

## Tutorial

### Control PID robusto: Una visión panorámica

Ramon Vilanova<sup>a,\*</sup>, Víctor M. Alfaro<sup>b,a</sup>

<sup>a</sup>Departament de Telecomunicació i d'Enginyeria de Sistemes Escola d'Enginyeria, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Barcelona, España

<sup>b</sup>Departamento de Automática, Escuela de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Costa Rica, San José, 11501-2060 Costa Rica

---

#### Resumen

En este trabajo se presenta una perspectiva general de los diferentes enfoques existentes, con que se ha afrontado el problema de obtener un controlador proporcional integral derivativo (PID) robusto. La estructura restringida y muy particular que impone el controlador PID, supone por un lado, un atractivo que ha sido la causa de su extenso uso en el sector industrial, pero por el otro, impone una serie de dificultades al plantear la incorporación de consideraciones de robustez en su diseño. Hoy en día, el abanico de posibilidades de diseño de un controlador PID es realmente amplio, pudiendo afrontarse con prácticamente cualquier enfoque, en concreto con cualquier enfoque de control robusto. A este respecto, es importante distinguir entre los métodos y las reglas de sintonía, siendo de especial interés en el caso del controlador PID, la generación de reglas de sintonía a la vez simples y que proporcionen ciertas garantías de robustez. Como paso previo a esta clasificación, conviene establecer de qué manera se representa y mide la robustez. Por lo tanto, de qué manera acaba formulándose como especificación de diseño. El trabajo repasa también, conceptos aparecidos recientemente en la literatura del control PID y relacionados con la robustez, como son el cumplimiento de la misma y la fragilidad del controlador. *Copyright © 2011 CEA.*

*Palabras Clave:*

Control PID, Robustez, Incertidumbre.

---

#### 1. Introducción

Sin duda alguna, desde su introducción en 1940 (Babb, 1990; Bennett, 2000), los controladores PID (proporcional integral derivativo), son la opción más utilizada en las diferentes aplicaciones de control de procesos. Su éxito se debe principalmente, a la sencillez de su estructura (tres parámetros a sintonizar) y funcionamiento, que le permiten al ingeniero de control un entendimiento mejor y fácil, comparado con otras técnicas de control avanzadas. Este hecho ha motivado los continuos esfuerzos de investigación orientados a encontrar enfoques alternativos de diseño y nuevas reglas de sintonía, con el fin de mejorar el rendimiento de los lazos de control con base en controladores PID.

La literatura generada alrededor de las técnicas y las metodologías de diseño y sintonía de controladores PID es realmente vasta. Merece especial atención el *IFAC Workshop PID'00 Present and Future of PID control* que tuvo lugar en Terrassa, España, en abril de 2000, donde se proporcionó una visión del

estado del arte en el tema, así como un buen augurio para el futuro de la investigación en el campo de los controladores PID. A este evento le sucedieron en enero de 2002 y febrero de 2006, sendos números especiales de las revistas *IEE Control Theory and Practice Part D* (ahora IET) e *IEEE Control Systems Magazine*. En estos números se presentan en considerable profundidad, muchos aspectos relacionados con el control PID, que van desde trabajos de control más especializados, hasta revisiones de productos tecnológicos, patentes, software, etc., confirmando de alguna manera, el interés que el controlador PID continúa teniendo, tanto en el ámbito académico como en el industrial.

La mayoría de los trabajos que han ido apareciendo a lo largo de los años, toman la forma de propuestas de diseño con base en modelos simples y, generalmente, dan lugar a reglas de sintonía que relacionan los parámetros del modelo del proceso, con los parámetros del controlador en una forma directa y sencilla. Así también encontramos diversos libros de ingeniería de control (algunos de ellos específicos de control PID) como son: Åström and Hägglund (2006), Johnson and Moradi (2005) y Visioli (2006), en los cuales se respalda la necesidad de disponer de diferentes técnicas y enfoques, reglas de sintonía simples, así como, cuando se requiera, de procedimientos más elaborados. No obstante, un punto común en todos ellos, es la

\*Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [Ramon.Vilanova@uab.cat](mailto:Ramon.Vilanova@uab.cat) (Ramon Vilanova), [Victor.Alfaro@ucr.ac.cr](mailto:Victor.Alfaro@ucr.ac.cr) (Víctor M. Alfaro)

necesidad de incorporar un buen conocimiento del problema de control y su relación con el modelado y el conocimiento del proceso a controlar.

En este sentido, el trabajo inicial que elaboraron Ziegler and Nichols (1942), constituye el primer intento para un diseño sistemático de un controlador PID, a partir de una información mínima del proceso. A este trabajo le siguió el también conocido trabajo de Chien et al. (1952), en el que se presenta una modificación del trabajo de Ziegler y Nichols y donde se plantea la necesidad de considerar métodos diferentes para la respuesta en referencia y para la atenuación de perturbaciones. La introducción de ideas sobre el diseño algebraico, dió lugar al llamado “ $\lambda$ -tuning” o método de Dahlin (1968). Este método, a su vez, está estrechamente relacionado con el predictor de Smith y el método de diseño con base en el control con modelo interno (IMC) (Rivera et al., 1986). De entre ellos, son de especial mención las consideraciones apuntadas, en las que se muestra que el control IMC toma la forma de un controlador PI o PID, dependiendo de la aproximación racional que se utilice del retardo. Estos enfoques, no obstante, utilizan la cancelación de los polos del proceso, lo que puede dar lugar a respuestas a una perturbación bastante indeseables, sobretodo para procesos con constantes de tiempo muy grandes. En Chien and Fruehauf (1990) se presenta una modificación que no cancela los polos del proceso, mientras que Skogestad (2003), presenta una variación del controlador IMC, aplicado a la sintonía de controladores PI y PID denominada SIMC, en la que se evita la cancelación mediante una redefinición del modo integral, para los casos de sistemas dominados por constantes de tiempo grandes.

Los métodos con base en la aplicación de técnicas de optimización, constituyen una alternativa a los métodos analíticos. La idea básica, es intentar capturar diferentes aspectos deseados del funcionamiento en lazo cerrado, bajo la firma de una determinada funcional de coste a minimizar. En Smith and Corripio (1985) y en Shinskey (1988), por ejemplo, se proporcionan controladores optimizados respecto a los criterios de error integral ISE, IAE e ITAE; y en Zhuang and Atherton (1993) se proporcionan reglas de sintonía simples, para diferentes variantes de criterios integrales. En Visioli (2001) se presenta la correspondiente versión para los sistemas inestables e integrantes.

Más recientemente, en parte gracias a la mayor accesibilidad a las rutinas de optimización, han aparecido enfoques de optimización multiobjetivo, como por ejemplo Toivonen and Totterman (2006) y Herreros et al. (2002), donde se plantea un enfoque genérico y se exemplifica su aplicación al caso de un controlador PID. En un trabajo más reciente Reynoso et al. (2009) aplican esta estrategia al “benchmark” propuesto por el grupo de Ingeniería de Control de CEA-IFAC en el año 2008.

La aplicación de estas estrategias de optimización, aunque efectivas, recae en la utilización de técnicas numéricas bastante complejas y no resultan en reglas de sintonía. Mediante su aplicación, se obtiene la sintonía del controlador como la solución al problema de optimización.

La disponibilidad efectiva de potentes herramientas de optimización, que posibilitan la resolución de problemas de control óptimo con relativa facilidad, pone encima de la mesa un pensamiento bastante común, en referencia a la necesidad o no, de

disponer de reglas de sintonía. Si bien es cierto que es posible resolver en un tiempo más que razonable, problemas que hace unos años eran impensables, desde el punto de vista del control, la solución de estos problemas requiere de un modelo del proceso controlado que sea suficientemente fiable. La situación real, no obstante, es que la información disponible es normalmente tan solo marginal. De ahí la importancia de disponer de reglas de sintonía que requieran una mínima información del proceso a controlar. Una problemática adicional de los procedimientos de optimización, es la disponibilidad de una *buena* condición inicial que facilite o, en ocasiones, garantice la convergencia de los mismos. De esta forma, la aplicación de una regla de sintonía puede proporcionar esta condición inicial. Una constatación de la necesidad de disponer de reglas de sintonía de una complejidad limitada y que, a la vez, requieran una mínima información del proceso, son las propuestas que se pueden encontrar en la literatura y que continúan hoy en día apareciendo.

Esta distinción, y por qué no clasificación, es de especial aplicación para los que se centran en la obtención de un controlador PID, con determinadas características de robustez. La robustez fue un aspecto no considerado durante mucho tiempo, como parte integrante de las consideraciones a contemplar en el diseño de un sistema de control. No únicamente en el caso del control PID, si no también desde un punto de vista completamente amplio. No es hasta la formulación originada por Zames en el año 1981, del tratamiento de la incertidumbre mediante la norma infinito, que el control robusto entra de lleno en la teoría de control y da lugar a una doctrina hoy en día completamente desarrollada y madura, conocida como el control  $\mathcal{H}_\infty$ . Este enfoque ha quedado recogido en numerosos libros, que ofrecen una amplia visión perspectiva sobre el tema y las diferentes variantes y planteamientos a que ha dado lugar (Grimble, 1994; Morari et al., 1988; Vidyasagar, 1985).

Las ideas emergidas del desarrollo del control robusto han acabado, por supuesto, siendo particularizadas al caso del controlador PID. Esta permeabilización ha originado diferentes planteamientos, de lo que se podría denominar *control PID robusto*. De esta forma, se distingue entre la obtención de un PID robusto; como resultado de la solución de un problema de control robusto aplicado a un controlador de estructura restringida; y las propuestas de reglas de sintonía simples; que incorporan en su concepción consideraciones de robustez. A pesar de que el resultado final es claramente diferente, en ambos casos, no obstante, es fundamental la descripción que se utiliza de la incertidumbre asociada al modelo del proceso a controlar. La manera en la que se incorpora la tolerancia del sistema de control a los errores de modelado, determina en una forma clara, las características y el planteamiento del problema de diseño.

De esta forma, por ejemplo, se tienen los métodos desarrollados con base en el control con modelo interno (Rivera et al., 1986), donde las reglas de sintonía quedan parametrizadas en términos de un parámetro directamente relacionado con la robustez del sistema. No obstante, esta robustez no queda vinculada directamente a un indicador o medida de robustez. Por otro lado, se tienen las conocidas estrategias de diseño estableciendo los márgenes de ganancia y fase, iniciadas en Åström and Hägglund (1984) y que han dado lugar a numerosas variantes

y extensiones. En este caso, el parámetro de diseño es directamente la medida de robustez escogida para el sistema en lazo cerrado. Esta idea se extendió a la utilización del máximo de la función de sensibilidad (comúnmente denominado  $M_S$ ), siendo una medida bastante común hoy en día. Aquí también se puede distinguir, entre los enfoques que se plantean conseguir un lazo cerrado que proporcione un determinado valor de  $M_S$  (Åström and Hägglund, 2004) y los enfoques más flexibles que proporcionan reglas de sintonía directamente parametrizadas por el valor de  $M_S$  deseado (Alfaro et al., 2009d).

Cuando no se habla de indicadores concretos de robustez; o medidas de robustez; el abanico de posibilidades se abre de una manera considerable. Aquí se incluirían estrategias que pretenden garantizar la estabilidad de un sistema descrito mediante varios modelos, correspondientes a diferentes puntos de trabajo posibles (Toscano, 2005); estrategias de diseño  $\mathcal{H}_\infty$  o combinadas  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  (Goncalves et al., 2008), donde el diseño es dirigido por funciones de peso en el dominio de la frecuencia, que caracterizan la incertidumbre asociada al modelo; formulaciones en el espacio de estados y estrategias de desigualdades matriciales lineales (LMI) (Ge et al., 2002); y aplicación de otros criterios de estabilidad en el dominio de la frecuencia (Hara et al., 2006), entre otros.

Mención aparte merecen los trabajos de Silva, Datta y Bhattacharyya, para la determinación del conjunto de controladores que estabilizan una familia determinada de plantas, presentados en forma comprensiva en (Silva et al., 2005). Estos establecieron otro enfoque para el diseño de sistemas de control robustos (Ho et al., 2001; Silva et al., 2003).

Tal como se ha comentado anteriormente, a pesar de la disponibilidad de herramientas numéricas avanzadas y la posibilidad de plantear diseños con base en la formulación de problemas de relativa complejidad, sigue existiendo una determinada predilección por la formulación del problema del ajuste de controladores PID, con base en reglas de sintonía; por poder ser estas de baja complejidad. A este respecto es interesante complementar la inclusión de especificaciones de robustez en el problema de diseño, con las siguientes consideraciones:

- Cumplimiento de las especificaciones de robustez: ¿Proporciona el controlador un lazo cerrado con la robustez indicada en las especificaciones?
- Compromiso entre la robustez y el rendimiento del sistema de control: ¿Se tiene una idea del precio que se paga (en términos de rendimiento), por la robustez especificada?
- Fragilidad del controlador: ¿Mantendrá el sistema de control la robustez obtenida, ante pequeñas variaciones en los parámetros del controlador (*ajuste fino*)?

De esta forma, en este trabajo se pretende dar un repaso a los enfoques del diseño de controladores PID, en los que se incorporan de manera explícita consideraciones de robustez. En la siguiente sección, se realiza una presentación del marco de trabajo, haciendo hincapié en las posibles medidas de robustez a utilizar, así como en las posibles maneras de describir la

incertidumbre asociada al proceso. A continuación, en la sección 3, se presenta un breve repaso a las primeras formulaciones de diseños con base en especificaciones por márgenes de ganancia y fase. Seguidamente, en la sección 4, se presentan las reglas de sintonía con base en la incorporación de la sensibilidad máxima como medida de robustez, distinguiéndolas de las reglas que incorporan consideraciones de robustez pero de una forma más genérica, sin vincularla a un indicador concreto, enfoques que se presentan en la sección 5. Obedeciendo a formulaciones completamente diferentes, en la sección 6, se ofrece una panorámica de la miscelánea de enfoques existentes, algunos especialmente particulares, con base en una adaptación de los métodos originados dentro del seno de la teoría de control robusto. El estudio se complementa con una serie de consideraciones, que son de especial aplicación para el caso de diseños con base en medidas de robustez. Estas consideraciones incluyen el reciente concepto de fragilidad de controladores; en especial su particularización al caso PID; así como observaciones necesarias en referencia al cumplimiento de las especificaciones de robustez y su relación con el conocido compromiso entre la robustez y el rendimiento del sistema de control.

## 2. La robustez: planteamientos y medidas

En lo que sigue, se utilizará el sistema de control monovariable representado en la figura 1. Cabe notar que este no es el diagrama de control más completo con que se puede encontrar, si no que obedece al propósito de facilitar la discusión que sigue. El proceso a controlar  $P(s)$  se supone generalmente bajo la forma de la función de transferencia de un modelo de primer orden con retardo:

$$P(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1}, \quad (1)$$

donde se define el parámetro adimensional  $\tau_o = L/T$ , utilizado en ocasiones para parametrizar las relaciones de sintonía. El controlador  $C(s)$  responde a un controlador PID en una de sus diversas formulaciones. No se entrará en la presentación de todas las posibles variaciones existentes puesto que, como se verá más adelante, no todos los enfoques de diseño utilizan la misma formulación del controlador PID y, además, de alguna manera las definiciones que siguen en lo referente a las medidas de estabilidad, son de carácter completamente general y no aplican tan solo al caso PID. No obstante, quizás la formulación más usual es la Estándar con filtro en la acción derivada, dada por:

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} \right). \quad (2)$$

De esta forma, en base a este diagrama quedan definidas las siguientes relaciones entre las señales de entrada y salida:

$$y(s) = T(s)r(s) + P(s)S(s)d(s), \quad (3)$$

$$u(s) = C(s)S(s)r(s) + T(s)d(s), \quad (4)$$

donde las funciones  $S(s)$  y  $T(s)$  son, respectivamente, las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria, que quedan definidas como:

$$S(s) \doteq \frac{1}{1 + P(s)C(s)}, \quad T(s) \doteq \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}, \quad (5)$$

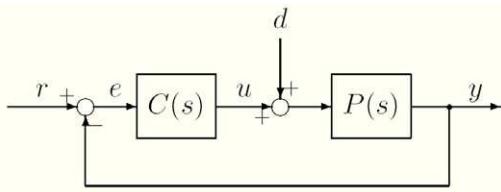


Figura 1: Diagrama de bloques sistema de control realimentado

y que, como se verá, juegan un papel fundamental en la determinación de las propiedades de estabilidad del sistema de control.

Al hablar de estabilidad del sistema de control, esta es usualmente entendida como estabilidad absoluta. Es decir, la función de transferencia resultante en lazo cerrado, siempre que no haya cancelación de modos inestables, tiene todos sus polos en el semiplano izquierdo. No obstante, si se desea introducir medidas de rendimiento del sistema respecto a la propiedad de estabilidad, entonces se necesita el concepto de estabilidad relativa. De alguna manera, la estabilidad relativa se utiliza para determinar cuán estable es el sistema o, dicho de forma alternativa, a qué distancia se encuentra el lazo cerrado de la inestabilidad. Esta idea de distancia a la inestabilidad, origina diferentes interpretaciones en tanto que se relaciona con las posibles fuentes de error en el modelo del proceso utilizado para el diseño del controlador: ¿Qué cantidad y qué tipo, de incertidumbre se puede permitir antes que el sistema de control se vuelva inestable? Ante esta interpretación, las diferentes medidas de estabilidad relativa se denominan *medidas de robustez*. De esta forma, la incorporación de estas medidas en los procedimientos de diseño y la concepción de las reglas de sintonía, da lugar a lo que se denomina como diseño de un controlador robusto. En nuestro caso, el de un controlador PID robusto.

### 2.1. Medidas clásicas de robustez

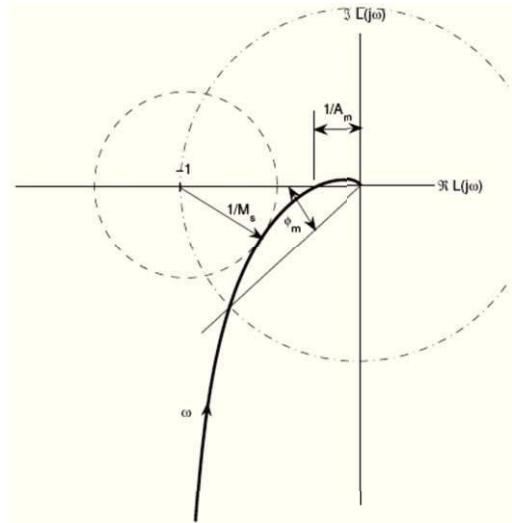
Las medidas de robustez han ido evolucionando a lo largo de los años, dando lugar, consecuentemente, a nuevos enfoques del control robusto. De esta forma, se conocen como medidas clásicas de robustez; o de estabilidad relativa; los márgenes de ganancia y fase. Estas medidas se apoyan en el criterio de estabilidad de Nyquist y consideran la posibilidad de variar el número de giros alrededor del punto crítico  $(-1, 0)$ , bajo una variación en la ganancia o en la fase, respectivamente, del sistema.

Así, el *margen de ganancia*,  $A_m$ , es una especificación del punto en que, sobre el diagrama de Nyquist, la respuesta en frecuencia de la función de lazo debe cruzar el eje real negativo. Esta especificación determina un margen de ganancia, puesto que define un factor multiplicativo para la ganancia, para el cual el sistema se haría inestable. La figura 2 representa la geometría correspondiente al margen de ganancia. El valor de  $A_m$  se define a través de la condición:

$$A_m |C(j\omega_{-\pi})P(j\omega_{-\pi})| = 1, \quad (6)$$

de esta forma

$$A_m = \frac{1}{|C(j\omega_{-\pi})P(j\omega_{-\pi})|}. \quad (7)$$

Figura 2: Definición de la sensibilidad máxima  $M_S$  y los márgenes de ganancia  $A_m$  y de fase  $\phi_m$ 

La frecuencia  $\omega_{-\pi}$  en la que se calcula el margen de ganancia, es la frecuencia a la que la fase de la cadena directa vale  $-180^\circ$ . La interpretación del margen de ganancia como medida de robustez, nos indica que en el caso en que el modelo del sistema sea incorrecto, su ganancia estática puede aumentar en un factor  $A_m$  antes de que el sistema se haga inestable. Valores típicos de especificación del margen de ganancia son  $2 \leq A_m \leq 5$ .

Por otra parte, el *margen de fase*,  $\phi_m$ , especifica en qué cantidad puede retardarse la fase del sistema, de manera que la rotación que se produciría sobre la respuesta en frecuencia del sistema, en el diagrama de Nyquist, la llevaría a cruzar el punto crítico  $(-1, 0)$ . La denominación margen de fase especifica pues, el desplazamiento que puede sufrir la fase del sistema antes de que el correspondiente lazo cerrado se haga inestable. La geometría correspondiente para el margen de fase, figura 2, conduce a la siguiente condición (en grados):

$$-\phi_m + \arg\{C(j\omega_1)P(j\omega_1)\} = -180^\circ, \quad (8)$$

de manera que

$$\phi_m = 180^\circ + \arg\{C(j\omega_1)P(j\omega_1)\}. \quad (9)$$

La frecuencia  $\omega_1$  en la que se calcula el margen de fase, es la frecuencia a la que la ganancia del sistema toma el valor uno. De manera análoga al margen de ganancia, la interpretación del margen de fase como medida de robustez, nos indica que en caso de que exista un error en el modelado del proceso, este puede llegar a sufrir un retraso de fase adicional de  $\phi_m$  grados, a la frecuencia  $\omega_1$ , antes de que el sistema se haga inestable. Valores típicos de especificación del margen de fase son  $30^\circ \leq \phi_m \leq 60^\circ$ .

### 2.2. La función de sensibilidad. ¿Una medida moderna?

La función de sensibilidad,  $S(s)$ , constituye hoy en día, la base para establecer la medida de robustez de referencia, dentro del ámbito del diseño de controladores PID. No obstante, su

interpretación como función clave para determinar la tolerancia del lazo de control a variaciones en el proceso a controlar, es bien conocida prácticamente desde la formulación del lazo re-alimentado como estrategia de control. Efectivamente, si tenemos una función  $f$  que depende de un parámetro  $\alpha$ , la sensibilidad de  $f$  a variaciones en  $\alpha$  se denota por  $S_\alpha^f$  y queda definida mediante:

$$S_\alpha^f \doteq \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta f/f}{\Delta\alpha/\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} = \frac{\alpha \partial f}{f \partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0}, \quad (10)$$

donde  $\alpha_0$  es el valor nominal de  $\alpha$  y  $\Delta f$  y  $\Delta\alpha$  representan las desviaciones de  $f$  y  $\alpha$  respecto a sus valores nominales. Se aplicará este concepto a la relación entre la señal de referencia y de salida de un sistema de control, para las versiones en lazo abierto y en lazo cerrado, dadas respectivamente por:

$$T_{la}(s) = P(s)C(s), \quad T_{lc}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}. \quad (11)$$

De esta forma, ante la presencia de incertidumbre en el proceso,  $P(s) = P_o(s) + \Delta P$ , las relaciones entrada salida anteriores sufrirán de esta incertidumbre y se verán desviadas respecto a los valores obtenidos en base a la aplicación del controlador a la planta nominal:  $T_{la}(s) = T_{la,o}(s) + \Delta T_{la}$ ,  $T_{lc}(s) = T_{lc,o}(s) + \Delta T_{lc}$ . Aplicando la definición anterior, las sensibilidades de  $T_{la}(s)$  y  $T_{lc}(s)$  a variaciones en la planta  $P(s)$  quedan determinadas como:

$$S_P^{T_{la}} = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta T_{la}(s)/T_{la,o}(s)}{\Delta P(s)/P_o(s)} = 1, \quad (12)$$

$$S_P^{T_{lc}} = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta T_{lc}(s)/T_{lc,o}(s)}{\Delta P(s)/P_o(s)} = S(s). \quad (13)$$

De esta forma, para la relación en lazo abierto, el error de modelado o cambio que pueda sufrir el proceso, se traslada en su totalidad a la relación entrada salida. Por otra parte, en una configuración en lazo cerrado, este cambio en el proceso queda multiplicado por la función de sensibilidad  $S(s)$ . De ahí que el controlador  $C(s)$  pueda escogerse de manera que esta función, presente una magnitud pequeña dentro del rango de frecuencias en que pueda presentarse la incertidumbre. Este es reconocido como uno de los factores clave para el uso de la realimentación.

La función de sensibilidad tal como se ha presentado, es una función dependiente de la frecuencia y que, por tanto, no se puede utilizar de manera directa, como figura de mérito que nos proporcione una medida de robustez. No obstante, si vemos que  $S(s)$  depende tan solo de la cadena directa del lazo de control,  $L(s) = P(s)C(s)$ , es posible una visualización geométrica de la misma en el plano de Nyquist. Efectivamente, puesto que  $S(s) = [1 + L(s)]^{-1}$ , se puede representar el valor complejo  $1 + L(j\omega)$  como el vector que va desde el punto  $(-1, 0)$  hasta  $L(j\omega)$ . La función de sensibilidad será por lo tanto, menor que uno para aquellas frecuencias en las que la curva de Nyquist quede por fuera de una circunferencia con centro  $(-1, 0)$  y radio unitario. En base a esta interpretación se define el valor  $M_S$  como:

$$M_S \doteq \max_{\omega} |S(j\omega)| = \max_{\omega} \left| \frac{1}{1 + C(j\omega)P(j\omega)} \right|, \quad (14)$$

$$= \frac{1}{\min_{\omega} |1 + L(j\omega)|}, \quad (15)$$

siendo entonces la menor distancia desde la curva de Nyquist al punto crítico  $(-1, 0)$  igual a  $1/M_S$ . De esta forma, garantizando un determinado valor para  $M_S$ , se asegura que el lugar de Nyquist queda apartado del punto crítico una distancia igual a  $1/M_S$ . Interesarán por lo tanto, valores pequeños de  $M_S$  para obtener una robustez más elevada. De esta forma, se establece  $M_S$  como una medida de robustez más generalizada que los anteriormente presentados márgenes de ganancia y de fase, siendo esta interpretación más amplia la que ha propiciado que haya quedado establecida como una medida de robustez estándar, dentro de los diseños que se proponen hoy en día. De hecho, es posible mostrar que un determinado valor de  $M_S$  nos garantiza, en forma simultánea, las siguientes cotas para los márgenes de ganancia y de fase:

$$A_m \geq \frac{M_S}{M_S - 1}, \quad \phi_m \geq 2 \sin^{-1} \left( \frac{1}{M_S} \right). \quad (16)$$

Otra implicación de garantizar que la curva de Nyquist permanezca fuera de un círculo con centro en el punto crítico y de radio  $1/M_S$ , es que se garantiza la estabilidad a pesar de que la ganancia de sistema se incremente en un factor  $M_S/(M_S - 1)$  o se reduzca en un factor  $M_S/(M_S + 1)$ . Adicionalmente, se puede garantizar la estabilidad a pesar de insertar una nolinealidad estática,  $f(x)$ , en el lazo, siempre que se verifique que:

$$\frac{M_S}{M_S + 1} < \frac{f(x)}{x} < \frac{M_S}{M_S - 1}. \quad (17)$$

Valores típicos de  $M_S$  oscilan en el intervalo de 1,4 a 2, implicando para el caso  $M_S = 2$ , un  $A_m \geq 2$  y un  $\phi_m \geq 29^\circ$ . Para el caso  $M_S = 1,4$  se garantiza un  $A_m \geq 3,5$  y un  $\phi_m \geq 41^\circ$ . La ventaja que presenta el uso de  $M_S$ , es que determina el  $A_m$  y el  $\phi_m$  de manera simultánea, mientras que estas dos cantidades son completamente independientes. A su vez, el  $M_S$  también aparece como referencia en las comparativas que se puedan realizar de la robustez conseguida por determinados enfoques, a pesar de que ésta no se contemplara explícitamente en la fase de diseño.

### 2.3. Una medida de robustez generalizada

Desde la perspectiva de la teoría de control robusto, la estabilidad del sistema de control en lazo cerrado se mantiene ante variaciones,  $\Delta P(s)$ , en el modelo nominal utilizado,  $P_o(s)$ , siempre que se verifique la condición:

$$|C(j\omega)\Delta P_o(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|, \quad (18)$$

expresión que puede reescribirse como

$$\left| \frac{\Delta P(j\omega)}{P_o(j\omega)} \right| < \frac{1}{T(j\omega)}. \quad (19)$$

De esta forma, se pueden permitir variaciones relativas en el modelo del proceso siempre y cuando, en las frecuencias correspondientes, la función de sensibilidad complementaria tome valores pequeños. Esto conduce a considerar el valor máximo de  $T(s)$  como una estimación de esta tolerancia:

$$M_T = \max_{\omega} |T(j\omega)| = \max_{\omega} \left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right|. \quad (20)$$

De esta manera, se puede formular un margen de robustez generalizado como en Kristiansson (2003) y Kristiansson and Lennartson (2006),  $GM_S$ , definido por:

$$GM_S = \max\{\|S\|_\infty, \alpha\|T\|_\infty\}, \quad (21)$$

donde el parámetro  $\alpha$  se define como  $\alpha = M_S^d/M_T^d$  en base a los valores deseados para los máximos de las funciones de sensibilidad. Geométricamente, especificar un valor para  $M_T$  impone también un área prohibida para la curva de Nyquist, dada por un círculo con centro en  $(-M_T^2/(M_T^2 - 1), 0)$  y de radio  $M_T/(M_T^2 - 1)$ . De esta forma, mediante la especificación para  $M_S$  y la especificación para  $M_T$ , se está imponiendo que el lugar de Nyquist se mantenga fuera de los correspondientes círculos. La propuesta de tener esta zona a evitar determinada por diferentes círculos, es presentada en detalle en Åström and Hägglund (2006).

### 3. Diseño por márgenes de ganancia y fase

El diseño con base en la especificación de unos determinados  $A_m$  y  $\phi_m$ , se puede considerar como el primer planteamiento en el que se *especifica* de manera explícita, la robustez en base a indicadores de robustez. La primera propuesta de diseño con base en  $A_m$  y  $\phi_m$  se presenta en Åström and Hägglund (1984) para un  $A_m$  de 3 y un  $\phi_m$  de  $60^\circ$ . Así, las ecuaciones de diseño para un controlador PI y un sistema de primer orden con retardo que resultan son:

$$\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(\omega_p T_i) - \tan^{-1}(\omega_p \tau) - \omega_p L = 0, \quad (22)$$

$$A_m K_p K = \omega_p T_I \sqrt{\frac{\omega_p^2 \tau^2 + 1}{\omega_p^2 T_I^2 + 1}}, \quad (23)$$

$$K_p K = \omega_g T_I \sqrt{\frac{\omega_g^2 \tau^2 + 1}{\omega_g^2 T_I^2 + 1}}, \quad (24)$$

$$\phi_m = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(\omega_g T_i) - \tan^{-1}(\omega_g \tau) - \omega_g L. \quad (25)$$

El problema que presenta el diseño en base a  $A_m$  y  $\phi_m$ , es que las expresiones resultantes para el cálculo de los mismos son altamente no lineales. Para su solución se deben obtener, también, las mencionadas frecuencias de cruce, apareciendo en las ecuaciones de las mismas la función  $\tan^{-1}$  que imposibilita su cálculo analítico. Debido a esta problemática básica, han aparecido diferentes enfoques con base en aproximaciones, los cuales proporcionan relaciones que posibilitan tanto, el cálculo de los  $A_m$  y  $\phi_m$  asociados a una regla en particular, así como el diseño para conseguir unos  $A_m$  y  $\phi_m$  determinados.

En Ho et al. (1996) por ejemplo, se proporcionan ecuaciones para la evaluación de los  $A_m$  y  $\phi_m$  de un lazo de control, en base a un controlador PID y un sistema de primer orden con retardo. Estas ecuaciones se aplican luego para evaluar los  $A_m$  y  $\phi_m$ , que proporcionan reglas de sintonía conocidas, como las clásicas de Ziegler-Nichols y Cohen-Coon, así como las derivadas de reglas óptimas (ISE, IAE, ITAE). Siendo los valores recomendados de entre 2 y 5 para el  $A_m$  y entre  $30^\circ$  y  $60^\circ$  para el

$\phi_m$ . Ho et al. (1995b), Ho et al. (1995a) y Ho et al. (1996), mostraron que hay formulaciones que pueden proporcionar valores que están fuera de estos rangos. De esta forma, posteriormente, en Ho et al. (1999) se propone una sintonía que obedece a una especificación de  $A_m$  y  $\phi_m$ , intentando obtener el mejor rendimiento en el sentido ISE. Así, para un  $A_m$  determinado, hay un  $\phi_m$  que proporciona un ISE mínimo. Una especificación de  $\phi_m$  mayor conlleva una degradación del rendimiento, existiendo por lo tanto un compromiso entre ambos. En cambio, para valores menores de  $\phi_m$ , este compromiso no existe, pudiéndose especificar una mayor robustez sin perder rendimiento.

Un problema que presentan los  $A_m$  y  $\phi_m$ , es que ambas medidas son independientes y que debe, por tanto, garantizarse el cumplimiento de ambas. Es por este motivo que en los últimos años, la especificación de robustez se ha orientado más hacia el uso de la función de sensibilidad, que al uso de estas dos medidas.

### 4. Diseño robusto con base en la sensibilidad máxima $M_S$

El uso de los márgenes de ganancia y fase como indicadores de robustez, ha quedado sustituido por el uso de un único indicador, el máximo de la función de sensibilidad, denotado por  $M_S$ . Sin embargo previo a esto, Gerry and Hansen (1987) propusieron como indicadores de robustez, la *Razón de ganancias* GR y la *Razón de retardos* DR, junto con el *gráfico de robustez*, retomados estos después por Shinskey (1990). El gráfico de robustez establece un área de restricción en torno al punto de sintonización del controlador, en el plano paramétrico del modelo, fuera de la cual debe encontrarse la curva límite de la estabilidad paramétrica del lazo de control. Esta restricción garantiza que la razón de ganancias y la razón de retardos, sean superiores a dos.

La utilización de la función de sensibilidad en el diseño de controladores PID, surge ligada a la sugerencia de optimizar el rechazo de perturbaciones, mediante la imposición de restricciones en la función de sensibilidad. El uso del máximo de la función de sensibilidad,  $M_S$ , fue propuesto por Persson (1992). No obstante, no es hasta la presentación de las reglas de sintonización *Kappa-Tau* por Åström and Hägglund (1995), que se difunde el desarrollo de reglas y métodos de sintonización que en forma implícita o explícita, consideran la robustez en el diseño del lazo de control utilizando el  $M_S$ .

A continuación se describen brevemente algunas de estas técnicas:

- **Método *Kappa-Tau* (KT)** (Åström and Hägglund, 1995)

El método utiliza un diseño empírico con base en la localización de los polos dominantes de lazo cerrado, junto con una restricción en la robustez con el  $M_S$ , para obtener reglas de sintonización para controladores PI y PID Estándar de dos grados de libertad (2GdL). Emplea un conjunto particular de plantas de prueba, como representación de las diferentes dinámicas que se pueden encontrar en los procesos industriales, incluyendo procesos integrantes, caracterizadas por su ganancia  $K$ , su constante

de tiempo dominante  $T$ , y su retardo aparente  $L$ , obtenidos estos a partir de la curva de reacción del proceso; o por sus parámetros críticos, ganancia  $K_{pu}$  y periodo de oscilación  $T_u$ . Establece dos niveles de robustez, una mínima  $M_S = 2,0$  y una alta  $M_S = 1,4$ . El ámbito de aplicación del método es  $0,1 \leq L/(L + T) \leq 0,85$ .

■ **Método AMIGO** (Hägglund and Åström, 2002, 2004; Åström and Hägglund, 2004)

Toma como base el método *MIGO* (“M-constrained Integral Gain Optimization”) de Åström et al. (1998), que optimiza la ganancia integral del controlador,  $K_i$ , e impone una restricción en la sensibilidad máxima,  $M_S = 1,4$ , aplicado a un conjunto amplio de plantas de prueba, que incluye plantas de polo múltiple, procesos integrantes y con respuesta inversa. A partir de los parámetros óptimos, determina las ecuaciones para una sintonía robusta de controladores PI y PID Estándar de 2GdL. Una revisión del método AMIGO (“Approximated MIGO”) se presenta en Åström and Hägglund (2006). Aunque el ámbito de estudio del método es  $0 \leq L/(L + T) \leq 0,98$ , para los controladores PID Estándar, solo se pueden obtener parámetros fiables para  $L/(L + T) > 0,5$ .

■ **Método KLk150** (Kristiansson, 2003)

Resolviendo un problema de optimización con restricciones de criterio múltiple, en el que se incluye el desempeño ante perturbaciones  $J_d$ , la robustez con la sensitividad máxima generalizada  $GM_S$ , el esfuerzo de control  $J_u$ , y la sensitividad al ruido de medición de alta frecuencia, se determinan reglas de sintonización para controladores PI y PID Estándar de 1GdL, en función de la ganancia estática de la planta y de su ganancia a la frecuencia a la cual su fase es  $-150^\circ$ . Con este diseño se obtiene una robustez generalizada  $GM_S \approx 1,7$  y un desempeño cercano al óptimo IAE. El método tiene la peculiaridad que considera la constante del filtro derivativo, como un parámetro ajustable más del controlador (Kristiansson and Lennartson, 2006).

■ **Optimización de objetivo múltiple (MOO)** (Tavakoli et al., 2007)

En un primer desarrollo (Tavakoli et al., 2005) se considera el desempeño óptimo IAE ante cambios en la consigna y la perturbación, junto con la restricción de robustez mínima  $M_S \leq 2,0$ , para controladores PI de 2GdL a partir de modelos de primer orden con retardo y modelos integrantes con retardo. Posteriormente para el método *MOO*, junto a lo anterior, se penaliza además la variación total del esfuerzo de control  $TV_u$  y se utiliza un algoritmo genético de objetivo múltiple para la optimización. Los controladores obtenidos con esta sintonización, producen sistemas de control con una robustez nominal  $M_S \approx 1,7$  para modelos de primer orden con retardo con  $0,1 \leq \tau_o \leq 2,0$ .

Las ecuaciones del MOO para los modelos de primer orden con retardo son:

$$\begin{aligned} K_p K &= \frac{1}{6} + \frac{5}{11\tau_o}, \\ \frac{T_i}{T} &= \frac{\frac{3}{14}\tau_o + \frac{7}{6}}{\tau_o + \frac{1}{5}} \tau_o, \\ \beta &= \frac{4}{9}\tau_o + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Para los modelos integrantes con retardo, las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} K_p K &= \frac{5}{11\tau_o}, \\ \frac{T_i}{T} &= \frac{35}{6}\tau_o, \\ \beta &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (27)$$

■ **Método  $PI_{2Ms}$**  (Alfaro et al., 2010)

Partiendo de los parámetros óptimos obtenidos mediante el procedimiento de sintonía robusta no oscilatoria (NORT) (Alfaro et al., 2009c), para procesos de primer orden con retardo y  $0,1 \leq \tau_o \leq 2,0$ , se obtienen reglas de sintonización de controladores PI de 2GdL para cuatro niveles de robustez,  $M_S \in \{1,4, 1,6, 1,8, 2,0\}$ . La característica no oscilatoria de la respuesta ante cambios escalón en la consigna y en la perturbación, impuesta en el diseño, garantiza además un comportamiento “suave” de la señal de control. La característica principal del método es el lograr los cuatro niveles la robustez de diseño, para todo el ámbito de aplicación del mismo. Las reglas de sintonía  $PI_{2Ms}$  para modelos de primer orden con retardo se obtienen ajustadas a una forma realmente simple:

$$\begin{aligned} \kappa_p &\doteq K_p K = a_0 + a_1 \tau_o^{a_2}, \\ \tau_i &\doteq \frac{T_i}{T} = b_0 + b_1 \tau_o^{b_2}, \\ \beta &= c_0 + c_1 \tau_o^{c_2}, \end{aligned} \quad (28)$$

donde el valor de las constantes  $\{a_i, b_i, c_i\}$  se muestran en la Tabla 1.

■ **Otros procedimientos**

Diseño robusto de controladores PI con base en la sensibilidad máxima  $M_S$ , y el margen de ganancia  $A_m$  (Crowe and Johnson, 2002). Optimización simultánea del desempeño ante cambios en el valor de consigna y la perturbación, con una restricción en la robustez ( $M_S \leq 2,0$ ), utilizando algoritmos genéticos para controladores PID Estándar de 2GdL (Shen, 2002).

## 5. Reglas de sintonía robustas

A pesar de la elevada cantidad de reglas de sintonía existentes (O'Dwyer, 2003), se puede decir que es mediante la formulación del IMC-PID (Rivera et al., 1986), que se elaboran

Tabla 1: Constantes para el método  $PI_{2Ms}$ 

$M_S$	$a_0$	$a_1$	$a_2$
1,4	0,0674	0,3775	-0,9623
1,6	0,1687	0,4724	-0,9805
1,8	0,2118	0,5633	-0,9823
2,0	0,3208	0,5613	-1,0380
$M_S$	$b_0$	$b_1$	$b_2$
1,4	1,440	-0,1744	-0,659
1,6	8,672	-7,247	-0,04929
1,8	-3,952	5,426	0,08661
2,0	-2,105	3,595	0,1476
$M_S$	$c_0$	$c_1$	$c_2$
1,4	0,3803	0,7794	0,6851
1,6	0,2611	0,5763	0,4345
1,8	0,2296	0,4711	0,3588
2,0	0,2107	0,4043	0,3122

unas reglas de sintonía parametrizadas de tal manera, que se posibilita la obtención de los parámetros del PID atendiendo al grado de robustez deseado (obviamente con el correspondiente compromiso respecto al desempeño). La obtención de reglas de sintonía dentro del marco IMC, introduce dos ideas que han sido ampliamente explotadas en los últimos años y que han dado lugar a multitud de formulaciones y reglas de sintonía: por un lado, el diseño analítico con base en un modelo del proceso; y por el otro, la incorporación de consideraciones de robustez ante discrepancias entre este modelo y el proceso real. Estas serían dos de las características que han hecho popular el enfoque IMC y que, por supuesto, se ha heredado para el caso de los controladores PI/PID.

Como factor distintivo de las reglas de sintonía que se han visto en las secciones anteriores, ubicamos aquí aquellas reglas que se plantean proporcionar un determinado grado de robustez, pero sin obedecer a ningún índice o indicador concreto. En otras palabras, hablaremos de incertidumbre no estructurada o robustez en el sentido amplio. Estos enfoques intentan, por otro lado, plantear la sintonía del controlador en términos de uno o dos parámetros, de manera que su elección constituye fijar el compromiso entre la robustez y el rendimiento del sistema de control.

De esta forma, dentro de los métodos analíticos es el IMC el que ha ganado más aceptación. En la formulación inicial de su aplicación al diseño de controladores PI/PID, en el trabajo de Rivera et al. (1986), se propone un conjunto de reglas para los diferentes tipos de modelos del proceso, en las que los tres parámetros del controlador resultante (PI/PID dependiendo de la estructura del modelo), quedan parametrizados en términos de las constantes del proceso y un parámetro de sintonía vinculado a la robustez de manera directa (a mayor valor, mejor es la robustez), pero inversamente al rendimiento. Así, para el caso de un modelo de primer orden con retardo ( $K, L, T$ ), la sintonía

que resulta toma la forma:

$$K_p = \frac{2T + L}{K(2\lambda + L)}, \quad T_i = T + L/2, \quad T_d = \frac{TL}{2T + L}. \quad (29)$$

Como se aprecia, las ecuaciones son de una complejidad baja y ofrecen una manera sistemática y simple de tratar la robustez; mediante el parámetro  $\lambda$ ; aunque, como hemos dicho, sin ningún indicador relacionado con el parámetro. Este enfoque ha dado lugar a multitud de estrategias. Para un tratamiento bastante completo del diseño con base en el IMC y el correspondiente análisis de los efectos que tiene en la robustez y el rendimiento, se dispone del trabajo de Leva and Colombo (2004). Cabe decir que las estrategias con base en el diseño mediante IMC se caracterizan, básicamente, por la especificación de la relación entrada salida deseada. Siendo por lo tanto diseños orientados al seguimiento, más que a la regulación. En este sentido, es de destacar el trabajo de Chen and Seborg (2002), en el que se formula un diseño completamente analítico, en la línea propuesta por el IMC, pero especificando la relación deseada para el control regulatorio. Como resultado se genera un conjunto de reglas de sintonía, en función del modelo del proceso y la velocidad de respuesta para el rechazo de perturbaciones. En contraste con la regla IMC clásica de Rivera et al. (1986), en este caso las relaciones de diseño aparecen bastante más complejas, pero parametrizadas al igual que en el caso anterior, en término de las constantes del proceso y el parámetro de sintonía  $\lambda$ :

$$K_p = \frac{1}{K} \frac{2TL + L^2/2)(2\lambda + L/2) - \lambda^3 - 3\lambda^2L}{2\lambda^3 + 3\lambda^2L + (L/2)(3\lambda + L/2)},$$

$$K_i = \frac{2TL + L^2/2)(2\lambda + L/2) - \lambda^3 - 3\lambda^2L}{(2T + L)L}, \quad (30)$$

$$K_d = \frac{3\lambda^2TL + (TL^2/2)(3\lambda + L/2) - 2(T + L)\lambda^3}{2TL + L^2/2)(2\lambda + L/2) - \lambda^3 - 3\lambda^2L}.$$

No obstante, es importante remarcar que en ambos casos, la indicación de robustez viene dada, siempre de manera indirecta, por el valor del parámetro de sintonía  $\lambda$ . Esta situación es la misma para todas las variantes de diseños IMC, que han ido apareciendo en la literatura.

En la misma línea de planteamiento del diseño, recientemente ha habido un creciente interés en la derivación de reglas simples y que ofrezcan un nivel de robustez aceptable. En este sentido es de especial mención la regla SIMC planteada en Skogestad (2003), con base en un método de aproximación de modelos de orden alto (“the half rule”) y un diseño orientado a mejorar el rendimiento en regulación. Generalmente, los métodos de sintonización desarrollados con base en las técnicas de control con modelo interno (IMC), utilizan cancelación de polos y ceros y por lo tanto producen respuestas muy lentas ante cambios en la perturbación, especialmente cuando se cancelan los polos lentos de la planta. Considerando esto, en este procedimiento se modifican las reglas de sintonía IMC clásicas de Rivera et al. (1986), para lograr respuestas rápidas ante cambios en la consigna y la perturbación. Para la sintonización de los controladores PI, se parte de un modelo de primer orden

con retardo y para los PID de uno de segundo orden con retardo. En el desarrollo de estas reglas se utilizó un controlador PID “ideal”, sin filtro derivativo. La sintonía SIMC para controladores PI y PID Serie resulta ser:

$$K_p K = \frac{1}{2\tau_o}, \quad \frac{T_i}{T} = \min\{1, 8\tau_o\}, \quad \frac{T_d}{T} = a. \quad (31)$$

Esta sintonía proporciona una robustez media  $M_S = 1,59$  con controladores PI y PID de 1GdL.

Con un objetivo similar pero partiendo de un planteamiento completamente diferente, en Vilanova (2008) se proporciona un diseño de un controlador PID para plantas de primer orden con retardo, en base a una especificación de coincidencia de modelos en el sentido  $H_\infty$  y parametrizando las reglas en términos de dos parámetros relacionados con la robustez;  $z$  y la velocidad de respuesta  $T_M$ ; (se debe notar que se proporciona también el valor de  $N$  para el filtro de la parte derivativa):

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{T_i}{K(\rho + T_M)}, \\ T_i &= T + \chi_1 - T_M \frac{(\rho + z)}{(\rho + T_M)}, \\ \frac{T_d}{N} &= T_M \frac{(\rho + z)}{(\rho + T_M)} N, \\ N + 1 &= \frac{T}{T_i} \frac{\rho + T_M}{L(\rho + z)}, \end{aligned} \quad (32)$$

con  $\chi_1 = z + L - \rho$  y  $\rho = L(L + z)/(L + T_M)$ . En el mismo trabajo se proponen valores concretos para  $z$  y  $T_M$ , generando una sintonía altamente simple:

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{T_i}{2,65KL}, \\ T_i &= T + 0,03L, \\ \frac{T_d}{N} &= 1,72L, \\ N + 1 &= \frac{T}{T_i}, \end{aligned} \quad (33)$$

de manera que se garantiza un valor de  $M_S \approx 1,4$ , lo que significa una robustez considerable, a la vez que se mantiene un rendimiento aceptable.

Con base en este planteamiento, se han originado formulaciones similares que lo extienden con el objetivo de introducir consideraciones acerca de la mejora en la respuesta en regulación, así como un compromiso entre el rendimiento en regulación y seguimiento, a la vez que se garantiza una robustez determinada. De esta forma, en Alcántara et al. (2010a) se proponen dos problemas de coincidencia de modelos: uno para la relación entrada salida, especificando como relación deseada  $T_d(s) = ((T_M - \gamma)s + 1)/(T_M s + 1)$  y otro para la función de sensitividad, como  $S_d(s) = \gamma s/(T_M s + 1)$ . Ambos problemas se solucionan de forma analítica y a continuación se analizan las repercusiones en la elección de los parámetros que especifican el problema. El valor de  $T_M$  se escoge de acuerdo a Vilanova (2008), mientras que el valor de  $\gamma$  es el que determina el compromiso entre los comportamientos de regulación y seguimiento. Por ejemplo, en la figura 3 se puede ver el rango sugerido

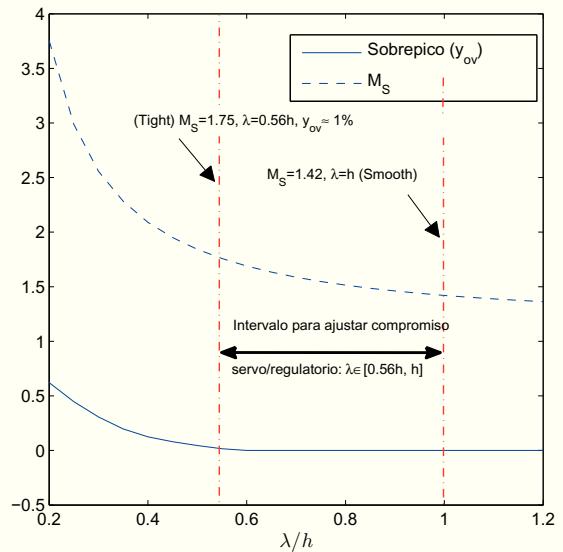


Figura 3: Determinación de la robustez y suavidad/agresividad del control en términos de  $\lambda/h$

para el valor del parámetro  $\lambda$  (que juega el papel de filtro en el diseño del controlador IMC asociado al PID).

De esta forma, por ejemplo, evaluando un compromiso entre la perdida de rendimiento y la ganancia de robustez, se propone una regla para un PID. Una variante de esta extensión puede también encontrarse en Alcántara et al. (2010b), mientras que en Alcántara et al. (2011) se presenta esta metodología dentro del marco de diseño  $H_\infty$  y extendido al caso de sistemas inestables.

Por otro lado, es de resaltar el enfoque *ART<sub>2</sub>* (“Analytical Robust Tuning”) presentado por Alfaro et al. (2009d) y que tiene como base, la formulación analítica del diseño para el control en regulación, a la vez que se vincula con una especificación de robustez en términos del valor conseguido de  $M_S$ . Este enfoque, por tanto, podría calificarse tanto de analítico como dirigido por  $M_S$ . Creemos que es importante enmarcarlo en esta sección, puesto que resulta de la evolución que han experimentado los enfoques analíticos, como resultado de añadirles consideraciones de robustez. En este trabajo se plantea el diseño de controladores PI en base a modelos de primer orden con retardo y de controladores PID en base a modelos de segundo orden con retardo. Así por ejemplo, para un controlador PI se obtiene el siguiente diseño:

$$\begin{aligned} \kappa_p &\doteq K_p K = \frac{2\tau_c - \tau_c^2 + \tau_o}{(\tau_c + \tau_o)^2}, \\ \tau_i &\doteq \frac{T_i}{T} = \frac{2\tau_c - \tau_c^2 + \tau_o}{1 + \tau_o}, \\ \beta &= \frac{\tau_c T}{T_i}, \end{aligned} \quad (34)$$

siendo  $\tau_o = L/T$  y  $\tau_c$  el parámetro adimensional de diseño (similar a la constante de tiempo  $\lambda$  del IMC), pero significando

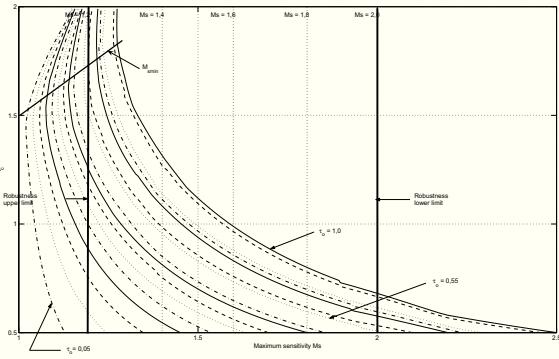


Figura 4: Relación entre la robustez,  $M_s$ , y el parámetro de diseño  $\tau_c$

la relación entre la constante de tiempo deseada para la respuesta de lazo cerrado y la constante de tiempo dominante del proceso controlado, para el cual se establece un límite inferior;  $\tau_{cmin} \leq \tau_c$ ; si se quiere garantizar un determinado nivel de robustez (en términos de  $M_s$ ). Así, el valor  $\tau_{cmin}$  se ofrece parametrizado en términos de la robustez deseada:

$$\begin{aligned} \tau_{cmin} &= k_{11} + \left( \frac{k_{21}}{k_{22}} \right) \tau_o, \\ k_{11} &= 1,384 - 1,063M_s + 0,262M_s^2, \\ k_{21} &= -1,915 + 1,415M_s - 0,077M_s^2, \\ k_{22} &= 4,382 - 7,396M_s + 3,0M_s^2, \end{aligned} \quad (35)$$

planteando por tanto, de una manera muy compacta, un compromiso entre robustez y rendimiento. El punto interesante de esta propuesta, es la de relacionar el efecto del parámetro de diseño ( $\tau_c$  en este caso) con la medida de robustez  $M_s$ . De esta forma acaba siendo el mismo valor de  $M_s$  el que se convierte en un parámetro de diseño. En la figura 4 se puede ver esta relación para el caso del mencionado controlador PI y un sistema de primer orden con retardo.

Como puede verse, si se aumenta demasiado el valor de  $\tau_c$ , se consigue el efecto inverso empezando a perder robustez, de ahí que el rango de valores para  $\tau_c$  se limite también por arriba  $\tau_{cmin} \leq \tau_c \leq 1,5 + 0,3\tau_o$ . Tal como puede verse, en el fondo, este método obedece al mismo espíritu que el método de Síntesis Directa para regulación (DS-d) comentado anteriormente (Chen and Seborg, 2002). No obstante, para el caso del controlador PID las derivaciones no son exactamente las mismas y el hecho de que en Alfaro et al. (2009d) se presente la formulación para los controladores con dos grados de libertad (2GdL), el  $ART_2$  proporciona un diseño global bastante mejor.

A modo comparativo, se presenta la aplicación de ambos métodos para el sistema de prueba:

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(0,4s+1)(0,16s+1)(0,064s+1)}, \quad (36)$$

modelado mediante la aproximación de segundo orden siguiente

$$P_2(s) = \frac{e^{-0,147s}}{(0,856s+1)(0,603s+1)}. \quad (37)$$

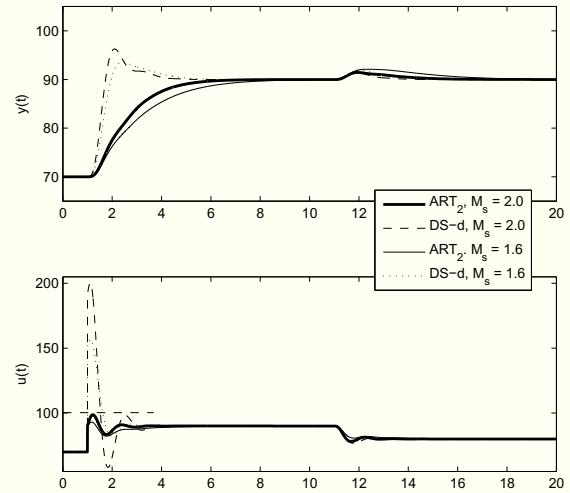


Figura 5: Comparación entre los métodos  $ART_2$  y DS-d

En base a este modelo se aplican las relaciones de diseño de Alfaro et al. (2009d) y de Chen and Seborg (2002). Los resultados se muestran en la figura 5 para dos niveles de robustez distintos. Sin entrar en comparaciones mediante indicadores numéricos (para ello se puede consultar Alfaro et al. (2009d)), se puede constatar la mejora introducida por el  $ART_2$ .

El hecho de establecer un vínculo entre el parámetro de diseño y un indicador de robustez, abre las puertas a toda una serie de posibilidades en las que conducir extensiones de los métodos de diseño analíticos. De esta forma se podrá integrar de una manera mucho más explícita, el compromiso entre rendimiento y robustez.

## 6. Diseño de PID robustos: Enfoques alternativos

Los enfoques vistos hasta el momento se caracterizan por la elaboración, como resultado del planteamiento de diseño, de unas reglas de sintonía dirigidas a proporcionar las garantías de robustez planteadas (aunque esto no sea siempre cierto tal como se comenta en Vilanova et al. (2010)). Tal y como ya se ha comentado, este tipo de enfoques orientados a generar reglas de sintonía son de especial apreciación dentro del ámbito de los controladores tipo PI/PID. No obstante, la teoría de control robusto ofrece multitud de alternativas para hacer frente al problema de la robustez, posibilitando formulaciones de la incertidumbre más extensas.

Muchos de los enfoques con base en la aplicación de tratamientos procedentes del control robusto y orientados a la obtención de controladores de estructura restringida (en especial un PID), tienen como base técnicas de optimización. Los recientes progresos en técnicas numéricas de optimización, han conllevaron el desarrollo de planteamientos realmente eficientes, con base en objetivos y restricciones convexas.

En trabajos iniciales Malan et al. (1994) y Grigoriadis and Skelton (1996), plantean una optimización  $H_\infty$  de controladores de orden y estructura prefijada, en base a algoritmos de optimización no lineales y no convexos. Esto implica una carga computacional muy alta, junto con el hecho que es usualmente difícil de ajustar las funciones de peso que definen el problema. Si bien es cierto que el uso de estos filtros y funciones de peso, es habitual dentro del contexto de la teoría de control robusto, usuarios de controladores tipo PID prefieren especificaciones más clásicas, en términos de indicadores como los presentados en las secciones anteriores. De ahí que planteamientos como los iniciados por Schei (1994), en el que se introducen restricciones en las funciones de sensitividad y sensitividad complementaria, hayan cuajado y hayan quedado establecidos hoy en día como medidas de robustez, alrededor de las cuales se han formulado diferentes enfoques y planteamientos. En concreto, esto es retomado por Panagopoulos et al. (2002) formulando un problema de optimización no convexo, en el que se optimiza el rechazo de perturbaciones juntamente con una restricción en la función de sensitividad. Este enfoque es revisado en mayor profundidad dentro de la presentación de las reglas MIGO/AMIGO, a las que dio lugar un posterior proceso de aproximación de los parámetros del controlador, para la solución del problema, para un conjunto de plantas de prueba (el denominado “test-batch”).

Son de especial interés, no obstante, los planteamientos que conducen a problemas convexos, dado que esto permite la aplicación de herramientas de optimización potentes y eficientes. Dentro de estos planteamientos destacamos los dos siguientes: métodos con base en formulaciones LMI y que soportan una formulación multimodelo de la incertidumbre y, por otra parte, métodos con base en “loop-shaping” y que obedecen, a descripciones no estructuradas de la incertidumbre (algunas de ellas soportando, también, formulaciones multimodelo) (Grassi et al., 2001; Blanchini et al., 2004).

De esta forma, Ge et al. (2002) plantean el diseño en base a la solución de un problema de control óptimo cuadrático (LQR), mediante el uso de desigualdades matriciales lineales (LMI). Bajo esta formulación, el proceso a controlar se describe mediante una formulación en espacio de estados ( $A, B, C$ ). La formulación acepta el uso de múltiples modelos, mediante una formulación incierta para las matrices del sistema  $[A, B]$ , que se suponen inciertas, pero pertenecientes a un polítopo definido por el cubrimiento convexo:

$$\Omega = Cov\{[A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots, [A_{N_m}, B_{N_m}]\}, \quad (38)$$

donde  $N_m$  es el número de múltiples modelos. En este trabajo se supone un PID de la forma:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s, \quad (39)$$

y un proceso a controlar de segundo orden de la forma

$$P(s) = \frac{b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}, \quad (40)$$

asumiendo sus parámetros una forma intervalar. De esta forma, si escribimos el sistema a controlar y el controlador en una des-

cripción de espacio de estados como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + B_r r, \\ u &= -Kx + K_p r + K_d \dot{r}, \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (41)$$

siendo  $y$  la salida del sistema,  $x = [x_1, x_2, x_3]$  el estado, con

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{x}_1, \quad x_3 = - \int (r - y) dt, \quad (42)$$

y

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_p, K_d, K_i \end{bmatrix}. \quad (44)$$

De esta forma, al obtener las ecuaciones de lazo cerrado el controlador PID se convierte en la ganancia,  $K$ , de una realimentación de estados. Esto posibilita encontrar sus parámetros en base a la solución de un problema de optimización con restricciones LMI. Partiendo de un problema LQR estándar:

$$J(u) = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (45)$$

utilizando la formulación LMI, el problema se soluciona como un problema de optimización en  $\hat{P}$  y  $\hat{Y}$ :

$$\min_{\hat{P}, \hat{Y}} x^T(0) \hat{P}^{-1} x(0), \quad (46)$$

sujeto a

$$\begin{bmatrix} A\hat{P} + \hat{P}A^T + BY + Y^T B^T & \hat{P} & Y^T \\ \hat{P} & -Q^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad \hat{P} > 0, \quad (47)$$

de esta forma, dada la solución óptima  $(\hat{P}^*, Y^*)$  la ley de realimentación de estado óptima viene dada por:

$$K = -Y^* (\hat{P}^*)^{-1}. \quad (48)$$

Pudiéndose recuperar los parámetros del controlador PID a partir de este controlador óptimo.

Una ventaja de formular las restricciones en base a LMI, es que se pueden añadir otras especificaciones de diseño, siempre que estas sean expresables en este formato. De hecho, en el mismo trabajo Ge et al. (2002) muestran como incorporar consideraciones acerca de la energía de control, atenuación de perturbaciones, etc. De esta forma, por ejemplo, si se desea añadir una especificación de atenuación de perturbaciones en términos de la norma infinito, se considera primero el sistema en el que se añade la correspondiente entrada en perturbación  $w$ :

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_w w, \quad (49)$$

$$y = Cx, \quad (50)$$

$$[A, B] \in \Omega, \quad (50)$$

$$\Omega = Cov\{[A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots, [A_{N_m}, B_{N_m}]\}. \quad (51)$$

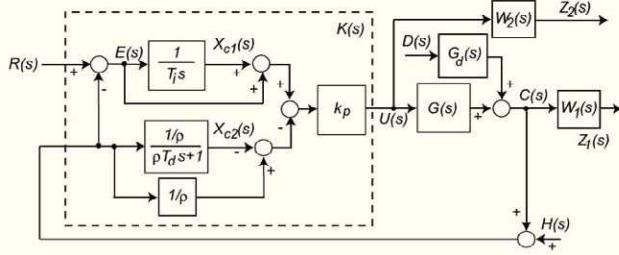


Figura 6: Diagrama de bloques para la optimización del controlador PID (Goncalves et al., 2008)

Una especificación del tipo  $\|T_{wy}\|_\infty < \sigma$  (donde  $T_{wy}$  denota la función de transferencia en lazo cerrado desde  $w$  a  $y$ ), se convierte en una restricción LMI del tipo:

$$\begin{bmatrix} A\hat{P} + \hat{P}A^T + BY + Y^T B^T & \hat{P}B_w & C^T \\ B_w^T \hat{P} & -\sigma I & 0 \\ C & 0 & -\sigma I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (52)$$

De esta manera se pueden añadir restricciones adicionales, que serán tenidas en cuenta al solucionar el problema de optimización. Como resultado, acabamos obteniendo un conjunto relativamente complejo de LMI, que actúan como restricciones. No obstante, si hay algo que hace atractivo este enfoque, es la aceptación que ha ganado esta formulación y la existencia de software muy eficiente para solucionarla. Este enfoque tiene la ventaja de permitir la incorporación de un amplio abanico de especificaciones, no obstante, tal como está formulado en Ge et al. (2002), es de aplicación tan solo a un tipo de sistemas muy concreto y la formulación ideal del PID. En el mencionado trabajo, los autores presentan la aplicación del método a un reactor agitado, cuyo modelo se linealiza en tres puntos de operación diferentes, mostrando la efectividad de considerar el enfoque multimodelo.

Este enfoque, en el que se utiliza la formulación con base en LMI, así como la descripción de la incertidumbre en base a múltiples modelos, es retomada en Goncalves et al. (2008), donde se elabora un poco más en esta idea. Concretamente se plantea un método iterativo de dos pasos. Un primer paso en el que se resuelve un problema de optimización multiobjetivo no convexo y un segundo, de análisis con base en la utilización de LMI, en el que la solución multiobjetivo se verifica para el dominio incierto. En caso de que alguna de las restricciones se viole, se añaden nuevos puntos para iniciar una nueva iteración de la fase de diseño. Dos de las principales ventajas de este enfoque respecto al presentado anteriormente, es que no se supone ninguna estructura determinada para el modelo del proceso. A su vez, para el controlador PID, se supone una formulación de dos grados de libertad<sup>1</sup> en el formato Estándar, aspecto que proporciona al método un mayor grado de aplicabilidad y cercanía, a las formulaciones industriales de estos controladores.

<sup>1</sup>aunque así dicho por los autores, no es en realidad un PID de dos grados de libertad.

Aquí el problema de optimización se formula de la siguiente forma:

$$C^*(s) = \arg \min_{K(s)} \max_{\alpha} (\lambda_1 \|T_{z_1d}(s, \alpha)\|_\infty, \lambda_2 \|T_{z_1v}(s, \alpha)\|_2), \quad (53)$$

sujeto a

$$\begin{cases} \alpha \in \Omega_i, \\ C(s) \in \Gamma, \\ \|T_{z_1d}(s, \alpha)\|_\infty \leq \epsilon_1, \\ \|T_{z_2v}(s, \alpha)\|_2 \leq \epsilon_2, \end{cases} \quad (54)$$

donde  $\Omega_i$  es el conjunto de plantas,  $\Gamma$  el espacio de búsqueda de los parámetros del controlador. Las funciones de transferencia  $T_{z_1d}(s, \alpha)$  y  $T_{z_2v}(s, \alpha)$ , representan las funciones de lazo cerrado implicadas en la robustez y el rendimiento, respectivamente. De esta forma se plantea un compromiso entre ambas métricas (compromiso robustez rendimiento), a la vez que se intenta garantizar un valor mínimo para las mismas. El conjunto  $\Omega_i$  contiene tan solo un conjunto finito de puntos del politopo  $\Omega$ . De esta forma, en una segunda fase, una vez encontrada la solución, se considera el conjunto  $\Omega$  para analizar si la función de coste toma su valor máximo fuera del conjunto  $\Omega_i$ , o si alguna de las restricciones no se cumple. En ese caso, se añaden estos puntos a  $\Omega_i$  y se soluciona de nuevo el problema de optimización. La iteración finaliza cuando las restricciones se verifican para todos los puntos de  $\Omega$  y no hay posibilidad de minimizar la función de coste mediante la adición de nuevos puntos en  $\Omega_i$ .

En este trabajo se considera también el mismo ejemplo que en Ge et al. (2002), mostrando que este enfoque proporciona mejores resultados. Vale la pena destacar que el sistema ejemplo del reactor encamisado, se trata también en el trabajo de Toscano (2005), en el que se formula también un problema de optimización de los parámetros del controlador, pero sin utilizar como base la formulación LMI. Este sistema se considera linealizado en tres puntos de operación diferentes, resultando en sendas funciones de transferencia.

Nuevas formulaciones expresan el controlador en forma parametrizada lineal. Así por ejemplo, en Hara et al. (2006) se presenta un enfoque con base en el lema KYP (Kalman-Yakubovic-Popov) generalizado, que ajusta el lugar de Nyquist del sistema controlado. La idea es definir diferentes regiones convexas en el plano complejo (especificaciones para frecuencias altas, medianas y bajas) y diseñar el controlador de manera que el lugar de Nyquist para cada rango de frecuencias, pase por la correspondiente región. A pesar de tener una formulación bastante potente y elegante, queda manifiesta su dificultad de aplicación, dentro de un marco como el asociado a los controladores PID en el que se prefieren especificaciones más clásicas.

Un planteamiento alternativo al anterior, lo encontramos en los trabajos Karimi et al. (2006, 2007), en los que se formula de una manera muy interesante el dar forma al lugar de Nyquist. La idea básica reside en definir un margen de estabilidad alternativo, que nos garantiza una cota inferior para los márgenes de ganancia y de fase, así como para el valor de  $M_S$ . La ventaja principal de este nuevo margen de estabilidad, es que resulta lineal respecto a los parámetros del controlador siempre que este obedezca a una parametrización lineal. De esta forma, el planteamiento de un rechazo de perturbaciones óptimo con restric-

ciones sobre este margen de estabilidad, da lugar a un problema de optimización con restricciones lineales que puede ser resuelto mediante la aplicación de técnicas de programación lineal. Otro punto interesante de este enfoque, es que puede plantearse para el caso multimodelo, básicamente incrementando el número de restricciones.

Consideramos, por tanto, en primer lugar el controlador expresado en forma paramétrica lineal como:

$$K(s) = \rho^T \phi(s), \quad (55)$$

donde  $\rho^T = [\rho_1, \dots, \rho_n]$  son los parámetros del controlador y  $\phi^T(s) = [\phi_1(s), \dots, \phi_n(s)]$  un conjunto de funciones sin polos en el semiplano derecho. En el caso de un controlador PID, tenemos:

$$\rho^T = [K_p, K_i, K_d], \quad \phi^T(s) = \left[ 1, \frac{1}{s}, \frac{s}{1 + T_f s} \right]. \quad (56)$$

De esta forma, cada punto del lugar de Nyquist,  $K(j\omega)P(j\omega)$ , puede expresarse de forma lineal en términos de los parámetros,  $\rho$ , del controlador:

$$K(j\omega_k)P(j\omega_k) = \rho^T \phi(j\omega_k)P(j\omega_k), \quad (57)$$

$$= \rho^T \mathcal{R}(\omega_k) + j \rho^T \mathcal{I}(\omega_k), \quad (58)$$

donde  $\mathcal{R}(\omega_k)$  y  $\mathcal{I}(\omega_k)$  son, respectivamente, las partes real e imaginaria de  $\phi(j\omega_k)P(j\omega_k)$ . Por otro lado, el rendimiento a optimizar se plantea como el rechazo a perturbaciones medido como la integral del error:

$$IE = \int_0^\infty e(t)dt, \quad (59)$$

valor que supone una buena aproximación al IAE para sistemas amortiguados. Este índice resulta igual a la inversa de la constante integral (hecho utilizado en Åström et al. (1998)) y, en el caso de un controlador parametrizado linealmente,  $K(s) = (\rho_0 + \rho_1 s + \dots + \rho_n s^n)/R(s)$ , donde  $R(s)$  tan solo contiene un integrador ( $R(s) = sR'(s)$ ), resulta igual a  $1/\rho_0$ . La aportación más importante de este trabajo es la introducción de lo que denominan el margen de robustez lineal,  $l \in (0, 1)$ . Este margen se define en base a una línea recta  $d_1$  que cruza el eje real negativo dentro del intervalo  $(0, -1)$ , con un ángulo  $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ]$ . El valor de  $l$  se define como la distancia entre el punto crítico y esta recta  $d_1$ . La figura 7; tomada de Karimi et al. (2007); muestra gráficamente esta idea.

Mediante esta distancia  $l$  se pueden obtener las siguientes cotas inferiores para los márgenes de ganancia y fase, y la inversa de  $M_S$

$$A_m \geq A_{ml} = \frac{1}{1 - l}, \quad (60)$$

$$\phi_m \geq \phi_{ml}, \quad (61)$$

$$= \sin^{-1} \left( (1 - l) \sin^2 \alpha + \cos \alpha \sqrt{1 - (1 - l)^2 \sin^2 \alpha} \right), \quad (62)$$

$$M_S^{-1} \geq M_l = l \sin(\alpha). \quad (63)$$

Dado un valor fijo del ángulo  $\alpha$ , los valores  $A_{ml}$ ,  $\phi_{ml}$  y  $M_l$  son todos funciones crecientes de  $l$ , por lo que se utiliza  $l$  como

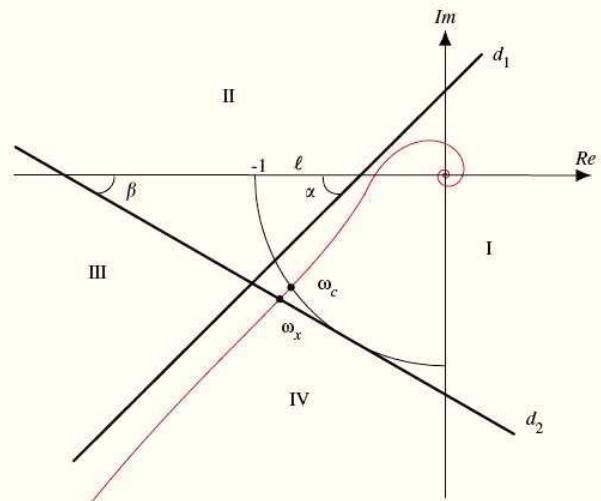


Figura 7: Definición del margen de robustez lineal y las correspondientes cotas para el margen de fase ( $\Phi_l$ ) e inversa de  $M_S$  ( $M_l$ ) (Karimi et al., 2007)

medida de robustez. Por otra parte, la elección de  $\alpha$  conlleva un compromiso entre el amortiguamiento del sistema y su ancho de banda. Valores típicos de  $l$  se sitúan entre 0,5 y 0,8, mientras que para el ángulo  $\alpha$  tenemos entre  $36,9^\circ$  y  $90^\circ$ .

Por otra parte, la introducción de otra línea  $d_2$  tangente al círculo unidad y que cruza el eje real negativo con un ángulo  $\beta$ , sirve para fijar una cota inferior  $\omega_x$  a la frecuencia de corte  $\omega_c$ . Cuanto mayor sea  $\omega_x$  mayor será el desempeño, consiguiendo un rechazo de perturbaciones más rápido.

De esta forma, el problema de optimización que resulta depende de si queremos optimizar la robustez o el rendimiento. Así por ejemplo, para una frecuencia de corte deseada, se pueden encontrar los mejores márgenes de robustez. Así pues, las variables de diseño son  $\omega_x$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ , siendo el objetivo el maximizar el valor del margen de robustez lineal  $l$ . El problema de optimización toma la forma siguiente:

$$\max l, \quad (64)$$

sujeto a

$$\rho^T (\cot \alpha \mathcal{I}(\omega_k) - \mathcal{R}(\omega_k)) + l \leq 1 \quad \text{para } \omega_k > \omega_x,$$

$$\rho^T (\cos \beta \mathcal{I}(\omega_k) + \mathcal{R}(\omega_k)) + l > -1 \quad \text{para } \omega_k > \omega_x,$$

$$\rho^T (\cos \beta \mathcal{I}(\omega_k) + \mathcal{R}(\omega_k)) + l \leq -1 \quad \text{para } \omega_k \leq \omega_x.$$

Otra posibilidad es, por ejemplo, optimizar el rendimiento en términos del índice IE introducido anteriormente, pero con unas determinadas restricciones de robustez (es decir, valores de  $\alpha$  y  $l$ ):

$$\max \rho_o, \quad (65)$$

sujeto a

$$\rho^T (\cot \alpha \mathcal{I}(\omega_k) - \mathcal{R}(\omega_k)) + l \leq 1 \quad \forall \omega_k. \quad (66)$$

A modo ilustrativo, se reproduce un ejemplo extraído de Karimi et al. (2007) en el que se aplica este método para el

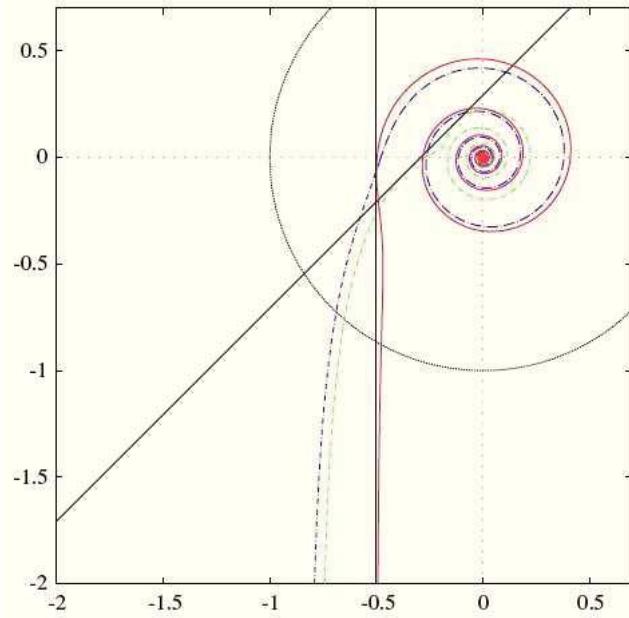


Figura 8: Curvas de Nyquist para el sistema de ejemplo  $P_1(s)$ . Método propuesto con  $l = 0,5$  y  $\alpha = 90^\circ$  (rojo), con  $l = 0,707$  y  $\alpha = 45^\circ$  (verde) y método en Panagopoulos (2002) (azul)

sistema

$$P_1(s) = \frac{1}{(s+1)^3} e^{-5s} \quad (67)$$

también utilizado en Panagopoulos et al. (2002). La respuesta en frecuencia de  $P_1(s)$  se evalúa en  $N = 8000$  puntos igualmente espaciados entre  $0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  y  $80 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . En la figura 8 se pueden ver los resultados de dos diseños en los que se ha utilizado, por un lado  $l = 0,5$  y  $\alpha = 90^\circ$  y por otro  $l = 0,707$  y  $\alpha = 45^\circ$

## 7. Apuntes finales y perspectivas futuras

En las secciones anteriores se ha presentado todo un conjunto de diferentes opciones y alternativas, que se han ido formulando a lo largo de los años, con el fin de afrontar el problema de la obtención de un PID robusto. El común denominador a todas ellas, a pesar de utilizar tanto métricas de robustez como descripciones de incertidumbre diferentes, es que se toman en consideración, básicamente, las características de robustez. No obstante, es cada vez más patente la necesidad de mantener unos niveles de rendimiento altos a pesar de tener que garantizar una determinada robustez. En otras palabras: *minimizar la pérdida de rendimiento debida a la introducción de consideraciones de robustez*. Asimismo, la robustez conseguida para el lazo de control puede resultar una característica frágil. Es decir, puede perderse ante pequeñas variaciones en los parámetros del controlador.

Por lo tanto, el diseño del sistema de control de lazo cerrado con controladores PID, debe considerar el compromiso de dos criterios en conflicto, por un lado el *desempeño* ante los cambios en la consigna y las perturbaciones y por el otro, la

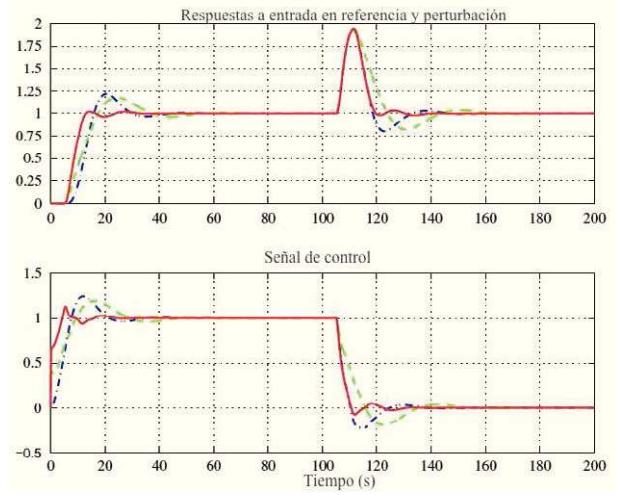


Figura 9: Respuestas temporales para el sistema de ejemplo  $P_1(s)$ . Método propuesto con  $l = 0,5$  y  $\alpha = 90^\circ$  (rojo), con  $l = 0,707$  y  $\alpha = 45^\circ$  (verde) y método en Panagopoulos (2002) (azul)

*robustez* ante cambios en las características del proceso controlado. Una vez obtenido un desempeño robusto del lazo de control, es importante estimar la *fragilidad* del controlador, esto es, la sensibilidad de la robustez del lazo de control a cambios en los parámetros del propio controlador, ya sean producto de inexactitudes en su implementación o por el *ajuste fino* final de los parámetros del controlador por parte del diseñador. Un controlador con un índice de fragilidad bajo, permitirá realizar la puesta a punto del controlador, sin tener que preocuparse por provocar una degradación importante en la robustez del mismo (Alfaro, 2007).

La posibilidad de que los controladores sean *frágiles* fue puesta en evidencia por Keel and Battacharyya (1997). Por su parte Alfaro (2007) asoció la fragilidad de los controladores PID a la pérdida de robustez del lazo.

Es en este sentido, que los autores creen que las estrategias de diseño deben plantearse de forma integral introduciendo consideraciones en estos tres ejes. Se debe establecer de manera cuantitativa la dependencia entre estas características y sus repercusiones en la sintonía final. A modo de ilustración, se presenta un ejemplo en el que se muestra el compromiso existente entre el desempeño y la robustez del lazo de control, y su efecto sobre la fragilidad del controlador. Considerese el proceso controlado de cuarto orden, cuya función de transferencia es:

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(0,4s+1)(0,16s+1)(0,064s+1)}. \quad (68)$$

Utilizando el método de identificación de tres puntos 123c (Alfaro, 2006), se obtuvo la siguiente aproximación de segundo orden con retardo para representarlo:

$$P_m(s) = \frac{e^{-0,147s}}{(0,856s+1)(0,603s+1)}. \quad (69)$$

Al plantear el diseño se tiene en cuenta como *desempeño* o

Tabla 2: PID 1GdL, regulador óptimo

$K_p$	$T_i$	$T_d$	$\beta$
10,728	0,492	0,273	1

Tabla 3: PID 1GdL, robustez y desempeño

$M_S^r$	$J_{ed}$	$TV_{ud}$	$J_{er}$	$TV_{ur}$
3,963	0,0067	0,4245	0,164	11,193

comportamiento dinámico requerido del lazo de control, el que este sea óptimo respecto a la funcional de coste que penaliza la integral del error absoluto, definida como:

$$J_e \doteq \int_0^\infty |e(t)| dt = \int_0^\infty |r(t) - y(t)| dt, \quad (70)$$

la cual debe evaluarse tanto para cambios en el valor de consigna,  $J_{er}$ , como en la perturbación de carga,  $J_{ed}$ . Estas proveerán una indicación del *desempeño de la salida* del sistema de control. Los parámetros del controlador para el desempeño óptimo  $\bar{\theta}_{co}$  serán tales que:

$$J_{eo} \doteq J_e(\bar{\theta}_{co}) = \min_{\bar{\theta}_c} J_e(\bar{\theta}_c, \bar{\theta}_p) \quad (71)$$

donde  $\bar{\theta}_c$  y  $\bar{\theta}_p$  son los parámetros del controlador y del modelo del proceso controlado, respectivamente.

Aunque el objetivo principal sea optimizar el desempeño, no debe dejarse de lado el análisis de las características dinámicas del esfuerzo de control, la señal de salida del controlador, ya que es conveniente, para evitar el deterioro prematuro del elemento final de control, que los cambios del mismo no sean bruscos ni extremos. La evaluación de las variaciones del esfuerzo de control, se puede realizar mediante un índice de su variación total, definido por:

$$TV_u \doteq \sum_{k=1}^{\infty} |u_{k+1} - u_k|, \quad (72)$$

el cual debe ser lo menor posible. Este es una indicación de la *suavidad de la señal de control*.

Primero se considera en el diseño solamente el desempeño del sistema de control, determinando los parámetros de un controlador PID de 1GdL que minimizan (70) ante un cambio en la perturbación (control regulatorio óptimo), indicados en la Tabla 2. La robustez y los índices de desempeño y del esfuerzo de control obtenidos con ese controlador se muestran en la Tabla 3. En esta y todas las demás evaluaciones se consideró  $\Delta r = 20\%$  y  $\Delta d = 10\%$ .

Como se observa en la Tabla 3, el sistema de control con el desempeño optimizado tiene una robustez muy pobre, no alcanza la especificación de robustez mínima usual que establece que  $M_S \leq 2,0$ . Por otra parte, se espera que en este caso el desempeño del control regulatorio, medido con la integral del error absoluto  $J_{ed}$ , sea el mejor posible.

Para incorporar la robustez en el diseño del controlador, se determinaron los parámetros de un PID de 2GdL utilizando el *método de sintonización analítica robusta ART<sub>2</sub>* (Alfaro et al.,

Tabla 4: PID 2GdL, parámetros ART<sub>2</sub>

$M_S^t$	$\tau_c$	$K_p$	$T_i$	$T_d$	$\beta$
2,0	1,00	5,243	1,633	0,407	0,191
1,8	1,20	4,028	1,846	0,471	0,248
1,6	1,51	2,756	2,100	0,573	0,363
1,4	1,99	1,576	2,299	0,750	0,635
1,2	2,80	0,556	1,852	1,248	1,293

Tabla 5: PID 2GdL, robustez y desempeño

$M_S^t$	$M_S^r$	$J_{ed}$	$TV_{ud}$	$J_{er}$	$TV_{ur}$
2,0	2,16	0,031	0,179	0,327	0,548
1,8	1,90	0,046	0,150	0,369	0,466
1,6	1,65	0,076	0,126	0,420	0,415
1,4	1,42	0,144	0,109	0,460	0,374
1,2	1,21	0,315	0,097	0,558	0,256

2009d), para cinco valores específicos de la robustez del lazo de control, los cuales se muestran en la Tabla 4.

La robustez y los índices del desempeño y del esfuerzo de control resultantes con el controlador de 2GdL robusto, se muestran en la Tabla 5. Debe hacerse notar, que la robustez obtenida  $M_S^r$ , en todos los casos fue determinada utilizando el modelo como planta, ya que en la práctica esta no se puede determinar con el proceso real, mientras que los índices de desempeño se determinaron con el proceso a partir de las correspondientes señales.

En la figura 10 se muestra la respuesta del sistema de control con el controlador de 2GdL, a los cambios  $\Delta r = 20\%$  y  $\Delta d = 10\%$ , para tres niveles de robustez diferentes.

Si se comparan los índices del regulador óptimo en la Tabla 3, con los correspondientes a  $M_S = 2,0$  en la Tabla 5, se nota que este nivel mínimo de robustez, se logra a expensas de una pérdida importante en el desempeño.

Además, de los índices de la Tabla 5 es evidente el compromiso entre el desempeño y la robustez. Al exigirse un mayor grado de robustez ( $M_S^t$ ), se deteriora el desempeño tanto del control regulatorio ( $J_{ed}$ ), como del servo control ( $J_{er}$ ), mientras que la variación del esfuerzo de control se torna más “suave”, disminuyen  $TV_{ud}$  y  $TV_{ur}$ .

En el caso correspondiente a  $M_S^t = 1,2$  el factor de peso de valor deseado determinado con el método  $ART_2$  es  $\beta = 1,293$ . Si en vez de este se utiliza  $\beta = 1$ , el índice de desempeño del servo control sería  $J_{er} = 0,666$ , aproximadamente un 20% mayor, lo que muestra claramente la ventaja de no restringir el factor de peso de valor deseado a valores  $\beta \leq 1$ , tal como sucede con los controladores comerciales actuales (Alfaro et al., 2009a).

En relación con la fragilidad de los controladores, en la Tabla 6 se muestran los índices de fragilidad paramétrica ( $FI_{\delta 20p}$ ) de los tres parámetros y el índice de fragilidad delta 20 ( $FI_{\Delta 20}$ ) del controlador. Con base en las definiciones dadas en Alfaro (2007), el controlador diseñado con el nivel mínimo de robustez ( $M_S = 2,0$ ) es frágil, mientras que los de robustez intermedia ( $1,4 \leq M_S \leq 1,8$ ) son no frágiles y el de robustez alta ( $M_S = 1,2$ ) es elástico.

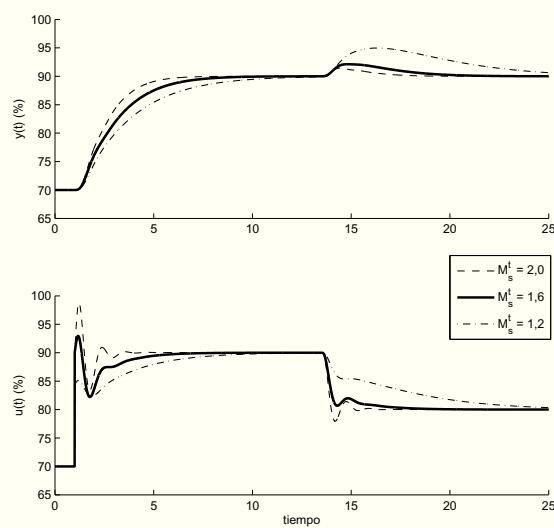


Figura 10: Ejemplo - Respuestas del sistema de control

Tabla 6: PID 2GdL, Fragilidad				
$M_s^t$	$IF_{\delta 20K_p}$	$IF_{\delta 20T_i}$	$IF_{\delta 20T_d}$	$IF_{\Delta 20}$
2,0	0,250	0,0019	0,210	0,681
1,8	0,190	0,0011	0,166	0,486
1,6	0,133	0,0007	0,121	0,323
1,4	0,084	0,0004	0,078	0,194
1,2	0,042	0,0003	0,037	0,089

Además, considerando la definición dada en Alfaro et al. (2009b), los controladores diseñados con el método  $ART_2$  son controladores con una *fragilidad desbalanceada*. La sensibilidad de la robustez a los cambios en  $K_p$  y  $T_d$  es similar, mientras que esta muestra ser prácticamente insensible a los cambios en  $T_i$ .

## 8. Conclusiones

La elevada cantidad de publicaciones que en los últimos años han ido apareciendo alrededor del diseño de controladores PID muestra, una vez más, el continuo interés en el tema. No obstante, es un común denominador de los nuevos enfoques su orientación hacia la inclusión de las consideraciones de robustez. Podemos por tanto decir que, de alguna manera, los diseños avanzados de PID que se nos auguran, serán diseños con unas características de robustez garantizadas.

En este sentido, son especialmente atractivos los enfoques que plantean un diseño dirigido por robustez utilizando alguna medida o métrica que nos ofrezca una cuantificación del grado de robustez del diseño. A su vez, esto posibilita analizar el compromiso existente entre la robustez y otras propiedades del lazo de control, como las apuntadas de desempeño y fragilidad. Obtener un diseño meramente robusto no es el objetivo. Al contrario, se debe tener una idea precisa del precio que se pa-

ga por exigir determinados niveles de robustez. En este sentido, tal como se ha apuntado en la sección anterior, deben encontrarse maneras que permitan analizar de una manera clara los compromisos existentes.

Son también de especial interés las formulaciones de medidas alternativas de robustez. Índices nuevos, más generales que los existentes hasta el momento y que permiten, por tanto, diseños más amplios y generales utilizando un único parámetro para conducir el diseño.

## English Summary

### Robust PID Control: An Overview

#### Abstract

This paper presents a general overview of the existing approaches used to obtain a robust proportional integral derivative (PID) controller. The rigid and particular structure imposed by the PID controller, have been the main reason for its vast use in industrial applications but at the same time impose several constraints to include robustness considerations into its design. Nowadays, the spectrum of possibilities for the robust design of a PID controller is very wide and may be faced with practically any approach, specifically with any robust control approach. At this respect, it is important to distinguish between tuning methods and tuning rules been of interest, in the PID controller case, the development of simple tuning rules that at the same time guarantee its robustness. Previously to this classification, it is important to state how the robustness is measured and represented. Accordingly, how the design specifications are finally formulated. The paper also reviews other newer issues proposed in the PID literature and related with the control system robustness, as are its achievement and the controller's fragility.

#### Keywords:

PID Control, Robustness, Uncertainty

#### Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo financiero recibido a través de los Proyectos CICYT DPI2007-63356 y DPI2010-15230 que han contribuido a llevar a cabo las investigaciones conducidas. Además, el apoyo de la Universidad de Costa Rica es muy apreciado.

#### Referencias

- Alcántara, S., Pedret, C., Vilanova, R., 2010a. On the model matching approach to PID design: Analytical perspective for robust servo/regulator tradeoff tuning. *Journal of Process Control* 20, 596–608.
- Alcántara, S., Pedret, C., Vilanova, R., Zhang, W., 2010b. Simple analytical min-max model matching approach to robust proportional-integrative-derivative tuning with smooth set-point response. *Ind. Eng. Chem. Res* 49, 690–700.
- Alcántara, S., Zhang, W., Pedret, C., Vilanova, R., Skogestad, S., 2011. IMC-like analytical hinf design with s/sp mixed sensitivity consideration: Utility in PID tuning guidance. *Journal of Process Control* (accepted for publication).

- Alfaro, V. M., 2006. Identificación de modelos de orden reducido a partir de la curva de reacción del proceso. *Ciencia y Tecnología* (Costa Rica) 24 (2), 197–216.
- Alfaro, V. M., 2007. PID controllers' fragility. *ISA Transactions* 46, 555–559.
- Alfaro, V. M., Vilanova, R., Arrieta, O., 2009a. Considerations on Set-Point Weight choice for 2-DoF PID Controllers. In: IFAC International Symposium on Advanced Control on Chemical Process (ADCHEM 2009). 12-15 July, Istanbul, Turkey.
- Alfaro, V. M., Vilanova, R., Arrieta, O., 2009b. Fragility Analysis of PID Controllers. In: 18th International Conference on Control Applications part of the 2009 IEEE Multi-Conference on Systems and Control (CCA2009). July 8-9, Saint Petersburg, Russia.
- Alfaro, V. M., Vilanova, R., Arrieta, O., 2009c. NORT: a Non-Oscillatory Robust Tuning Approach for 2-DoF PI Controllers. In: 18th International Conference on Control Applications part of the 2009 IEEE Multi-Conference on Systems and Control (CCA2009). July 8-9, Saint Petersburg, Russia.
- Alfaro, V. M., Vilanova, R., Arrieta, O., 2009d. A Single-Parameter Robust Tuning Approach for Two-Degree-of-Freedom PID Controllers. In: European Control Conference (ECC2009). August 23–26, Budapest, Hungary.
- Alfaro, V. M., Vilanova, R., Arrieta, O., 2010. Maximum Sensitivity Based Robust Tuning for Two-Degree-of-Freedom Proportional-Integral Controllers. *Ind. Eng. Chem. Res.* 49, 5415–5423.
- Åström, K., Hägglund, T., 2004. Revisiting the Ziegler-Nichols step response method for PID control. *Journal of Process Control* 14, 635–650.
- Åström, K. J., Hägglund, T., 1984. Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins. *Automatica* 20 (5), 645–651.
- Åström, K. J., Hägglund, T., 1995. PID Controllers: Theory, Design and Tuning. Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, USA.
- Åström, K. J., Hägglund, T., 2006. Advanced PID Control. ISA - The Instrumentation, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park, NC, USA.
- Åström, K. J., Panagopoulos, H., Hägglund, T., 1998. Design of PI Controllers based on Non-Convex Optimization. *Automatica* 34(5), 585–601.
- Babb, M., October 1990. Pneumatic Instruments Gave Birth to Automatic Control. *Control Engineering* 37 (12), 20–22.
- Bennett, S., April 2000. The Past of PID Controllers. In: IFAC Digital Control: Past, Present and Future of PID Control. Terrassa, Spain.
- Blanchini, F., Lepschy, A., Miani, S., Viaro, U., 2004. Characterization of PID and lead/lag compensators satisfying given hinfin specifications. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 48 (5), 736–740.
- Chen, D., Seborg, D. E., 2002. PI/PID controller design based on direct synthesis and disturbance rejection. *Ind. Eng. Chem. Res.* 41, 4807–4822.
- Chien, I., Fruehauf, P. S., 1990. Consider IMC tuning to improve performance. *Chemical Engineering Progress*, 33–41.
- Chien, K. L., Hrones, J. A., Reswick, J. B., 1952. On the automatic Control of generalized passive systems. *Trans. ASME*, 175–185.
- Crowe, J., Johnson, M. A., 2002. Automated maximum sensitivity and phase margin specification attainment in PI control. *Asian Journal of Control* 4(4), 388–396.
- Dahlin, E. G., 1968. Designing and tuning digital controllers. *Instrumentation and Control Systems* 41 (6), 77–81.
- Ge, M., Chiu, M.-S., Wang, Q.-G., 2002. Robust PID controller design via lmi approach. *Journal of Process Control* 12 (1), 3–13.
- Gerry, J. P., Hansen, P. D., 1987. Choosing the Right Controller. *Chemical Engineering* May 25, 65–68.
- Goncalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C., 2008. A novel approach for h2/hinf robust pid synthesis for uncertain systems. *Journal of Process Control* 18 (1), 19–26.
- Grassi, E., Tsakalidis, K., Dash, S., Gaikwad, S., MacArthur, W., Stein, G., 2001. Integrated system identification and pid controller tuning by frequency loop-shaping. *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.* 48 (2), 285–294.
- Grigoriadis, K. M., Skelton, R. E., 1996. Low-order control design for lmi problems using alternating projection methods. *Automatica* 32 (8), 1117–1125.
- Grimble, M. J., 1994. Robust Industrial Control. Optimal design Approach for Polynomial Systems. Prentice-Hall International.
- Hägglund, T., Åström, K. J., 2002. Revisiting the Ziegler-Nichols tuning rules for PI control. *Asian Journal of Control* 4, 354–380.
- Hägglund, T., Åström, K. J., 2004. Revisiting the Ziegler-Nichols tuning rules for PI control - part II, the frequency response method. *Asian Journal of Control* 6, 469–482.
- Hara, S., Iwasaki, T., Shiokata, D., 2006. Robust PID control using generalized kyp synthesis: Direct open-loop shaping in multiple frequency ranges. *IEEE Control Systems Magazine* 26 (1), 80–91.
- Herreros, A., Baevens, E., Peran, J. R., 2002. Design of PID-type controllers using multiobjective genetic algorithms. *ISA Transactions* 41 (4), 457–472.
- Ho, M.-T., Datta, A., Bhattacharyya, S. P., 2001. Robust and Non-Fragile PID controller design. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 11, 681–708.
- Ho, W. K., Gan, O. P., Tay, E. B., Ang, E. L., 1996. Performance and gain and phase margins of well-known pid tuning formulas. *IEEE Trans. Control Systems Technology* 4 (11), 473–477.
- Ho, W. K., Hang, C., Zhou, J. H., 1995a. Performance and gain and phase margins of well-known pi tuning formulas. *IEEE Trans. Control Systems Technology* 3 (2), 245–248.
- Ho, W. K., Hang, C. C., Cao, L. S., 1995b. Tuning of PID controllers based on gain and phase margin specification. *Automatica* 31, 497–502.
- Ho, W. K., Lim, K. W., Hang, C. C., Ni, L. Y., 1999. Getting more phase margin and performance out of pid controllers. *Automatica* 35, 1579–1585.
- Johnson, M., Moradi, M. H., 2005. PID Control: New Identification and Design Methods. Springer Verlag London.
- Karimi, A., Kunze, M., Longchamp, R., 2006. Robust PID controller design by linear programming. *Proceedings of the 2006 American Control Conference* Minneapolis, Minnesota, USA, June 14–16.
- Karimi, A., Kunze, M., Longchamp, R., 2007. Robust controller design by linear programming with application to a double-axis positioning system. *Control Engineering Practice* 15, 197–208.
- Keel, L. H., Bhattacharyya, S. P., 1997. Robust, fragil or optimal? *IEEE Transaction on Automatic Control* 42, 1098–1105.
- Kristiansson, B., 2003. PID Controllers, Design and Evaluation. Ph.D. thesis, Control and Automation Laboratory, Department of Signals and Systems, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden.
- Kristiansson, B., Lennartson, B., 2006. Robust Tuning of PI and PID Controllers. *IEEE Control Systems Magazine* 26(1), 69.
- Leva, A., Colombo, A. M., 2004. On the IMC-based synthesis of the feedback block of isa PID regulators. *Transactions of the Institute of Measurement and Control* 26 (5), 417–440.
- Malan, S. A., Milanese, M., Taragna, M., 1994. Robust tuning for PID controllers with multiple performance specifications. In *Proceedings of the 33rd conference on decision and control*, Lake Buena Vista, FL, USA.
- Morari, M., Zafiriou, E., Economou, C. G., 1988. Robust Process Control. Springer-Verlag.
- O'Dwyer, A., 2003. Handbook of PI and PID controller tuning rules. Imperial College Press, London, UK.
- Panagopoulos, H., Astrom, K. J., Hagglund, T., 2002. Design of PID controllers based on constrained optimisation. *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, 149 (1), 32–40.
- Persson, P., 1992. Towards autonomous PID control. Ph.D. thesis, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden.
- Reynoso, G., Blasco, X., Sanchis, J., 2009. Diseño multiobjetivo de controladores pid para el benchmark de control 2008-9. *RIAI - Revista Iberoamericana de Automática y Electrónica Industrial* 6 (4), 93–103.
- Rivera, D. E., Morari, M., Skogestad, S., 1986. Internal Model Control. 4. PID Controller Desing. *Ind. Eng. Chem. Des. Dev.* 25, 252–265.
- Schei, T. S., 1994. Automatic tuning of pid controllers based on transfer function estimation. *Automatica* 30 (12), 1983–1989.
- Shen, J.-C., 2002. New tuning method for PID controller. *ISA Transactions* 41, 473–484.
- Shinskey, F. G., 1988. Process control systems: Application, design, and tuning. 3rd edn. McGraw-Hill, New York.
- Shinskey, F. G., 1990. Putting controllers to the test. *Chemical Engineering* December, 96–106.
- Silva, G. J., Datta, A., Bhattacharyya, S. P., 2003. On the Stability and Controller Robustness of Some Popular PID Tuning Rules. *IEEE Transaction on Automatic Control* 48(9), 1638–1641.
- Silva, G. J., Datta, A., Bhattacharyya, S. P., 2005. PID Controllers for Time-Delay Systems. Birkhäuser Boston, Ney York, NY, USA.
- Skogestad, S., 2003. Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. *Journal of Process Control* 13, 291–309.
- Smith, C., Corripio, A. B., 1985. Principles and practice of automatic process control. Wiley, New York.
- Tavakoli, S., Griffin, I., Fleming, P. J., 2005. Robust PI Controller for Load Disturbance Rejection and Setpoint Regulation. In: IEEE conference on Con-

- tral Applications. Toronto, Canada, August 28–31.
- Tavakoli, S., Griffin, I., Fleming, P. J., 2007. Multi-Objective Optimization Approach to the PI Tuning Problem. In: IEEE Congress on Evolutionary Computing (CEC2007). pp. 3165–3171.
- Toivonen, H. T., Totterman, S., 2006. Design of fixed-structure controllers with frequency-domain criteria: a multiobjective optimisation approach. IEE Proc. D, Control Theory and Applications 153 (1).
- Toscano, R., 2005. A simple robust PI/PID controller design via numerical optimization approach. Journal of Process Control 15, 81–88.
- Vidyasagar, M., 1985. Control System Synthesis. A factorization approach. MIT Press. Cambridge, Massachusetts.
- Vilanova, R., 2008. Imc based robust PID design: Tuning guidelines and automatic tuning. Journal of Process Control 18, 61–70.
- Vilanova, R., Alfaro, V. M., Arrieta, O., Pedret, C., 2010. Analysis of the claimed robustness for pi/pid robust tuning rules. In: 18th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (MED10), June 23–25, Marrakech-Morocco.
- Visioli, A., 2001. Optimal tuning of PID controllers for integral and unstable processes. IEE Proc. D, Control Theory and Applications 148 (2).
- Visioli, A., 2006. Practical PID Control. Springer Verlag Advances in Industrial Control Series.
- Zhuang, M., Atherton, D. P., 1993. Automatic tuning of optimum PID controllers. IEE Proc. D, Control Theory and Applications 140 (3), 216–224.
- Ziegler, J. G., Nichols, N. B., 1942. Optimum settings for automatic controllers. Trans ASME 64, 759–768.