mediante la desigualdad (21) cumpliendo el Lema 1, del cual se puede observar que no es conveniente incrementar el dominio de estabilidad cuando la longitud del péndulo es más pequeña que el radio de las ruedas. La estrategia de control se basa inicialmente en obtener una linealización parcial del sistema y poder construir una función de Lyapunov adecuada. La convergencia del sistema lazo cerrado se lleva a cabo mediante el teorema de invariancia de LaSalle. Finalmente, el desempeño del controlador se evalúa por medio de simulaciones numéricas, de las cuales se observa un comportamiento aceptable, además, de mostrar que el sistema de control es robusto en presencia de pequeñas fuerzas disipativas.

### English Summary

**Stabilization of the Two Wheels Inverted Pendulum by means Lyapunov approach.**

### Abstract

In this paper, a nonlinear controller is presented for the stabilization of the two wheels inverted pendulum. The control strategy is based on partial feedback linearization, in first stage and then a suitable function Lyapunov in conjunction with LaSalle's invariance principle is formed to obtain a stabilizing feedback controller. The obtained closed-loop system is locally asymptotically stable around its unstable equilibrium point, with a computable domain of attraction.

### Keywords:

Under Actuated System, Two Wheels Inverted Pendulum, Lyapunov Approach, Non-Linear Control.

### Agradecimientos

Este trabajo es financiado por la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional(SIP-IPN), con número de registro 20111168 y 20120614.

### Referencias

- Aguilar-Ibañez, C., Gutiérrez-Frías, O. Suárez, M., 2005. Lyapunov-Based Controller for the Inverted Pendulum Cart System. *Nonlinear Dynamics* 40 (4), 367–374.
- Aguilar-Ibañez, C., Gutiérrez-Frías, O., 2008. A simple model matching for the stabilization of an inverted pendulum cart system. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 18 (6), 688–699.
- Åström, K. J., Furuta, K., 2000. Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica* 26, 287–295.
- Baloh, M., Parent, M., 2003. Modeling and model verification of an intelligent self-balancing two-wheeled vehicle for an autonomous urban transportation system. In: *The Conference on Computational Intelligence, Robotics, and Autonomous Systems.*, Singapore.
- Bloch, A. M., Leonard, N. E., Marsden, J., 2000. Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems i. the first matching theorem. *IEEE Transactions on Automatic Control* 45 (12), 2253–2270.
- Do, K. D., Seet, G., 2010. Motion control of a two-wheeled mobile vehicle with an inverted pendulum. *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 60 (3-4), 577–605.
- Grasser, F., D'Arrigo, A., Colombi, S., Rufer, A. C., 2002. Joe: A mobile, inverted pendulum. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 49 (1), 107–114.
- Huang, J., Zhi-Hong Guan, Matsuno, T., Fukuda, T., Sekiyama, K., 2010. Sliding-mode velocity control of mobile-wheeled inverted-pendulum systems. *IEEE Transactions on robotics* 26 (4), 750–758.
- Jeong, S., Takahashi, T., 2008. Wheeled inverted pendulum type assistant robot: design concept and mobile control. *Intelligent Service Robotics* 1, 313–320.
- Kalra, S., Patel, D., Stol, K., 2007. Design and hybrid control of a two wheeled robotic platform. In: *Proceedings 2007 Australasian Conference on Robotics and Automation*. Brisbane, Australia.
- Kim, Y., Kim, S. H., Kwak, Y. K., 2005. Dynamic analysis of a nonholonomic two-wheeled inverted pendulum robot. *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 44, 25–46.
- Khalil, H. K., 2002. *Nonlinear Systems*, Prentice Hall.
- Lozano, R., Fantoni, I., Block, D. J., 2000. Stabilization on the inverted pendulum around its homoclinic orbit. *System & Control letters* 40 (1), 197–204.
- Nawawi, S. W., Ahmad, M. N., Osman, J. H. S., 2008. Real-time control of a two-wheeled inverted pendulum mobile robot. *International Journal of Computer and Information Engineering* 2 (1), 70–76.
- Noh, J. S., Lee, G. H., Jung, S., 2010. Position control of a mobile inverted pendulum system using radial basis function network. *International Journal of Control, Automation, and Systems* 8 (1), 157–162.

- Pathak, K., Franch, J., Agrawal, S. K., 2005. Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization. *IEEE Transactions on robotics* 21 (3), 505–513.
- Ren, T.-J., Chen, T.-C., Chen, C.-J., 2008. Motion control for a two-wheeled vehicle using a self-tuning pid controller. *Control Engineering Practice* 16, 365–375.
- Rugh, W. J., 1996. *Linear System Theory*. Prentice Hall.
- Salerno, A., Angeles, J., 2003. On the nonlinear controllability of a quasiholonomic mobile robot. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Vol. 3. Taipei, Taiwan, pp. 3379–3967.
- Segway Inc., <http://www.segway.com/>, 2011.
- Shiriaev, A., Ludvigsen, H., Egeland, O., 2004. Swinging up the spherical pendulum via stabilization of its first integrals. *Automatica* 40, 73–85.
- Spong, M. W., 1996. Energy based control of a class of underactuated mechanical system. In: *Proc. 13th IFAC World Congress*. San Francisco, CA., pp. 431–435.
- Vermeiren, L., Dequidt, A., Guerra, T. M., Rago-Tirmant, H., Parent, M., 2011. Modeling, control and experimental verification on a two-wheeled vehicle with free inclination:an urban transportation system. *Control Engineering Practice* 19, 744–756.
- Viguria, A., Prieto, A., Fiacchini, M., Cano, R., Rubio, F. R., Aracil, J., Canudas de Wit, C., 2006. Desarrollo y experimentación de un vehículo basado en péndulo invertido (ppcar). *Revista iberoamericana de automática e informática industrial (RIAI)* 3 (4), 54–63.
- Yamamoto, Y., NXTway-GS Model-Based Design Control of self-balancing two-wheeled robot built with LEGO Mindstorms NXT, <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/19147>, 2009.009.

## Apéndice A. Controlabilidad del sistema lineal

En esta sección, se analiza la controlabilidad del sistema linealizado, con la finalidad de observar como afecta los parámetros físicos  $\mu$  y  $\eta$  en el diseño de la estrategia de estabilización.

Por lo tanto, derivando el sistema (7) con respecto a los estados y evaluando en el origen se obtiene el sistema:

$$\ddot{q} = A\dot{q} + Bv$$

el cual tiene la siguiente matriz de controlabilidad (Rugh, 1996)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\mu}{\eta} & 0 & -\frac{\mu}{\eta^2} \\ -\frac{\mu}{\eta} & 0 & -\frac{\mu}{\eta^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde el determinante se expresa como:

$$Det(C) = \frac{\mu^2}{\eta^4} = \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{1}{\eta^4}$$

Entonces, se puede observar que al incrementar la longitud ( $L$ ) del péndulo, el determinante disminuirá, acercando su valor a cero provocando que sea más complicado encontrar una ley de control que estabilice al sistema. Por otra parte, si el radio de las ruedas  $R$  fuera más grande que la longitud del péndulo, el determinante tomará valores mayores a cero provocando una mayor controlabilidad del Péndulo Invertido Sobre Dos Ruedas. Por lo tal motivo los parámetros físicos deben seleccionar de tal manera que cumplan el Lema 1.