

## Índices de Desempeño de Robots Manipuladores: una revisión del Estado del Arte

Héctor A. Moreno\*, Roque Saltaren, Isela Carrera, Lisandro Puglisi, Rafael Aracil

*Centro de Automática y Robótica, UPM-CSIC. C/ José Gutiérrez Abascal, 2. 28006. Madrid, España.*

### Resumen

Los índices de desempeño son importantes herramientas para la planificación de movimientos y el diseño de robots manipuladores. En este trabajo se presenta una colección de algunos de los índices de desempeño que mayor interés han generado en la comunidad dedicada a la robótica. Se presentan índices de desempeño cinetostático, dinámico, de límites articulares, e índices definidos sobre el espacio de trabajo. Además, se realiza una revisión sobre las estrategias que se han propuesto para solventar los problemas que aparecen cuando las unidades de los elementos de la matriz Jacobiana no son homogéneas. Al final de este trabajo, proponemos una serie de índices de desempeño globales que pueden resultar útiles en el diseño de robots manipuladores. *Copyright © 2012 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.*

### Palabras Clave:

Índices de desempeño, Cinetostático, Dinámico, Límites Articulares, Globales

### 1. Introducción

Un índice de desempeño de un robot es una cantidad escalar que permite evaluar el funcionamiento de un robot a partir de un criterio definido. Los índices de desempeño son importantes instrumentos para la planificación de movimientos y el diseño de robots manipuladores. En la planificación de movimientos un índice de desempeño ayuda a optimizar el funcionamiento del robot (en este caso se habla de índices *dependientes de la postura*). En la etapa de diseño, un índice de desempeño permite orientar el proceso de cálculo de los parámetros geométricos e inerciales que definen la arquitectura del robot (en este caso se requiere de índices *independientes de la postura*).

Se han propuesto varios índices de desempeño en las últimas décadas. El interés por estos índices se generó a partir de la década de los ochenta, debido a la necesidad de criterios o herramientas para evaluar el diseño de robots manipuladores, una tarea que hasta entonces dependía de la experiencia de los diseñadores y el uso de herramientas CAD (Asada, 1983), (Yoshikawa, 1985b). Este interés por los índices de desempeño ha continuado en las décadas posteriores, en las cuales diversos autores han propuesto criterios que permiten evaluar la

capacidad del robot para realizar tareas de manipulación desde una perspectiva global, hasta otros que permiten evaluar algún aspecto en particular de la tarea de interés.

En este trabajo se hace una revisión de algunos de los índices de desempeño más referenciados o que mayor interés han generado. Se presenta la definición de una colección de índices de cuatro tipos diferentes: índices de desempeño cinetostático, índices de desempeño dinámico, índices de límites articulares, y finalmente índices definidos sobre el espacio de trabajo. Además, se hace referencia a la manera en que se han utilizado en diferentes aplicaciones.

Varios de los índices de desempeño están definidos en función de la matriz Jacobiana del manipulador. Cuando las unidades de los elementos de la matriz Jacobiana no son homogéneas (en el caso de robots que controlan posición y orientación, o cuyas articulaciones no son del mismo tipo) los resultados que ofrecen estos índices carecen de significado (Lipkin, 1989), (Doty, 1993). Diferentes estrategias se han propuesto para resolver este problema. En este trabajo se presentan algunas de ellas.

La mayoría de los índices de desempeño presentados aquí fueron definidos para aplicarse en robots seriales. No obstante, ha habido esfuerzos para la aplicación de estos mismos en otras arquitecturas mecánicas, (Wen, 1999), (Park, 1998) (Bicchi, 1995). En el caso de los manipuladores paralelos, el número de condición de la matriz Jacobiana es el que se ha utilizado con mayor frecuencia (Merlet, 2006).

\* Autor en correspondencia

Correos electrónicos: [hmoreno@etsii.upm.es](mailto:hmoreno@etsii.upm.es) (Héctor A. Moreno),  
[rsaltaren@etsii.upm.es](mailto:rsaltaren@etsii.upm.es) (Roque Saltaren), [icarrera@etsii.upm.es](mailto:icarrera@etsii.upm.es)  
(Isela Carrera), [lpuglisi@etsii.upm.es](mailto:lpuglisi@etsii.upm.es) (Lisandro Puglisi),  
[aracil@etsii.upm.es](mailto:aracil@etsii.upm.es) (Rafael Aracil)

## 2. Índices de Desempeño Cinetostático

Los índices de desempeño cinetostático permiten evaluar la capacidad del manipulador para transformar las velocidades o fuerzas en los actuadores, en velocidades o fuerzas en el efector final. La mayoría de estos índices están definidos en función de la matriz Jacobiana del manipulador, la cual establece las relaciones de velocidad y fuerza entre las articulaciones y el efector final. Los elementos de la matriz Jacobiana dependen únicamente de la geometría del manipulador y su configuración. Los índices presentados en esta sección son dependientes de la postura y pueden ser utilizados en la planificación de trayectorias de tal manera que el robot acoja configuraciones en las cuales su capacidad para generar velocidades y fuerzas, ó la exactitud en el control, sea optimizada.

### 2.1. Elipsoide de Velocidad

Un concepto que ayuda a visualizar la definición de los índices de desempeño presentados en esta sección es el elipsoide de velocidad. El elipsoide de velocidad fue propuesto inicialmente en (Yoshikawa, 1985b) para la definición del índice de la manipulabilidad, sin embargo también resulta útil para la definición de otros índices de desempeño cinemático.

Para comenzar considérese el modelo de velocidad de un robot manipulador:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (1)$$

donde  $\dot{\mathbf{x}}$  es el vector de velocidades del efector final,  $\dot{\mathbf{q}}$  es el vector de velocidades articulares, y  $\mathbf{J}$  es la matriz Jacobiana.

El elipsoide de velocidad esta dado por el conjunto de todas la velocidades del efector final que son realizables para las velocidades articulares que satisfacen que  $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq 1$ .

Dado que

$$\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 = \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{J}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{x}},$$

se tiene que las velocidades que forman parte del elipsoide de velocidad son aquellas que satisfacen la siguiente condición:

$$\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{J}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{x}} \leq 1.$$

Del elipsoide de velocidad se puede observar que el robot tiene la capacidad de moverse a mayor velocidad cuanto mayor sea el volumen del elipsoide. Para las velocidades en el espacio articular que cumplan con  $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq 1$ , las mayores velocidades que efector final puede alcanzar, se obtienen sobre el semieje mayor del elipsoide. Por el contrario, el efector final del robot se moverá con a baja velocidad en dirección del semieje menor del elipsoide. Por otro lado, si la forma del elipsoide se aproxima a la esfera, entonces el efector final se puede mover uniformemente en todas direcciones.

Mediante la descomposición de la matriz Jacobiana en valores singulares se puede demostrar que los valores singulares  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ , corresponden a las magnitudes de los ejes principales del elipsoide de velocidad. Los valores singulares, corresponden también a las raíces cuadradas de los valores propios (o eigenvalores) de la matriz  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ .

Cuando la matriz Jacobiana es singular, al menos uno de los valores singulares es igual a cero. Aquellas configuraciones

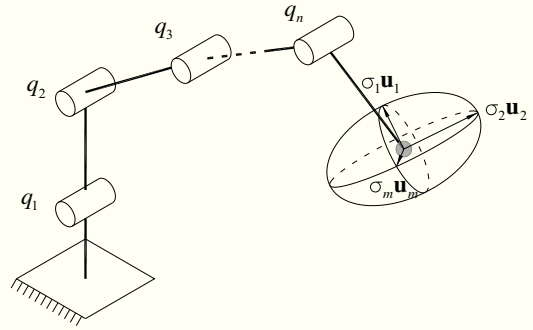


Figura 1: Elipsoide de Velocidad.

en las cuales la matriz  $\mathbf{J}$  es singular, se llaman configuraciones singulares. Cuando un manipulador serial se encuentra en una configuración singular, pierde al menos un grado de libertad, es decir que pierde la capacidad de generar movimiento en ciertas direcciones. En el caso de robot paralelos, existen dos matrices Jacobianas, y cuando alguna de estas es singular el robot pierde o gana grados de libertad. Por lo anterior, estas configuraciones deben ser evitadas durante la ejecución de una tarea.

A continuación se presentan algunos índices de desempeño que permiten evaluar las configuraciones desde el punto de vista cinetostático. Estos índices se pueden calcular directa o indirectamente a partir de los valores singulares de la matriz Jacobiana. Por este motivo, además de sus características propias, se han considerado como medidas de alejamiento a configuraciones singulares.

### 2.2. Número de Condición

Este índice fue propuesto en (Salisbury, 1982) para el diseño de los dedos de una mano robótica. El número de condición  $\kappa$  de una matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$  está definido de la siguiente manera:

$$\kappa(\mathbf{J}) = \|\mathbf{J}\| \times \|\mathbf{J}^{-1}\| \quad (2)$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma de la matriz. Esta norma puede ser cualquiera, como la norma de Frobenius

$$\|\mathbf{J}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |J_{ij}|^2},$$

donde  $J_{ij}$  representa el elemento de la  $i$ -ésima fila y  $j$ -ésima columna de la matriz  $\mathbf{J}$ . Por otro lado, el número de condición puede ser calculado en función de los valores singulares de la matriz Jacobiana,  $\kappa = \frac{\sigma_M}{\sigma_m}$ , donde  $\sigma_M$  es el máximo valor singular y  $\sigma_m$  es el mínimo valor singular.

En general, el número de condición de una matriz expresa la sensibilidad de la solución de un sistema matricial a los errores en los datos conocidos y/o de la matriz misma.

Cuando el número de condición alcanza su mínimo valor (la unidad), se dice que la matriz Jacobiana es isotrópica. En este caso el elipsoide de velocidad se vuelve una esfera. Por otra parte, el número de condición se vuelve infinito si la matriz Jacobiana es singular.

En el contexto de la robótica el número de condición de la matriz Jacobiana es un índice interesante en la evaluación del desempeño cinemático del manipulador. Este índice mide la precisión del control del manipulador (Salisbury, 1982) y la uniformidad de la distribución de velocidades y fuerzas operacionales; esta segunda característica es de principal importancia para las tareas de proceso como el maquinado (Chablat, 2003), (Huang, 1998).

El número de condición ha sido frecuentemente utilizado como criterio para el diseño de manipuladores isotrópicos (Zanganeh, 1997), (Baron L. y Bernier, 2001), (Huang, 2004), (Moreno, 2011). Por otra parte, este número ha sido aplicado en el contexto de la inversión cinemática y planificación de movimientos (Chablat, 1998a), (Gosselin, 1990b), (Moreno, 2006). Para manipuladores que tienen múltiples soluciones del modelo cinemático inverso de posición, el número de condición puede ser utilizado para elegir el mejor modo de trabajo del manipulador (Chablat, 1998b), (Chablat, 2002).

### 2.3. Manipulabilidad

El índice de la manipulabilidad fue propuesto en (Yoshikawa, 1985b). El propósito de este índice es medir la capacidad de un robot, en cierta configuración, para generar velocidades en el efector final. Este índice de desempeño es proporcional al volumen del elipsoide de velocidad. Para el caso general (incluyendo robots redundantes) la manipulabilidad esta definida de la siguiente manera:

$$w = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \quad (3)$$

Para robots no redundantes se tiene que  $w = |\det(\mathbf{J})|$ . La manipulabilidad es equivalente al producto de los valores singulares,  $w = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m$ . A mayores valores de la manipulabilidad el robot tiene una mayor capacidad de realizar movimientos en el efector final. En el caso de que la manipulabilidad sea igual a cero entonces el robot se encuentra en una configuración singular. En esta configuración el robot pierde la capacidad de realizar movimientos en ciertas direcciones.

Por otro lado, Yoshikawa presentó además el concepto de la manipulabilidad de fuerza. Este índice trata de medir la capacidad del robot, en una configuración dada, para ejercer fuerzas sobre un objeto en reposo a través de su efector final. Al igual que en el caso anterior, se puede generar un elipsoide de fuerza. Para generar el elipsoide de fuerza se utiliza el modelo estático del robot, i.e., la relación que existe entre el vector de fuerzas en los actuadores,  $\tau$ , y el vector de fuerzas generadas en el efector final,  $\mathbf{f}$ . El modelo estático de un manipulador es el siguiente:

$$\tau = \mathbf{J}^T \mathbf{f} \quad (4)$$

donde  $\mathbf{J}$  es la matriz Jacobiana del manipulador. De esta forma, el conjunto de todos los vectores  $\mathbf{f}$  que son realizables por un  $\tau$  tal que  $\|\tau\| \leq 1$  forman un elipsoide en el espacio euclidiano  $m$  dimensional, dado por

$$\mathbf{f}^T \mathbf{J} \mathbf{J}^T \mathbf{f} \leq 1.$$

El volumen del elipsoide de fuerza es inversamente proporcional a la manipulabilidad (de velocidad). Por lo tanto la manipulabilidad de fuerza es:

$$w_f = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)}} \quad (5)$$

Los ejes principales del elipsoide de fuerza están dados por  $\mathbf{u}_1/\sigma_1, \mathbf{u}_2/\sigma_2, \dots, \mathbf{u}_3/\sigma_m$ . Esto significa que la dirección en la que el efector final puede ejercer mayor fuerza, es aquella en donde se puede generar menos velocidad.

La manipulabilidad ha sido utilizada frecuentemente en la planificación de trayectorias de robots seriales redundantes (Ueberle et al., 2004), (Li, 1988), (Bestard, 2007) y en el emplazamiento óptimo de la tarea (Pamanes, 1991). Por otro lado se han realizado esfuerzos para generalizar su uso en otras arquitecturas mecánicas, como lo son las cadena cinemáticas cerradas (Park, 1998) y múltiples cadenas seriales cooperativas (Bicchi, 1995).

### 2.4. Mínimo Valor Singular

El mínimo valor singular fue propuesto en (Klein, 1987) como índice de desempeño. Naturalmente este valor permite medir la cercanía de la configuración del robot a una configuración singular, ya que directamente indica si la magnitud de alguno de los ejes principales del elipsoide esta a punto de anularse. En el caso del número de condición y la manipulabilidad, esta situación (la cercanía a una singularidad) en algunos casos puede ser imprecisa ya que su valor también depende de otros valores singulares y la disminución en un valor singular puede ser compensada por un incremento o decremento en otro valor singular. El volumen del elipsoide de velocidad será mayor cuando el valor de este índice sea mayor.

### 2.5. Índice de Compatibilidad

Este índice fue propuesto en (Chiu, 1988), para encontrar configuraciones del manipulador que sean más compatibles con la tarea a realizar, en términos de fuerza y velocidad. Para esto Chiu introduce el concepto de la *relación de transmisión*, el cual permite caracterizar la capacidad del manipulador para generar velocidades o fuerzas en las direcciones definidas por la tarea. La relación de transmisión a lo largo de cierta dirección es igual a la distancia que existe entre el centro del elipsoide (de velocidad o fuerza) a la superficie del mismo en esa dirección. La relación de transmisión de fuerza está definida por la siguiente expresión:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T) \mathbf{u}}} \quad (6)$$

donde  $\mathbf{u}$  denota el vector unitario en la dirección de interés. Por otro lado, la relación de transmisión de velocidad está definida de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{u}}} \quad (7)$$

En el caso especial en el que  $\mathbf{u}$  coincide con uno de los ejes principales del elipsoide,  $\beta$  puede ser calculado como el recíproco de  $\alpha$  para evitar la inversión de la matriz.

De esta manera, como explica Chiu, si lo que se desea es controlar fuerza a lo largo de ciertas direcciones (definidas por  $\mathbf{u}_i$ , con  $i = 1, \dots, p$ ) y velocidad en otras (definidas por  $\mathbf{u}_j$ , con  $j = l + 1, \dots, q$ ), entonces lo que se debe hacer es optimizar un índice que este en función de las relaciones de transmisión correspondientes a esas direcciones, en este caso Chiu definió el índice de compatibilidad:

$$c = \sum_{i=1}^p w_i \alpha_i^{\pm 2} + \sum_{j=l+1}^q w_j \beta_j^{\pm 2} \quad (8)$$

El signo + es utilizado en direcciones en las cuales lo importante es la magnitud, y el signo – es utilizado en direcciones en donde es importante la exactitud del control;  $w_i$  y  $w_j$  son factores de ponderación que indican la importancia de alcanzar mayor magnitud o exactitud en ciertas direcciones de la tarea.

Las relaciones de transmisión representan las amplificaciones en la magnitud de fuerza y velocidad del efector final. Los recíprocos de las relaciones de transmisión representan una medida en la exactitud del control.

### 3. Homogeneización de la Matriz Jacobiana

Los índices de desempeño cinetostático en general, y algunos de los índices de desempeño dinámico, están definidos en función de la matriz Jacobiana y/o la matriz de inercia. Cuando el manipulador es de mas de tres grados de libertad o sus articulaciones no son del mismo tipo, las unidades de los elementos de estas matrices no son homogéneas, y esta situación dificulta el uso de los índices de desempeño que están definidos en función de ellas.

Para que los índices de desempeño basados en la matriz Jacobiana puedan ser evaluados de manera consistente, los elementos de la matriz Jacobiana deben ser dimensionalmente homogéneos (Lipkin, 1989). En la literatura científica se ha advertido (Doty, 1993) que el uso de índices de desempeño de una matriz Jacobiana cuyos elementos no sean dimensionalmente homogéneos puede causar problemas importantes en el diseño y el control de un manipulador.

Algunos autores han sugerido que se divida el estudio de los índices de desempeño para manipuladores con Jacobianas homogéneas y no homogéneas (Di Gregorio, 2002), (Di Gregorio, 2006), (Angeles, 2007). Para los manipuladores cuya Jacobiana es homogénea, es decir, aquellos manipuladores de posicionamiento u orientación de 2 o 3 grados de libertad cuyas articulaciones son del mismo tipo, los índices presentados anteriormente tiene aplicación directa y ofrecen información a nivel teórico y práctico. Por otro lado, en el caso de manipuladores cuya matriz no es homogénea, es decir aquellos manipuladores de posicionamiento y orientación de 3 o mas grados de libertad, se han propuesto diversas formas de solucionar este problema. Algunas de estas estrategias se presenta a continuación.

Una manera de solucionar este problema se basa en la aplicación de la *longitud característica* (Angeles, 2007). Para homogeneizar la matriz Jacobiana se dividen los elementos de esta matriz asociados a las componentes de la velocidad angular por la longitud característica. La selección de esta longitud característica es arbitraria, sin embargo varios autores proponen que sea aquella que minimice el número de condición de la matriz Jacobiana normalizada (Ma, 1991b), (Alba, 2005). Para la plataforma de Stewart-Gough (Ma, 1991b) encontraron la longitud característica que optimiza el número de condición de la matriz Jacobiana. En ese trabajo se encontró que el mínimo número de condición de la Jacobiana se obtiene en las llamadas *posturas neutrales* (estas posturas son tales que las dos plataformas del manipulador son paralelas entre sí y al mismo tiempo están centradas). Para calcular el valor de la longitud característica en (Moreno, 2010), se planteó el problema como uno de optimización siendo la función objetivo el número de condición de la matriz Jacobiana normalizada  $\kappa(\bar{\mathbf{A}})$  y como variables de diseño la postura definida por la coordenada en el eje vertical  $z_p$  y la longitud característica  $L_c$ . La matriz normalizada esta dada por

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T & (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{s}_1)^T / L_c \\ \mathbf{s}_2^T & (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{s}_2)^T / L_c \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{s}_6^T & (\mathbf{b}_6 \times \mathbf{s}_6)^T / L_c \end{bmatrix},$$

donde  $\mathbf{s}_i$  son los vectores unitarios a lo largo de las piernas del manipulador, y  $\mathbf{b}_i$  son los vectores que definen la posición de las articulaciones universales sobre la plataforma móvil.

En el caso de algunos robots paralelos, otra longitud característica que se ha propuesto es el radio de la plataforma móvil. De esta forma, en el caso de la plataforma Stewart-Gough, el vector  $\mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_i$  se vuelve unitario, al igual que el vector  $\mathbf{s}_i$ , y por tanto los valores de todos los elementos de la matriz Jacobiana normalizada se encuentran en el rango de 0 y 1.

No obstante, esta estrategia ha recibido criticas debido al hecho de que la selección de la longitud característica es en cierta forma arbitraria y su significado físico es difícil de determinar.

Otra estrategia que se ha propuesto es encontrar una matriz Jacobiana homogénea basada en un modelo cinemático diferente (Gosselin, 1990a), (Kim, 2003). En (Kim, 2003) se reportó la formulación de una matriz Jacobiana homogénea a partir del análisis de tres puntos del órgano terminal. Tal formulación consiste en la determinación de un sistema de ecuaciones que relaciona las velocidades articulares con las velocidades de tres puntos unidos a la plataforma móvil; de este sistema se extrae una matriz jacobiana homogénea. En ese trabajo se utilizo el número de condición de esta Jacobiana homogénea para obtener el diseño óptimo de una plataforma de Stewart-Gough.

Para el índice de manipulabilidad, se ha propuesto particionar (Ueberle et al., 2004) la matriz Jacobiana en dos submatrices ( correspondientes a la traslación y a la rotación del efector final) de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \mathbf{q}$$

donde  $\mathbf{v}$  y  $\omega$  son la velocidad lineal y angular del efector final. De esta manera se pueden obtener la manipulabilidad de traslación y de rotación:

$$w_v = \sqrt{\det(\mathbf{J}_v \mathbf{J}_v^T)}$$

y

$$w_\omega = \sqrt{\det(\mathbf{J}_\omega \mathbf{J}_\omega^T)}$$

Se puede definir otro índice en función de este par de manipulabilidades, mediante una suma ponderada:

$$\psi = m_1 w_v + m_2 w_\omega$$

donde  $m_1$  y  $m_2$  son los factores de ponderación.

De manera muy diferente a las estrategias anteriores, en (Voglewede, 2004), se presentan diversos índices de desempeño cuyo propósito es medir la cercanía a configuraciones singulares. Algunos de los índices presentados poseen unidades físicas, a diferencia de la mayoría los índices cinetostáticos presentados anteriormente. Los autores resaltan el índice llamado *Medida de la Frecuencia Natural*. Según los autores, este índice, resuelve el problema del manejo de elementos con diferentes unidades, que resulta del empleo de la norma euclidiana como restricción.

Este índice es definido mediante la siguiente minimización con restricciones:

$$\min F(\dot{\mathbf{x}}) = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{J}^{-1})^T \mathbf{K}_{act} \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{x}}$$

sujeto a:

$$\sqrt{\dot{\mathbf{x}} \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{x}}} = c$$

donde  $\mathbf{K}_{act}$  es la matriz diagonal de rigidez de los actuadores y la matriz  $\mathbf{M}_e$  es la matriz de inercia del efector final. La restricción  $\sqrt{\dot{\mathbf{x}} \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{x}}} = c$ , corresponde a la energía cinética de la plataforma móvil.

Resolviendo el problema de minimización mediante el Lagrangiano y realizando operaciones algebraicas, el problema se reduce a determinar los valores propios  $\lambda$  de la siguiente expresión

$$\det((\mathbf{J}^{-1})^T \mathbf{K}_{act} \mathbf{J}^{-1} - \lambda \mathbf{M}_e) = 0.$$

Finalmente, los autores encuentran que  $\min F(\dot{\mathbf{x}}) = c \lambda_{\min} = c \omega_{n\min}^2$  donde  $\omega_{n\min}$  es la mínima frecuencia natural.

La ventaja de esta medida, es que utiliza una función objetivo con significado físico. De igual forma sucede con la restricción que se impone sobre  $\dot{\mathbf{x}}$ . El inconveniente de este enfoque es que, además de la rigidez, se ha utilizado otra cantidad que no es cinemática, es decir, la matriz de inercia del efector final.

#### 4. Índices de Desempeño Dinámico

Cuando un robot manipulador se encuentra en movimiento está sujeto a fuerzas no lineales como lo son: las fuerzas inerciales, fuerzas centrífugas y de coriolis, y las fuerzas de la

gravedad. Por lo tanto, es importante para el diseño, el análisis y el control, caracterizar la dinámica del manipulador mediante índices de desempeño. En esta sección se presentan, algunos conceptos e índices que se han propuesto para evaluar la dinámica de un manipulador. También se presentan las estrategias que se han planteado para optimizar el desempeño de manipuladores desde el punto de vista dinámico.

Los índices presentados aquí están definidos en dos formulaciones del modelo dinámico de robots manipuladores, estas son en el espacio articular y en el espacio operacional. Por lo tanto antes de presentar los índices se presentan estas parametrizaciones.

El modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  articulaciones en el espacio articular es el siguiente (Craig, 2005):

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (9)$$

donde  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  es la matriz de inercia,  $\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es el vector de fuerzas centrífugas y de coriolis, y  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  es vector de fuerzas gravitacionales.

Por otro lado, el modelo dinámico de un robot en el espacio operacional esta dado de la siguiente forma (Khatib, 1980):

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}_x(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{g}_x(\mathbf{x}) \quad (10)$$

donde  $\mathbf{M}_x(\mathbf{x})$  es la matriz de inercia generalizada,  $\mathbf{c}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  es el vector de fuerzas centrífugas y de coriolis generalizadas, y  $\mathbf{g}_x(\mathbf{x})$  es el vector de fuerzas gravitacionales generalizadas.

##### 4.1. Matriz de Inercia Generalizada del Manipulador

En (Asada, 1983) se presento uno de los trabajos pioneros en el diseño de robots manipuladores basado en las características dinámicas y geométricas de los eslabones. En ese trabajo se presentó el concepto del Elipsoide Generalizado de Inercia (GIE, por sus siglas en inglés) obtenido a partir de la matriz de inercia generalizada,  $\mathbf{M}_x(\mathbf{x})$ . Al igual que en los casos anteriores los ejes del elipsoide se encuentran alineados con los vectores propios de la matriz  $\mathbf{M}_x(\mathbf{x})$ , y la magnitud de los ejes es equivalente a la raíz cuadrada de los valores propios correspondientes. En ese trabajo se determinó el diseño de un robot de 2 gdl con el objetivo de que la matriz de inercia fuera isotrópica, mediante la siguiente condición:

$$\mathbf{M}_x(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{I} \quad (11)$$

El propósito de obtener configuraciones isotrópicas es reducir la complejidad de controlar el brazo. Mediante el procedimiento anterior el objetivo es minimizar las fuerzas no lineales.

##### 4.2. Manipulabilidad Dinámica

Este índice, definido en (Yoshikawa, 1985a), trata de medir la capacidad de un robot para generar movimientos en el efector final considerando la dinámica del robot. Para la definición del índice se utilizan los vectores auxiliares de fuerza  $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{c} - \mathbf{g}$  y de aceleración  $\tilde{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}$ . Donde  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}$  se obtiene de derivar la ecuación (1). Realizando operaciones algebraicas se puede llegar a la siguiente expresión:  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ . Este índice trata de medir la capacidad de generar aceleraciones  $\tilde{\mathbf{x}}$  bajo la

restricción en el vector de fuerzas  $\tilde{\tau}$  mediante la siguiente desigualdad  $\|\tilde{\tau}\| \leq 1$ . La manipulabilidad dinámica está definida de la siguiente manera:

$$w_d = \sqrt{\det(\mathbf{J}(\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{J}^T)} \quad (12)$$

Este índice mide la capacidad para producir aceleraciones arbitrarias para un dado conjunto de fuerzas en los actuadores.

#### 4.3. Maximización del Volumen y Uniformidad del Hiperparalelepípedo de Aceleración

En (Khatib, 1987) se propuso el hiperparalelepípedo de aceleración para caracterizar la aceleración del efector final. En ese trabajo se presentó una estrategia de optimización dinámica que tiene por objetivo extender los límites máximos de velocidad que el efector final puede alcanzar, y al mismo tiempo lograr la mayor uniformidad de estos límites en todas direcciones.

En este trabajo, a diferencia de los anteriores, se toma en cuenta los límites de fuerza de los actuadores. Además, se consideran las fuerzas disponibles en las articulaciones que pueden contribuir para acelerar el efector final. Estas fuerzas son producto de las fuerzas que los actuadores pueden generar más (o menos, dependiendo de la configuración) las fuerzas de gravedad generalizadas (en el caso de que el manipulador esté estático) y las fuerzas centrífugas y de Coriolis generalizadas (en el caso de que el manipulador se mueva).

Para definir el índice se definieron previamente dos matrices,  $\mathbf{E}_o$  y  $\mathbf{E}_v$ , que relacionan las fuerzas en las articulaciones con las aceleraciones en el efector final. La matriz  $\mathbf{E}_o$  mapea los elementos del hipercubo unitario de fuerzas disponibles en las articulaciones, a los elementos del hiperparalelepípedo de aceleraciones, cuando la velocidad de las articulaciones es nula. Esta matriz está dada de la siguiente forma

$$\mathbf{E}_o = \mathbf{W}_x \mathbf{E} \mathbf{N}_o,$$

donde  $\mathbf{W}_x$  es una matriz que homogeneiza las unidades de las velocidades lineales y angulares,  $\mathbf{E} = (\mathbf{J} \mathbf{M}_x(\mathbf{x}))^{-1}$ , y  $\mathbf{N}_o$  es una matriz diagonal que contiene las fuerzas disponibles en las articulaciones cuando el manipulador está estático. Por otro lado  $\mathbf{E}_v$ , mapea los elementos del hipercubo unitario de fuerzas disponibles en las articulaciones, a los elementos del hiperparalelepípedo de aceleraciones, cuando la velocidad de las articulaciones es máxima (estas velocidades están definidas por la capacidad de los actuadores). Esta matriz está definida de la siguiente forma

$$\mathbf{E}_v = \mathbf{W}_x \mathbf{E} \mathbf{N}_v,$$

donde  $\mathbf{N}_v$  es una matriz diagonal que contiene las fuerzas disponibles en las articulaciones cuando la velocidad es máxima. Los elementos de estas matrices dependen de los parámetros geométricos e inerciales del manipulador y de la postura en la que se encuentra. Para maximizar el volumen y uniformidad del hiperparalelepípedo de aceleración, en (Khatib, 1987) definieron el siguiente índice de desempeño:

$$C = \left[ \frac{1}{\|\mathbf{E}_o\|} + \alpha_o \kappa(\mathbf{E}_o) \right] + w_v \left[ \frac{1}{\|\mathbf{E}_v\|} + \alpha_v \kappa(\mathbf{E}_v) \right], \quad (13)$$

donde  $\alpha_o$ ,  $\alpha_v$  y  $w_v$  son factores de ponderación que permiten dar prioridad a los componentes del índice durante el proceso de optimización. Los ejes mayores de los hiperparalelepípedos de aceleración (cuando el robot está estático o a máxima velocidad) son iguales a las normas euclidianas  $\|\mathbf{E}_o\|$  y  $\|\mathbf{E}_v\|$ . Por otro lado, la uniformidad de los ejes de los hiperparalelepípedos se puede medir a través de los números de condición  $\kappa(\mathbf{E}_o)$  y  $\kappa(\mathbf{E}_v)$ .

#### 4.4. Índice de Condicionamiento Dinámico

Este índice fue definido en (Ma, 1991a) y según sus autores su propósito es servir como medida de la distancia que existe entre la matriz de inercia del manipulador y una matriz de inercia isotrópica, i.e., aquella es un múltiplo de la matriz identidad. Este índice está definido de la siguiente manera:

$$v = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{W} \mathbf{e} \quad (14)$$

donde  $\mathbf{e}$  es un vector de dimensión  $n(n+1)/2$  compuesto de los elementos de la matriz triangular superior de la matriz de error  $\mathbf{E} \equiv \mathbf{M}(\mathbf{q}) - \sigma \mathbf{I}$ , y  $\mathbf{W}$  es una matriz de ponderación. Además,  $\sigma$  es un factor de escala definido de tal forma que la norma de la matriz de error  $\mathbf{E}$  es mínima para un valor fijo de  $\mathbf{q}$ . Se puede demostrar que esta dado por la traza de la matriz  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ , esto es  $\sigma = \text{tr}(\mathbf{M}(\mathbf{q}))/n$ . Bajo este criterio las mejores configuraciones son aquellas en las cuales el índice alcanza valores cercanos a cero. En ese mismo trabajo los autores presentan un par de ejemplos de la aplicación del índice sobre robots planares.

#### 4.5. Índices para Manipuladores de 2 grados de libertad

En (Di Gregorio, 2006) se proponen algunos índices de desempeño dinámico para robots manipuladores de 2 grados de libertad. Según el autor, estos índices miden la capacidad que posee el mecanismo para acelerar el efector final, sin considerar las fuerzas aplicadas por los actuadores.

Utilizando la ecuación 10, despejando el término  $\mathbf{M}_x(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}}$  y aplicando la siguiente restricción:

$$\ddot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M}_x(\mathbf{x})^2 \ddot{\mathbf{x}} = 1$$

se obtiene la elipse de aceleración. La magnitud de los ejes de la elipse de aceleración es igual a la inversa de los valores propios de la matriz  $\mathbf{M}_x(\mathbf{x})$ . Cuando los valores propios son iguales, entonces la elipse se convierte en un círculo y el robot se encuentra en una configuración isotrópica dinámica. En esta configuración el manipulador puede realizar cambios rápidos de la dirección de movimiento sin cambios bruscos en la magnitud de la fuerza resultante de los términos  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{c}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  en la ecuación (10).

Para medir la cercanía a las configuraciones isotrópicas dinámicas Di Gregorio propone el índice de *Isotropía Dinámica*:

$$k_1 = \frac{4 \det(\mathbf{M}_x(\mathbf{x}))}{\text{tr}(\mathbf{M}_x(\mathbf{x}))^2} \quad (15)$$

Los valores que puede alcanzar este índice están acotados entre 0 y 1, es decir  $0 \leq k_1 \leq 1$ . Este índice es igual a uno si los valores propios de la matriz de inercia generalizada son iguales.

El área de la elipse de aceleración es inversamente proporcional a los valores propios de la matriz  $\mathbf{M}_x(\mathbf{x})$ , de esta manera, lo autores definen también el *Índice de Rapidez*:

$$h = \frac{1}{\det(\mathbf{M}_x(\mathbf{x}))} \quad (16)$$

este índice es siempre mayor a cero y es directamente proporcional al área de la elipse de aceleración.

## 5. Índices de los Límites Articulares

Durante la ejecución de una tarea, es importante que ninguna de las articulaciones del manipulador alcance alguno de sus límites. Diversos autores han definido índices sobre los límites articulares para luego utilizarlos como funciones objetivo a optimizar durante la planificación de trayectorias. En esta sección se presentan algunos de esos índices.

### 5.1. Índice del Limite de la Articulación

Este índice representa la cercanía que existe entre el valor actual de la articulación y su valor límite. En la Figura 2 se presentan los parámetros involucrados en la definición del índice de articulación; tales parámetros se definen de la siguiente manera:  $q_i^l$  es el límite inferior de la articulación  $q_i$ ;  $q_i^s$  es el límite superior de la articulación  $q_i$ ,  $\bar{q}_i$  es el valor medio de la articulación  $q_i$  en el intervalo de valores admisibles,  $\bar{q}_i = (q_i^s + q_i^l)/2$ ;  $\Delta q_i = |q_i - \bar{q}_i|$  es la diferencia entre el valor de  $q_i$  y su valor medio  $\bar{q}_i$ . El índice del limite de la articulación es:

$$k_i = \frac{\Delta q_i}{\Delta q_i^{max}} \quad (17)$$

donde  $\Delta q_i^{max} = |q_i^s - q_i^l|$ . De este índice se pueden advertir las siguientes situaciones: la articulación se encuentra dentro de sus límites cuando  $0 \leq k_i < 1$ ; la articulación alcanza uno de sus límites si  $k_i = 1$ ; la coordenada articular  $q_i$  se encuentra fuera de sus límites cuando  $k_i > 1$ . Es evidente que cuando  $k_i = 0$ , la variable articular  $q_i$  se encuentra en el centro del intervalo de movimiento de la articulación correspondiente. Tal situación será la ideal, porque el alejamiento de  $q_i$  con respecto a sus valores límites será el máximo. Este índice corresponde solo a una articulación, a continuación se presentan índices para la configuración del robot, es decir que consideran todas las articulaciones.

### 5.2. Índice de Disponibilidad de Movilidad Articular

Este índice fue propuesto en (Liegeois, 1977), para evitar los límites de las articulaciones del robot durante la realización de una tarea. Este índice este definido por el promedio del valor de los índices  $k_i$  al cuadrado, esto es:

$$j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i^2 \quad (18)$$

Los mejores valores de este índice son aquellos cercanos a cero. La mejor situación ocurre cuando  $j = 0$ , ya que todas

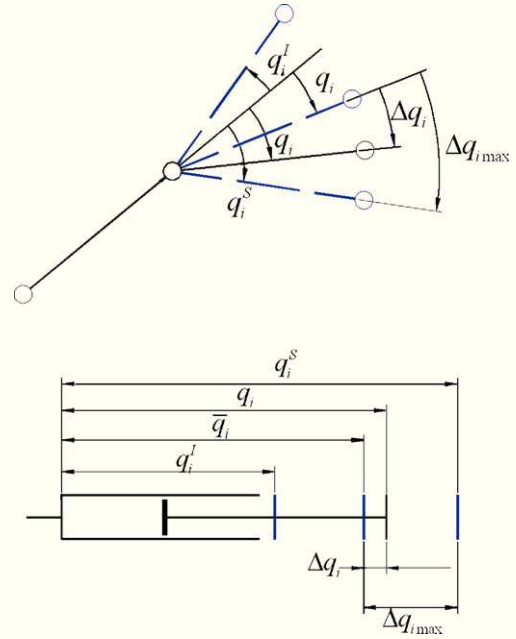


Figura 2: Límites de la Articulación.

las articulaciones se encuentran en el centro de su intervalo de movimiento. Cuando  $j \geq 1$  es evidente que al menos una de las articulaciones ha superado alguno de sus límites articulares. Sin embargo para valores menores que uno ( $j \leq 1$ ) no es posible determinar si alguna de las articulaciones a superado alguno de sus límites.

### 5.3. Índice de Evitación de Límites Articulares

Este índice fue propuesto en (Pamanes, 1991) para resolver el problema del emplazamiento óptimo para robots seriales (i.e., determinar la ubicación óptima de la tarea con respecto al manipulador). Varios de los índices de límites articulares que se han propuesto consisten básicamente en obtener el promedio de los índices  $k_i$  de cada articulación. En (Pamanes, 1991) se propone un índice que toma en cuenta también la desviación estándar, una medida que informa de la distancia que hay entre los valores de  $k_i$  de cada articulación y su valor medio. Este índice esta definido de la siguiente forma:

$$\phi = \bar{k} + z\sigma_k \quad (19)$$

donde  $\bar{k}$  y  $\sigma_k$  son el promedio y la desviación estándar de los valores al cuadrado del índice  $k_i$  de cada una de las articulaciones, respectivamente;  $z$  es un factor de ponderación de la desviación estándar. En (Pámanes, 1992) se presentan algunas gráficas comparativas del valor de este índice y el propuesto en (Liegeois, 1977) sobre el espacio de trabajo de un robot de 2 grados de libertad. Se muestra como este índice valora de manera más adecuada la cercanía a los límites articulares en la frontera del espacio de trabajo. Según los autores del índice el valor del parámetro  $z$ , se selecciona de manera arbitraria dependiendo del tipo de manipulador. En el trabajo señalado se utilizó  $z = 1$  para diversos manipuladores.

#### 5.4. Cercanía al valor medio del rango de movimiento de las articulaciones

En (Baron, 2000) se definió un índice para determinar la cercanía de una configuración al valor medio del rango de movimiento de las articulaciones. Este índice está definido de la siguiente manera:

$$z = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{q} \mathbf{W} \Delta \mathbf{q} \quad (20)$$

donde  $\Delta \mathbf{q} = [\Delta q_1 \quad \Delta q_2 \quad \dots \quad \Delta q_n]^T$ , y  $\mathbf{W}$  es una matriz diagonal definida positiva. Una característica interesante de la matriz de ponderación  $\mathbf{W}$ , es que a través de esta se podría limitar más el movimiento de algunas articulaciones que otras, optimizando el valor de este índice durante la ejecución de la tarea. Este índice fue utilizado en (Huo, 2011) para evitar los límites articulares en tareas de soldado.

#### 5.5. Índice de Global de los Límites de las Articulaciones

Este índice fue definido en (Moreno, 2010) para determinar las configuraciones factibles de un robot trepador durante la realización de una tarea. Este índice está definido como el máximo de los valores del índice  $k_i$ , esto es:

$$f_k = \max(k_i) \quad (21)$$

Por tanto, si  $0 \leq f_k \leq 1$  se tiene que el manipulador está en una configuración accesible. Por otra parte si  $f_k > 1$  significa que al menos una de las articulaciones del manipulador ha rebasado alguno de sus límites articulares. Por lo tanto no sería factible para el manipulador alcanzar tal configuración. En el caso ideal se tendría que  $f_k = 0$ , puesto que cada una de las variables articulares estaría ubicada en el centro de su rango de movimientos. Este índice tiene como ventaja sobre los anteriores que efectivamente indica si una articulación ha rebasado sus límites, no obstante no refleja la situación global del manipulador.

### 6. Índices de Desempeño Definidos sobre el Espacio de Trabajo

Una de las características más importantes de un robot manipulador tiene que ver con el volumen de su espacio de trabajo. La maximización del espacio de trabajo ha sido objeto de estudio de diversos autores (Huang, 2004), (Carretero, 2000).

Por otro lado la calidad de las configuraciones del robot dentro del espacio de trabajo es otro aspecto relevante que se debe considerar en el diseño de robot manipuladores (Gosselin, 1991).

En esta sección se revisan algunas definiciones de espacios de trabajos y se presentan diversos índices independientes de la postura que pueden ser útiles en el diseño de robot manipuladores.

#### 6.1. Tipos de espacios de trabajo

El espacio de trabajo de un robot es la zona del espacio físico que puede ser alcanzada por un punto de su órgano terminal. En la definición del espacio de trabajo de los robots manipuladores influyen tres factores diferentes: los límites de las

articulaciones; las configuraciones singulares; y la interferencia entre eslabones.

A continuación se enlistan algunas de las medidas del espacio de trabajo definidas en la literatura. Estos valores se pueden utilizar como medidas para caracterizar a un manipulador, pero también pueden ser utilizadas como criterios de desempeño en la fase de diseño de un manipulador.

**Espacio de trabajo máximo (o alcanzable)  $W_M$ .** Está compuesto por todos los puntos en el espacio cartesiano que el efector final puede alcanzar con al menos una orientación (Kumar, 1985).

**Espacio de trabajo de traslación  $W_t$ .** Está compuesto por todos los posibles puntos en el espacio cartesiano que el efector final puede alcanzar en una orientación dada.

**Espacio de trabajo de orientación  $W_o$ .** Se compone de todas las posibles orientaciones que se pueden alcanzar para una posición fija del efector final (Bonev, 2001).

**Espacio de trabajo diestro  $W_d$ .** Esta compuesto por todos los puntos en el espacio cartesiano que pueden ser alcanzados y en los cuales se puede alcanzar todas las orientaciones.

**Espacio de trabajo diestro y controlable  $W_{dc}$ .** Es un subconjunto del espacio de trabajo diestro que no contiene configuraciones singulares.

**Espacio de trabajo de orientación total  $W_{ot}$ .** Todos los puntos en el espacio cartesiano que pueden ser alcanzadas con todas las orientaciones entre un rango de valores.

**Espacio de trabajo inclusivo  $W_i$ .** Todos los puntos que se pueden alcanzar con al menos una orientación dentro de cierto rango de valores.

#### 6.2. Índice Global de Condicionamiento (GCI)

El Índice Global de Condicionamiento (Gosselin, 1991) es un índice independiente de la postura que permite evaluar globalmente el desempeño del manipulador en el espacio de trabajo. El GCI está definido de la siguiente manera:

$$GCI = \frac{\int_W \kappa^{-1} dW}{\int_W dW} \quad (22)$$

Si el GCI se acerca a cero, se dice que el espacio de trabajo del manipulador está mal condicionado. Si el GCI se acerca a 1 se dice que dicho espacio está bien condicionado.

Debido a la dificultad de obtener una solución exacta de la integral, una versión discreta de GCI puede ser expresada como:

$$GCI = \frac{\sum_{j=1}^{n_W} \kappa_j^{-1}}{n_W} \quad (23)$$

donde  $n_W$  es el número de nodos de una malla del espacio de trabajo discretizado; y el numerador es la suma de la inversa del número de condicionamiento de los distintos nodos que componen dicha malla. El GCI ha sido utilizado frecuentemente en el diseño y evaluación del espacio de trabajo de robots paralelos (Saltaren et al., 2007). En (Merlet, 2007) se sugiere que la integración numérica de este índice se realice mediante un método de Montecarlo.

### 6.3. Índice Global de Manipulabilidad (GMI)

Bajo la misma lógica del GCI se puede definir un Índice Global de la Manipulabilidad. Este índice estaría dado por la siguiente expresión

$$GMI = \frac{\int_W w dW}{\int_W dW} \quad (24)$$

donde  $w$  es el valor de la manipulabilidad en el diferencial de volumen  $dW$ . Si el GMI se acerca a cero, esto significa que el manipulador tiene una mala manipulabilidad dentro del espacio de trabajo. Por el contrario, a mayores valores del GMI, mejor es el desempeño del manipulador dentro del espacio de trabajo desde el punto de vista de la manipulabilidad, es decir que las configuraciones del manipulador poseen elipsoides de velocidad de mayor volumen.

### 6.4. Índice de Condicionamiento Cinemático y Manipulabilidad Global

El índice de condicionamiento cinemático (KCI, por sus siglas en inglés) fue definido por Angeles y Lopez. Este índice independiente de la postura fue definido de la siguiente manera

$$KCI = \frac{1}{\kappa_m} \times 100 \quad (25)$$

donde  $\kappa_m$  es el mínimo valor del número de condición dentro del espacio de trabajo. Los manipuladores con un KCI igual al 100 % son los llamados isotrópicos.

Por otro lado (Yoshikawa, 1990), propuso la manipulabilidad global:

$$w_g = \min(w) \quad (26)$$

que es el mínimo valor que el índice de manipulabilidad puede alcanzar en el espacio de trabajo del manipulador.

### 6.5. Radio de aceleración

El radio de aceleración fue propuesto por (Graettinger, 1988) para manipuladores de posicionamiento (i.e. que no incluyen control sobre la orientación del efector).

Para la definición del índice, los autores definen un par de conceptos previamente: la región de operación  $\mathbf{Q}$ , y el conjunto de maniobrabilidad  $MS(\mathbf{Q})$ . La región de operación es un subconjunto del espacio de las articulaciones  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , determinado por el tamaño del espacio de trabajo y los límites en las velocidades articulares debido a las características actuadores o a la especificación de la tarea. Una vez expresados los torques en los actuadores en función de  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$ , y de la aceleración del efector final  $\ddot{\mathbf{x}}$ , y conocidos sus límites,  $\tau_l \leq \tau \leq \tau_u$ , se define el conjunto  $MS$  como el conjunto de las aceleraciones alcanzadas en todos los estados del la región de operación:

$$MS(\mathbf{Q}) = \{\ddot{\mathbf{x}} | \tau_l \leq \tau \leq \tau_u \forall (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbf{Q}\} \quad (27)$$

El radio de aceleración de un robot manipulador, está definido como el radio de la mayor esfera contenida dentro del conjunto de maniobrabilidad, centrada en  $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  en el espacio de las velocidades del efector final.

El problema de la obtención del radio de aceleración se formula como un problema de optimización (Graettinger, 1988). En ese artículo los autores proponen un algoritmo numérico para resolver ese problema de optimización.

### 6.6. Índice Global de Nivel y Distribución

Cuando se desea optimizar el diseño de un manipulador, para que las configuraciones que este alcance, obtengan buenos valores de un índice dependiente de la postura, diversos autores han propuesto optimizar la integral de este índice sobre el espacio de trabajo (Khatib, 1987), (Gosselin, 1991). Para manipuladores sencillos, es posible solucionar analíticamente esa integral y determinar que parámetros del diseño optimizan su valor. No obstante, en la mayoría de los casos se tiene que utilizar una versión discreta de la integrar, la cual corresponde a su vez en el promedio del índice sobre el espacio de trabajo. Este es el caso del GCI, (Merlet, 2007).

El promedio naturalmente refleja el nivel de los valores del índice, no obstante no refleja la distribución de estos valores en las diferentes regiones del espacio de trabajo. Algunos autores han sugerido el uso de la desviación estándar para medir la uniformidad del valores que alcanza el índice en los diversos puntos o regiones (Pamanes, 1991), (Li, 2005), (Li, 2010).

En base a lo anterior, se podría definir de manera general un Índice Global de Nivel y Distribución de un índice de desempeño dependiente de la postura,  $\mu$ . Este índice estaría dado de la siguiente manera:

$$G_W(\mu) = \alpha_1 n(\mu) \pm \alpha_2 d(\mu) \quad (28)$$

donde:

$$n(\mu) = \frac{1}{n_W} \sum_{j=1}^n \mu_j, \quad (29)$$

$$d(\mu) = \sqrt{\frac{1}{n_W} \sum_{j=1}^n (\mu_j - n)^2} \quad (30)$$

y  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son factores de ponderación. Los términos  $n(\mu)$  y  $d(\mu)$  corresponden al promedio y la desviación estándar de los valores del índice  $\mu$  en el espacio de trabajo del manipulador. El signo + se utiliza si lo que se desea es minimizar los valores del índice  $\mu$ , de esta manera se penaliza el valor de la media con el valor de la desviación estándar. Contrariamente, si lo que se desea es maximizar los valores de  $\mu$ , entonces se utiliza el signo -.

El propósito de este índice global es determinar el nivel medio del valor de  $\mu$ , y la mismo tiempo la distancia media que existe entre este valor medio y los valores del índice  $\mu$  en las diversas configuraciones. De esta manera se puede determinar diseños en los cuales el nivel general de los valores del índice sea bueno. Por ejemplo, considere que los mapeos de  $\mu$ , presentados en la siguiente figura, corresponden a 2 diseños diferentes de un manipulador (es decir, que los eslabones tiene diferentes dimensiones) y suponga que el promedio de ambos mapeos es idéntico.

Si  $\mu$  fuera la inversa del número de condición, el GCI para ambos diseños sería el mismo. Se puede observar que en la figura a) solo algunas configuraciones logran valores muy altos de

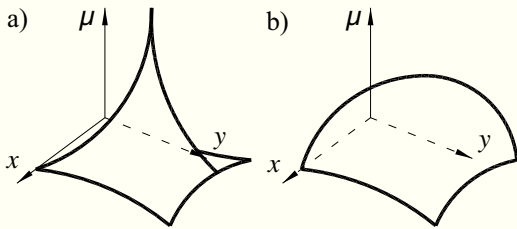


Figura 3: Mapeo del índice  $\mu$  para dos diseños diferentes de un manipulador.

$\mu$ , mientras que los alrededores alcanzan valores muy pobres. Por otro lado, en el caso de la figura b) se puede observar que el índice  $\mu$  no alcanza valores tan altos como en el caso de la figura a), sin embargo la mayoría de las configuraciones alcanzan valores cercanos a la media. El índice  $G_W(\mu)$  valoraría mejor este segundo caso. De esta forma el índice  $G_W(\mu)$  no solo valora los niveles de  $\mu$  en el espacio de trabajo, sino también la adecuada distribución de este valor en todas las configuraciones. Para el caso número de condición este índice fue definido recientemente por (Li, 2010).

Otro índice global se podría expresar mediante la división del promedio entre la desviación estándar:  $G_W(\mu) = \frac{n(\mu)}{d(\mu)}$ . Este índice fue definido por (Li, 2005) para el caso particular de la inversa del número de condición. Sin embargo, este índice puede ocasionar problemas cuando el valor de la desviación estándar es menor que 1. Por lo tanto, definimos aquí otro índice, llamado *relación de nivel y distribución* de un índice  $\mu$  dependiente de la postura:

$$R(\mu) = \frac{\alpha_1 n(\mu)}{\alpha_2 d(\mu) + 1} \quad (31)$$

De esta manera, este índice sería directamente proporcional al promedio de  $\mu$ , e inversamente proporcional a la desviación estándar. Si lo que se desea es minimizar los valores  $\mu$  en el espacio de trabajo, entonces este índice se adecuaría mejor mediante el producto,  $R(\mu) = \alpha_1 n(\mu)(\alpha_2 d(\mu) + 1)$ .

Por otro lado, podríamos definir otro índice a partir de la desviación estándar, seleccionando un valor medio deseado de un índice para el espacio de trabajo, y midiendo la lejanía de los valores (en cada configuración) a este valor mediante la desviación estándar. Minimizando la desviación estándar encontraríamos el diseño cuyas configuraciones en general estén mas cerca del valor medio deseado. Finalmente, las expresiones  $n(\mu)$  y  $b(\mu)$ , pudieran expresarse también en forma de integrales.

## 7. Conclusiones

En este artículo se realizó una revisión de diversos índices de desempeño que pueden ser útiles para la planificación de movimientos y el diseño de robots. Se presento la definición de una colección de índices de cuatro tipos diferentes: índices de desempeño cinetostático, índices de desempeño dinámico, índices de límites articulares, y finalmente índices definidos sobre el espacio de trabajo.

Los índices de desempeño cinetostático permiten evaluar la capacidad de un manipulador para transformar las velocidades o fuerzas en los actuadores, en velocidades o fuerzas en el efector final. Uno de estos índices es el Número de Condición de la matriz Jacobiana, utilizado para determinar la precisión del robot en una configuración dada. Por otro lado está la Manipulabilidad, que mide la capacidad del robot, en cierta postura, para generar velocidades en el efector final. El Índice de Compatibilidad permite determinar las configuraciones del manipulador que sean más adecuadas con la tarea a realizar. Cuando se desea determinar la cercanía a una configuración singular, (Klein, 1987) propuso el uso de Mínimo Valor Singular, ya que este valor aporta información directa sobre si la matriz Jacobiana está a punto de perder su rango máximo.

La mayoría de los índices de desempeño presentados fueron definidos para aplicarse en robots seriales. No obstante, ha habido esfuerzos para la aplicación de estos mismos en otras arquitecturas mecánicas, (Wen, 1999), (Park, 1998), (Bicchi, 1995). En el caso de los manipuladores paralelos, el número de condición de la matriz Jacobiana es el que se ha utilizado con mayor frecuencia (Merlet, 2006).

Para que los índices de desempeño basados en la matriz Jacobiana puedan ser evaluados de manera consistente, los elementos de la matriz Jacobiana deben ser dimensionalmente homogéneos (Lipkin, 1989), (Doty, 1993), ya que su uso puede causar problemas importantes en el diseño y el control de un manipulador. Algunos autores han sugerido que se divida el estudio de los índices de desempeño para manipuladores con Jacobianas homogéneas y no homogéneas (Di Gregorio, 2002), (Di Gregorio, 2006), (Angeles, 2007). Para los manipuladores cuya Jacobiana es homogénea, es decir, aquellos manipuladores de posicionamiento u orientación de 2 o 3 grados de libertad cuyas articulaciones son del mismo tipo, los índices presentados tienen aplicación directa y ofrecen información a nivel teórico y práctico. Por otro lado, en el caso de manipuladores cuya matriz no es homogénea, es decir aquellos manipuladores de posicionamiento y orientación de 3 o mas grados de libertad, se han propuesto diversas formas de solucionar este problema. En este artículo se presentaron algunas de esas soluciones.

Cuando un robot manipulador se encuentra en movimiento está sujeto a fuerzas no lineales como lo son: las fuerzas inerciales, fuerzas centrífugas y de coriolis, y las fuerzas de la gravedad. Por lo tanto, es importante para el diseño, el análisis y el control, caracterizar la dinámica del manipulador mediante índices de desempeño. En este caso, en (Yoshikawa, 1985a) y (Ma, 1991a) se propusieron la Manipulabilidad Dinámica y el Índice de Condicionamiento Dinámico, respectivamente. En (Khatib, 1987), presento un índice de desempeño dinámico y una estrategia de optimización que tiene por objetivo extender los límites máximos de velocidad que el efector final puede alcanzar, y al mismo tiempo lograr la mayor uniformidad de estos límites en todas direcciones.

En este trabajo presentamos diversos índices sobre los límites articulares. Los autores de estos índices los han utilizado como funciones objetivo a optimizar durante la planificación de trayectorias.

Por otro lado, en este artículo propusimos algunos índices

de desempeño globales. Estos índices, no solo valoran el nivel medio de un índice dependiente de la postura en el espacio de trabajo, sino también la adecuada distribución los valores de ese índice en todas las configuraciones.

A pesar de que los índices de desempeño presentados son herramientas eficaces de evaluación, se debe tener en cuenta que para realizar una valoración completa de un manipulador, se debe considerar otros factores, como lo son: la capacidad de carga, la velocidad, el alcance, la exactitud, la repetitividad, la seguridad, el costo, entre otros.

## English Summary

### Performance Indices for Robotic Manipulators: a review of the State of the Art.

#### Abstract

The performance indices are important tools for motion planning and design of robot manipulators. In this paper we present a collection of some of the performance indices that have generated interest in the robotics community. These indices are four different types: kinetostatic performance indices, dynamic performance indices, indices of joint limits, and finally global performance indices. In addition, we review the strategies that have been proposed to solve the problems that occur when the units of the Jacobian matrix elements are not homogeneous. At the end of this paper, we propose a set of global performance indices that can be useful in the design of robot manipulators.

#### Keywords:

Performance Indices, Kinetostatic, Dynamic, Joint Limits, Global

## Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por el proyecto DPI2006-06493 del Ministerio de Educación y Ciencia de España. La tercera autora y el cuarto autor agradecen por sus becas doctorales al CONACYT de México y al MAEC-AECI de España, respectivamente.

## Referencias

- Alba, O. Wenger, P. y P. J., 2005. Consistent kinetostatic indices for planar 3-dof parallel manipulators, application to the optimal kinematic inversion. In: *Proceedings of the ASME DETC*. pp. 765–774.
- Angeles, J., 2007. *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems, Theory, Methods, and Algorithms*. Springer.
- Asada, H., 1983. A geometrical representation of manipulator dynamics and its application to arm design. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 150 (3), 131–142.
- Baron, L., May 2000. A joint-limit avoidance strategy for arc-welding robots. In: *International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*.
- Baron L. y Bernier, G., 2001. The design of parallel manipulators of star topology under isotropic constraint. In: *Proc. DETC ASME*.
- Bestard, J. y Wiens, G., Jun. 2007. Manipulability based path and traj planning for hybrid mobility climbing. In: *12th IFToMM World Cong*.
- Bicchi, A. Melchiorri, C. y B. D., 1995. On the mobility and manipulability general multiple limb robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 11 (2), 215–228.
- Bonev, I. y Ryu, J., 2001. A new approach to orientation workspace analysis of 6-dof parallel manipulators. *Trans. ASME, Journal of Mechanical Design* 123 (1), 15–28.
- Carretero, J. Nahon, M. P. R., 2000. Workspace analysis and optimization of a novel 3-dof parallel manipulator. *International Journal of Robotics and Automation* 15 (4), 178–188.
- Chablat, D. Wenger, P., 2003. Architecture optimization of a 3-dof parallel mechanism for machining applications, the orthoglide. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 19 (3), 403–410.
- Chablat, D. Wenger, P. C. S. y A. J., 2002. The isoconditioning loci of three-dof parallel manipulators. In: *Proc. DETC ASME*.
- Chablat, D. Wenger, P. y A. J., 1998a. The isoconditioning loci of closed-chain manipulators. In: *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*. pp. 1970–1976.
- Chablat, D. Wenger, P. y A. J., 1998b. Working modes and aspects in parallel manipulators. In: *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*. pp. 1964–1969.
- Chiu, S., 1988. Task compatibility of manipulator postures. *The International Journal of Robotics Research* 7 (5), 13–21.
- Craig, J., 2005. *Introduction to Robotics*. Prentice Hall.
- Di Gregorio, R., 2006. Dynamic model and performances of 2-dof manipulators. *Robotica* 24 (1), 51–60.
- Di Gregorio, R. y Parenti-Castelli, V., 2002. Dynamic performance indices of 3-dof parallel manipulators. In: *Proc. Advances in Robot Kinematics*. pp. 11–20.
- Doty, K. Melchiorri, C. y B. C., 1993. A theory of generalized inverse for robotics. *Int. J. Robot. Res* 12 (1), 1–19.
- Gosselin, C., 1990a. Dexterity indices for planar and spatial robotic manipulators. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. pp. 650–655 vol.1.
- Gosselin, C. y A. J., 1990b. Kinematic inversion of parallel manipulators: the presence of incompletely specified tasks. *ASME J. Mechanical Design* 112 (4), 494–500.
- Gosselin, C. y Angeles, J., 1991. A global performance index for the kinematic optimization of robotic manipulators. *J. Mech. Des.* 113 (3), 220–226.
- Graettinger, T. y Krogh, B., 1988. The acceleration radius: a global performance measure for robotic manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 4 (1), 60–69.
- Huang, T. y Whitehouse, D., 1998. Local dexterity, optimal architecture and optimal design of parallel machine tools. *Ann. CIRP* 47 (1), 347–351.
- Huang, T. Li, M. L. Z. C. D. y W. D., 2004. Optimal kinematic design of parallel manipulators with well-shaped workspace bounded by a spherical conditioning index. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 20 (3), 538–543.
- Huo, L. y Baron, L., 2011. The self-adaptation of weights for joint-limit singularity avoidances of functionally redundant robotic-task. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 27 (2), 367–376.
- Khatib, O. y Burdick, J., 1987. Optimization of dynamics in manipulator design: The operational space formulation. *The International Journal of Robotics and Automation* 2 (2), 90–98.
- Khatib, O., 1980. *Commande dynamique dans l'espace opérationnel des manipulateurs en présence d'obstacles*. Ph.D. thesis, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France.
- Kim, S. y Ryu, J., 2003. New dimensionally homogeneous jacobian matrix formulation by three end-effector points for optimal design of parallel manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 19 (4), 731–740.
- Klein, C. y Blaho, B., 1987. Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulators. *International Journal of Robotics Research* 6 (2), 72–83.
- Kumar, A. y Waldron, K., 1985. The workspaces of a mechanical manipulator. *Trans. ASME, Journal of Mechanical Design* 4 (2), 3–9.
- Li, Z. y Sastry, S., Feb. 1988. Task-oriented optimal grasping by multifingered robot hands. *IEEE Journal of Robotics and Automation* 4 (1), 32–44.
- Li, J. Wang, S. W. X. y H. C., 2010. Optimization of a novel mechanism for a minimally invasive surgery robot. *Int. J. Med. Robotics Comput. Surg.* 6 (1), 8390.

- Li, M. Huang, T. Z. D., 2005. Conceptual design and dimensional synthesis of a reconfigurable hybrid robot. *ASME J Manuf Sci Eng* 127 (3), 647–653.
- Liegeois, A., 1977. Automatic supervisory control of the configuration and behavior of multibody mechanisms. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 7 (12), 868–871.
- Lipkin, H. y Duffy, J., 1989. Hybrid twist and wrench control of a robotic manipulator. *ASME J. Mechanisms Transmissions Automation Des.* 110, 110–144.
- Ma, O. y Angeles, J., 1991a. The concept of dynamic isotropy and its applications to inverse kinematics and trajectory planning. In: *Proceedings 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*.
- Ma, O. y Angeles, J., 1991b. Optimum architecture design of platform manipulators. In: *Fifth International Conference on Advanced Robotics*, 1991. 'Robots in Unstructured Environments'. pp. 1130–1135 vol.2.
- Merlet, J., 2007. Jacobian, manipulability, condition number and accuracy of parallel robots. In: *Robotics Research*. Vol. 28. pp. 175–184.
- Merlet, J. P., 2006. *Parallel Robots*. Springer.
- Moreno, H. A. y Pamanes, J., 2011. Isotropic design of a 2 dof parallel kinematic machine with a translational workpiece table. In: *13th IFToMM World Congress in Mechanism and Machine Science*.
- Moreno, H. Pamanes, J. W. P. y. C. D., 2006. Global optimization of performance of a 2prp parallel manipulator for cooperative tasks. In: *ICINCO-RA'06*. pp. 516–522.
- Moreno, H. Saltaren, R. P. J. y. A. R., 2010. Motion strategy for the climbing robot on a metallic orthogonal structure. In: *Proceedings of the 13th International Conference on Climbing and Walking Robots*. pp. 1161–1168.
- Pamanes, A. y Zeghloul, S., Apr. 1991. Optimal placement of robotic manipulators using multiple kinematic criteria. In: *Robotics and Automation*, 1991. *Proceedings.*, 1991 *IEEE International Conference on*. pp. 933–938 vol.1.
- Park, F. y Kim, J., 1998. Manipulability of closed kinematic chains. *J. Mech. Des.* 120 (4), 542–548.
- Pámanes, J., 1992. Contribution à l'étude de l'accessibilité aux tâches et à la détermination du placement optimal de robots manipulateurs. Ph.D. thesis, Université de Poitiers, Poitiers, France.
- Salisbury, K. y Craig, J., 1982. Articulated hands: force and kinematic issues. *The Int. J. of Robotic Research* 1 (1), 4–17.
- Saltaren, R., Sabater, J. M., Yime, E., Azorin, J. M., Aracil, R., Garcia, N., 2007. Performance evaluation of spherical parallel platforms for humanoid robots. *Robotica* 25 (3), 257–267.
- Ueberle, M., Mock, N., Buss, M., 2004. Vishard10, a novel hyper-redundant haptic interface. In: *Proceedings of the 12th International Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems*. pp. 58–65.
- Voglewede, P. y Ebert-Uphoff, I., 2004. Measuring closeness to singularities for parallel manipulators. In: *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*. pp. 4539–4544.
- Wen, J.T.-Y. y Wilfinger, L., Jun. 1999. Kinematic manipulability of general constrained rigid multibody systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 15 (3), 558–567.
- Yoshikawa, T., 1985a. Dynamic manipulability of robot manipulators. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. pp. 1033–1038.
- Yoshikawa, T., 1985b. Manipulability of robotic mechanisms. *The International Journal of Robotics Research* 4 (2), 3–9.
- Yoshikawa, T., 1990. *Foundations of Robotics: Analysis and Control*. The MIT Press.
- Zanganeh, K. y Angeles, J., 1997. Kinematic isotropy and the optimum design of parallel manipulators. *Int. J. Robot. Res.* 16 (2), 185–197.