

## Aplicación de Control Borroso a un Sistema de Suspensión Magnética: Comparación Experimental

Javier Ollervides, Víctor Santibáñez, Miguel Llama, Alejandro Dzul

*Instituto Tecnológico de la Laguna,  
Blvd. Revolución y Calzada Cuauhtémoc, Apdo. Postal 49, Adm. 1, Torreón,  
Coahuila, 27001, México  
{jollervi, vsantiba, mllama, dzul}@itlalaguna.edu.mx, santibanez@ieee.org*

**Resumen:** Este trabajo presenta un esquema de control lógico borroso de regulación de posición aplicado a un sistema de suspensión o levitación magnética de una esfera metálica. El principal ingrediente de aportación de este trabajo es la aplicación experimental en tiempo real de dicho controlador y su comparación con otros esquemas tanto lineales como no lineales; a saber: esquemas de control PD y PID con precompensación, y un esquema basado en pasividad, asignación de amortiguamiento e interconexión, introducido recientemente en la literatura. *Copyright © 2010 CEA.*

**Palabras Clave:** control borroso, sistemas no lineales, dispositivos electromagnéticos, suspensión magnética, control PID

### 1. INTRODUCCIÓN

Las técnicas de control lógico borroso, introducidas a mediados de los años 60 en (Zadeh, 1965), han tenido un rápido crecimiento en los últimos 20 años, (Mamdani, 1974; Buckley, 1989; Lewis & Liu, 1995; Matia *et al.*, 1992; Andújar *et al.*, 2006, 2007), debido principalmente a su excelente desempeño mostrado en aplicaciones prácticas en todas las ramas del control y a nuevos avances en la teoría de estabilidad de sistemas borrosos que garantizan formalmente el cumplimiento de los objetivos de control; ver por ejemplo: (Ariño *et al.*, 2007; Basil *et al.*, 2005, 2007; Kelly *et al.*, 1999; Llama *et al.*, 2000; Santibáñez *et al.*, 2004, 2005; Wang, 1997).

Por otro lado, el estudio del fenómeno de levitación magnética toma singular importancia debido a su creciente uso en aplicaciones prácticas, tales como en el ámbito tranviario (Yang *et al.*, 1998) y en otras más (Goethem *et al.*, 2002).

En este trabajo se aborda la aplicación práctica en tiempo real de un controlador lógico borroso a un sistema de levitación magnética. El controlador lógico borroso utilizado es del tipo de acción directa; es decir, la acción de control es directamente calculada de las señales de error de posición y de velocidad (tipo PD con salida acotada) (Santibáñez *et al.*, 2004), específicamente, del tipo conocido como control borroso sectorial (Calcev, 1998), que presenta cualidades interesantes de pasividad, que serán mencionadas más adelante.

El análisis del fenómeno físico de levitación, en este trabajo, se sustenta en el principio de atracción magnética. En el fenómeno de suspensión o levitación por atracción, también llamado suspensión electromagnética (EMS, "Electromagnetic Suspension") (Woodson & Melcher, 1968), donde un cuerpo es atraído por un campo magnético cuya fuerza es contraria a la fuerza de gravedad, el punto de equilibrio que se produce entre la fuerza de atracción y la fuerza de gravedad es inestable, por lo que es necesario utilizar un sistema de control automático para

controlar la posición del cuerpo móvil. Con este fin, la sintonización del controlador borroso utilizado está sustentada en el conocimiento del comportamiento físico del modelo dinámico no lineal del levitador magnético, abreviado en este documento con el sobrenombre de MagLev (Quanser Consulting, 2003).

Para tener un estudio acerca del comportamiento dinámico del sistema de control lógico borroso, abreviado aquí como FLC (de las siglas en inglés "Fuzzy Logic Controller"), se realiza una comparación de la respuesta experimental en tiempo real de éste, con varios controladores lineales de posición; proporcional derivativo (PD) y proporcional integral derivativo (PID); y un controlador no lineal basado en la técnica de control IDA-PBC (por sus siglas en inglés "Interconnecting and Damping Assignment-Passivity Based Control"). Todos estos controladores estudiados están provistos de una precompensación de corriente, equivalente a una precompensación de gravedad, excepto el controlador IDA-PBC que inherentemente presenta una compensación de gravedad.

Todos los controladores descritos anteriormente han sido instrumentados en tiempo real mediante la plataforma de programación por bloques Simulink (de Matlab). El control en tiempo real se lleva a cabo con el programa de interfaz WinCon (WinCon User's Guide, 2003), que realiza la conversión A/D de las señales de realimentación (posición de la esfera y corriente del electromagneto) para su procesamiento y la conversión D/A de la señal de control (tensión del electromagneto) que es dirigida hacia un amplificador de potencia lineal que alimenta al electromagneto.

### 2. MODELO DINÁMICO NO LINEAL DEL LEVITADOR MAGLEV

El sistema de levitación magnética puede ser visto como un circuito magnético con entrehierro, el cual se compone de un objeto magnético en levitación (esfera metálica), que se

desplaza por debajo de un electroimán que se encuentra fijo a una base, tal y como se muestra en la Figura 1.

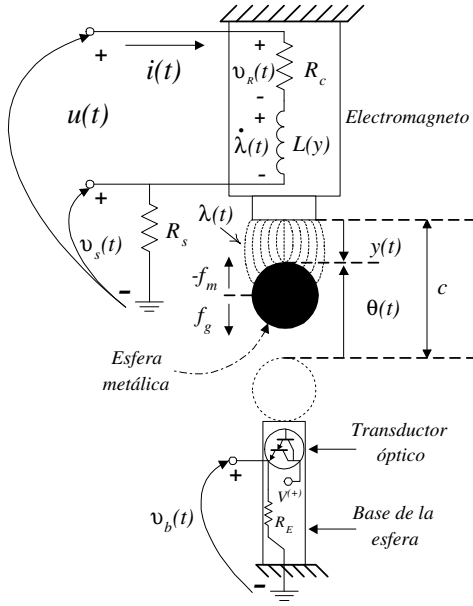


Figura 1. Sistema de levitación magnética (MagLev).

Donde  $u(t)$  es la tensión de alimentación del electroimán en voltios [V],  $i(t)$  es la corriente del electroimán en amperios [A],  $\dot{\lambda}(t)$  es la tensión inducida o fuerza electromotriz del electroimán (ley de Faraday) en voltios [V],  $\lambda(t)$  es el enlace de flujo del entrehierro en webers [Wb],  $R_c$  es la resistencia del alambrado con un valor de 10 ohmios [ $\Omega$ ],  $f_m$  es la fuerza de atracción del electroimán en newtons [N],  $f_g = mg$  es la fuerza debida a la gravedad de la tierra en newtons [N],  $m$  es la masa de la esfera con un valor de 0,068 [kg], y  $g$  es la constante de gravedad  $g = 9,81 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$  (véase la Figura 1).

Para fines prácticos las realimentaciones de corriente  $i(t)$  y posición  $\theta(t)$  en metros [m], son obtenidas respectivamente a partir de  $i(t) = \frac{v_s(t)}{R_s}$  con  $R_s = 1$  [ $\Omega$ ] (resistencia de derivación) y  $\theta(t) = k_b v_b(t)$  con  $k_b = 2,8 \times 10^{-3} \left[ \frac{m}{V} \right]$  (constante del transductor óptico), donde  $v_s(t)$  y  $v_b(t)$  son las tensiones medibles en el sistema MagLev (véase la Figura 1).

La variable  $\theta(t)$  es la posición de la cara superior de la esfera medida con respecto al entrehierro nominal denotado por la constante  $c = 0,014$  metros [m] (véase la Figura 1). Se define  $y(t) = c - \theta(t)$ , entonces la variable  $y(t)$  es la posición de la cara superior de la esfera medida con respecto a la cara inferior del electroimán en metros [m] (entrehierro variable), por lo tanto la variable  $y(t)$  es tomada como positiva hacia abajo.

El sistema MagLev tiene una inductancia variable que se describe en (Fitzgerald *et al.*, 1971), definida por la ecuación:

$$L(y) = \frac{k}{y(t)} = \frac{k}{c - \theta(t)} \quad [H] \quad (1)$$

con la restricción  $y(t) = c - \theta(t) > 0$ , siendo  $k = 6,5308 \times 10^{-5}$  una constante de proporcionalidad en [H-m]. La relación entre  $\lambda(t)$  e  $i(t)$  del sistema MagLev es descrita en (Fitzgerald *et al.*, 1971), y se expresa como:

$$\lambda(t) = L(y)i(t). \quad (2)$$

El modelo dinámico en términos del vector de estado

$[y(t) \ i(t) \ \dot{y}(t)]^T$  resulta:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y(t) \\ i(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \frac{y}{k} [u(t) - Ri(t)] + \frac{i(t)\dot{y}(t)}{y(t)} \\ -\frac{k}{2m} \frac{i^2(t)}{y^2(t)} + g \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde el punto de equilibrio (para  $u(t) = u_{eq}$  constante) en malla abierta es  $[y_{eq} \ i_{eq} \ 0]^T$ , siendo  $R = R_c + R_s$  con un valor de 11 [ $\Omega$ ],  $y_{eq}$  la posición de operación,  $i_{eq} = k_{ff} y_{eq}$  la corriente de operación, con  $k_{ff} = \sqrt{\frac{2mg}{k}} = 142,9292 \left[ \frac{A}{m} \right]$  (constante de prealimentación), y  $u_{eq} = Ri_{eq}$  la tensión de entrada constante.

Es posible también obtener un modelo equivalente no lineal en términos del vector de estado  $[\lambda(t) \ \theta(t) \ \mathcal{M}(t)]$ . En este caso la ecuación de estado es,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda(t) \\ \theta(t) \\ \mathcal{M}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \frac{[c - \theta(t)]\lambda(t)}{k} + u(t) \\ \frac{1}{m} \mathcal{M}(t) \\ \frac{1}{2k} \lambda^2(t) - mg \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde  $\mathcal{M}(t)$  es la cantidad de movimiento de la esfera, definida como  $\mathcal{M}(t) = m\dot{\theta}(t)$  en  $\left[ \frac{kg-m}{s} \right]$ . El punto de equilibrio (para  $u(t) = u_{eq}$  constante) en malla abierta es  $[\lambda_{eq} \ \theta_{eq} \ 0]^T$ , donde  $\lambda_{eq} = \sqrt{2kmg}$  es el enlace de flujo y  $\theta_{eq}$  es la posición, ambos en el punto de operación, mientras que  $u_{eq} = \frac{R(c - \theta_{eq})\lambda_{eq}}{k}$  es la tensión de entrada constante.

La ecuación (3) coincide con la obtenida por el método Lagrangiano, presentado en (Lozano *et al.*, 2000), la cual es equivalente al modelo Hamiltoniano (4) dado en (Ortega *et al.*, 2001).

### 3. OBJETIVO DE CONTROL

El objetivo de control es encontrar una señal  $u(t)$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}(t) = 0 \quad (5)$$

donde  $\tilde{y}(t) = y(t) - y_d$  es el error de posición y  $y_d$  es la posición deseada constante de la esfera metálica.

Para cumplir el objetivo de control, planteado en este trabajo, existen diversas técnicas de control reportadas en la literatura, desde controladores clásicos, PD o PID, basados en la linealización del sistema alrededor del punto de operación, hasta nuevos controladores, reportados recientemente en la literatura, que utilizan conceptos de control basado en pasividad e interconexión y asignación de amortiguamiento IDA-PBC, los cuales explotan la dinámica no lineal del modelo para su adecuado diseño (Ortega *et al.*, 2001), pasando por controladores lógicos borrosos, los cuales no requieren el conocimiento exacto del modelo de la planta, sino que emplean reglas basadas en el conocimiento de expertos.

Con el objeto de poner en perspectiva los desempeños de algunos de estos controladores, en lo que resta del artículo se

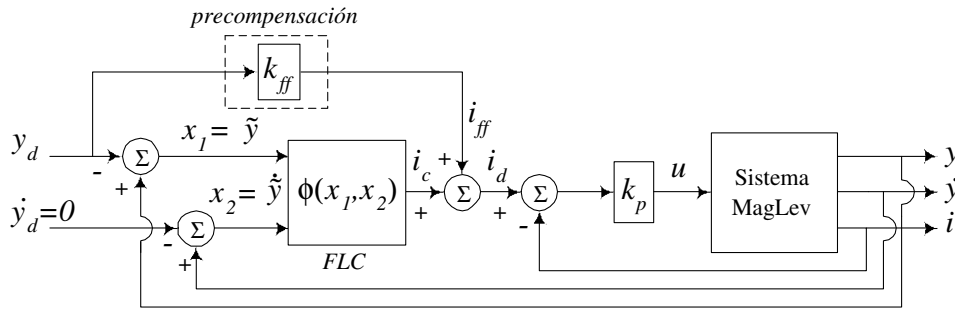


Figura 2. Sistema de control lógico borroso del levitador magnético.

presentará una comparación experimental de cuatro esquemas de control; a saber: control lógico borroso (FLC), PD, PID, e IDA-PBC. Todos ellos utilizando una precompensación de corriente y un lazo interno P para regular la corriente y de esta forma no exceder los límites de potencia y temperatura del electromagneto, montado en la suspensión magnética

#### 4. SISTEMA DE CONTROL LÓGICO BORROSO (FLC)

El sistema de control lógico borroso (FLC) aplicado al sistema MagLev es representado en el diagrama a bloques en la Figura 2, donde se observa la estructura general del respectivo sistema de control en lazo cerrado, mientras que en la Figura 3 se pueden ver los bloques internos que forman parte del controlador FLC.

En el controlador FLC,  $\mathbf{x}(t) = [x_1 \ x_2]^T = [\tilde{y}(t) \ \dot{\tilde{y}}(t)]^T \in \mathbb{R}^2$  es el vector de las variables de entrada o vector de error, donde  $\tilde{y}(t) = y(t) - y_d$ ,  $\dot{\tilde{y}}(t) = \dot{y}(t) - \dot{y}_d = \dot{y}(t)$ , e  $i_c \in \mathbb{R}$  es la corriente escalar de salida (en este trabajo se aborda únicamente el problema de regulación de posición y no el de seguimiento de trayectorias). La ley de control se expresa como:

$$u(t) = k_p[(\phi(x_1, x_2) + i_{ff}) - i(t)] \quad (6)$$

donde  $i_c = \phi(x_1, x_2)$  es un mapeo no lineal pasivo (Calcev, 1998), cuya expresión de pasividad será mostrada más adelante,  $i_d(t) = (i_c + i_{ff})$  es la corriente deseada del lazo interno y  $k_p$  es la ganancia proporcional de corriente, ajustada en nuestro caso a  $k_p = 50 \left[ \frac{V}{A} \right]$ . Las funciones de pertenencia que utiliza el controlador FLC son del tipo triangular y pseudo-trapezoidal, cuyas ecuaciones pueden ser revisadas en (Wang, 1997; Santibáñez *et al.*, 2001), mientras que el bloque de emborronado, mostrado en la Figura 3, es del tipo impulso.

##### 4.1 Bloque de la base de reglas y el mecanismo de inferencia

El conjunto de las funciones de pertenencia asociadas con cada una de las variables de entrada  $\mu_{A_1^1}(x_1)$ ,  $\mu_{A_2^2}(x_2)$ , están representados en este trabajo por:

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ \mu_{A_1^1}(x_1), \text{ para } l_1 = -\frac{N_1-1}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N_1-1}{2} \right\} \quad (7)$$

$$\mathcal{H}_2 = \left\{ \mu_{A_2^2}(x_2), \text{ para } l_2 = -\frac{N_2-1}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N_2-1}{2} \right\} \quad (8)$$

donde  $N_1$  y  $N_2$  son constantes impares que representan el número de funciones de pertenencia escalares asociadas con cada variable de entrada, formándose así una partición borrosa para dichas variables de entrada, que en este caso satisfacen las propiedades mencionadas en (Calcev, 1998), las cuales se expresan a continuación:

- Para todo  $x_i \in U_i \subset \mathbb{R}$ , la suma de todas las funciones de pertenencia asociadas a cada entrada  $x_1$  y  $x_2$  debe tener un valor unitario (condición de ortogonalidad), i.e.

$$\sum_{l_i = -\frac{N_i-1}{2}}^{\frac{N_i-1}{2}} \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) = 1 \text{ para } i = 1, 2. \quad (9)$$

- Para cada  $k_i \in \left\{ -\frac{N_i-1}{2}, \dots, \frac{N_i-1}{2} - 1 \right\}$  con  $i = 1, 2$ , las funciones de pertenencia

$$\mu_{A_i^{k_i}}(x_i) \text{ y } \mu_{A_i^{k_i+1}}(x_i) \quad (10)$$

son adyacentes.

- Para todo  $x_i \in U_i \subset \mathbb{R}$ , existe  $k_i \in \left\{ -\frac{N_i-1}{2}, \dots, \frac{N_i-1}{2} - 1 \right\}$  tal que

$$\sum_{l_i = -\frac{N_i-1}{2}}^{\frac{N_i-1}{2}} \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) - \sum_{l_i = k_i}^{k_i+1} \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) = 0 \quad \text{para } i = 1, 2. \quad (11)$$

Esto significa que, para cualquier posible valor de  $x_i \in U_i \subset \mathbb{R}$ , a lo más, sólo dos funciones de pertenencia producen valores (grado de pertenencia) estrictamente diferentes de cero.

- Las funciones de pertenencia de entrada  $\mu_{A_1^1}(x_1)$  y  $\mu_{A_2^2}(x_2)$  son simétricas con respecto al origen, de tal forma que

$$\mu_{A_i^{l_i}}(x_i) = \mu_{A_i^{-l_i}}(-x_i) \quad (12)$$

para todo  $x_i \in U_i$ , con  $i = 1, 2$ .

En las Figuras 4.a) y 4.b) se muestran las funciones de pertenencia de entrada, utilizadas en este trabajo, donde se selec-

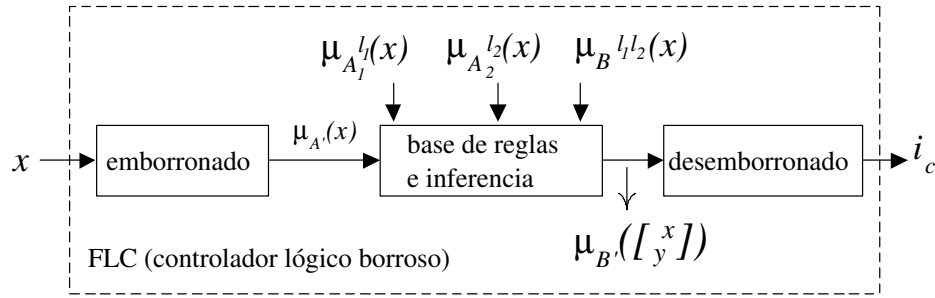


Figura 3. Estructura interna del controlador borroso.

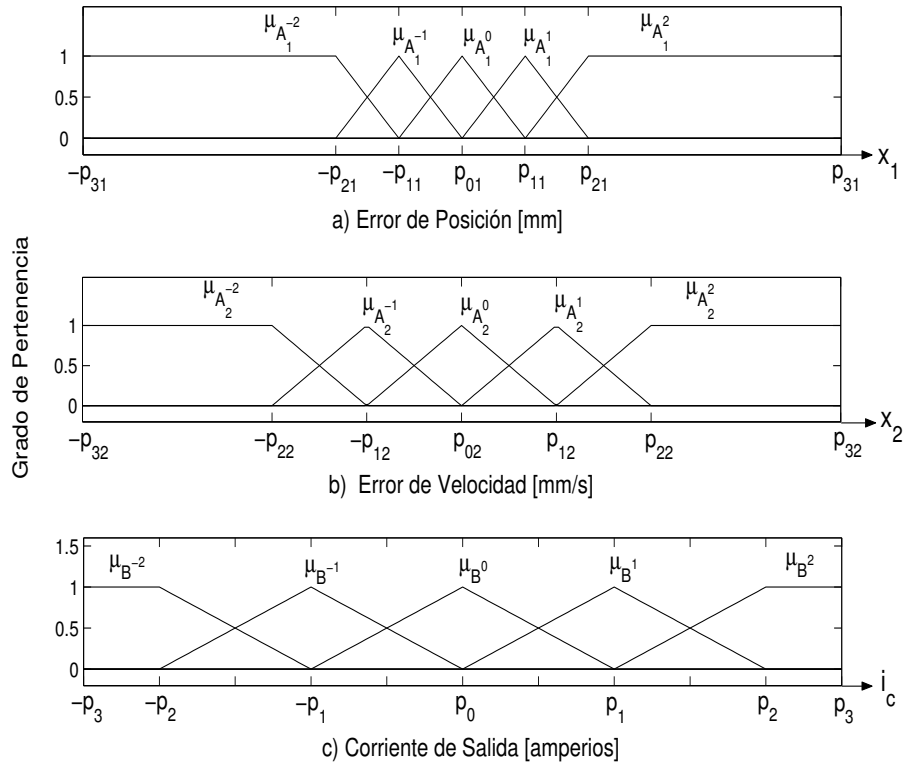


Figura 4. Funciones de pertenencia del controlador lógico borroso.

ción  $N_i = 5$ . Éstas están definidas por el conjunto de cotas de sus respectivos soportes denotado por

$$\mathbf{p}_{A_i} = \{-p_{3i}, -p_{2i}, -p_{1i}, p_{0i}, p_{1i}, p_{2i}, p_{3i}\};$$

dichas cotas fueron obtenidas a partir de los límites físicos de las variables de posición y velocidad, y sus valores numéricos se indican en (13) y (14):

$$\mathbf{p}_{A_1} = \{(-7), (-2,333), (-1,167), (0), (1,167), (2,333), (7)\} \quad [\text{mm}] \quad (13)$$

$$\mathbf{p}_{A_2} = \{(-157,5), (-75), (-37,5), (0), (37,5), (75), (157,5)\} \quad \left[\frac{\text{mm}}{\text{s}}\right]. \quad (14)$$

La función de pertenencia asociada con la variable de salida  $i_c$  es definida por  $\mu_{B^l}(i_c)$  para  $i_c \in V \subset \mathbb{R}$ , donde  $V \subset \mathbb{R}$

es el universo de discurso para la variable de salida, con  $l = -\frac{J-1}{2}, \dots, \frac{J-1}{2}$ , donde  $J$  es el número de funciones escalares de la función de pertenencia de salida. Particularmente hemos tomado  $J = 5$ . En nuestro caso hemos utilizado la definición de la función  $\mu_{B^l}(i_c)$  idéntica a la función  $\mu_{A_i^{l_i}}(x_i)$ , tal como se muestra en la Figura 4.c), donde

$$\mathbf{p}_B = \{-p_3, -p_2, -p_1, p_0, p_1, p_2, p_3\}$$

denota el conjunto de cotas de los soportes de las funciones de pertenencia de salida (ver Figura 4.c).

Los parámetros de  $\mathbf{p}_B$ , que describen a las funciones de pertenencia de salida, asociadas con  $i_c$ , fueron obtenidos a partir de los límites físicos de la variable de corriente, los cuales se muestran en (15).

$$p_B = \{(-1), (-0,8), (-0,4), (0), (0,4), (0,8), (1)\} [A]. \quad (15)$$

La base de reglas borrosas para el sistema MagLev de dos entradas ( $x_1$  y  $x_2$ ) y una salida ( $i_c$ ), es formada tomando todas las  $M$  posibles combinaciones de las funciones de pertenencia para cada entrada ( $M = N_1 N_2$ ); esto es,

Regla( $l_1 l_2$ ) :

$$\text{IF } x_1 \in \mu_{A_1^{l_1}} \text{ AND } x_2 \in \mu_{A_2^{l_2}} \text{ THEN } i_c \in \mu_{B^{l_1 l_2}} \quad (16)$$

donde  $[x_1 \ x_2]^T = x \in U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^2$ ,  $i_c \in V \subset \mathbb{R}$ , y  $\mu_{A_i^{l_i}}(x) \in \mathcal{H}_i$ , definidos en (7) y (8), con  $i = 1, 2$ .

Cada función de pertenencia  $\mu_{B^{l_1 l_2}}(i_c)$  resultante está asociada con una  $l$ -ésima función de pertenencia  $\mu_{B^l}(i_c)$ ; esto es

$$\mu_{B^{l_1 l_2}}(i_c) \in \left\{ \mu_{B^{-\frac{J-1}{2}}}(i_c), \dots, \mu_{B^{\frac{J-1}{2}}}(i_c) \right\} \quad (17)$$

donde  $l_1 = -\frac{N_1-1}{2}, \dots, \frac{N_1-1}{2}$  y  $l_2 = -\frac{N_2-1}{2}, \dots, \frac{N_2-1}{2}$ . En nuestro caso  $N_1 = N_2 = J = 5$ , generando  $M = N_1 N_2 = 25$  reglas IF-THEN las cuales se muestran en la Tabla 1.

**Tabla1. Base de reglas borrosas.**

$x_1 \setminus x_2$	$\mu_{A_1^{-2}}$	$\mu_{A_1^{-1}}$	$\mu_{A_1^0}$	$\mu_{A_1^1}$	$\mu_{A_1^2}$
$\mu_{A_2^{-2}}$	$\mu_{B^{-2}}$	$\mu_{B^{-2}}$	$\mu_{B^{-2}}$	$\mu_{B^{-1}}$	$\mu_{B^0}$
$\mu_{A_2^{-1}}$	$\mu_{B^{-2}}$	$\mu_{B^{-2}}$	$\mu_{B^{-1}}$	$\mu_{B^0}$	$\mu_{B^1}$
$\mu_{A_2^0}$	$\mu_{B^{-2}}$	$\mu_{B^{-1}}$	$\mu_{B^0}$	$\mu_{B^1}$	$\mu_{B^2}$
$\mu_{A_2^1}$	$\mu_{B^{-1}}$	$\mu_{B^0}$	$\mu_{B^1}$	$\mu_{B^2}$	$\mu_{B^2}$
$\mu_{A_2^2}$	$\mu_{B^0}$	$\mu_{B^1}$	$\mu_{B^2}$	$\mu_{B^2}$	$\mu_{B^2}$

El mecanismo de inferencia utiliza la base de reglas borrosas y define la operación que se utilizará para calcular la función implicada o consecuente, en nuestro caso se ha empleado el proceso de inferencia mínima (implicación Mamdani (Wang, 1997)). La salida del mecanismo de inferencia es el conjunto borroso  $\mu_{B'} \left( \begin{bmatrix} x \\ i_c \end{bmatrix} \right)$  el cual es obtenido combinando, mediante el operador unión, los consecuentes de las  $M$  reglas.

#### 4.2 Bloque de desemborronado

El proceso de desemborronado es el paso donde la función de pertenencia  $\mu_{B'} \left( \begin{bmatrix} x \\ i_c \end{bmatrix} \right)$  obtenida por el mecanismo de inferencia, es utilizada para calcular el valor de la variable real  $i_c \in \mathbb{R}$ . Esta variable es la salida del *controlador lógico borroso*, y a la vez, la acción de control del sistema MagLev. En este trabajo se utiliza el método de desemborronado *centro promedio*, que se calcula mediante la media aritmética ponderada del conjunto implicado. En resumen, utilizando la base de reglas (16), emborronado impulso, mecanismo de inferencia mínimo, combinación por unión y desemborronado centro promedio, obtenemos las ecuaciones (18) y (19).

$$\phi(x) = \frac{\sum_{l_1=-\frac{N_1-1}{2}}^{\frac{N_1-1}{2}} \sum_{l_2=-\frac{N_2-1}{2}}^{\frac{N_2-1}{2}} \bar{i}_c^{l_1 l_2} \left[ \bigcap_{i=1}^2 \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) \right]}{\sum_{l_1=-\frac{N_1-1}{2}}^{\frac{N_1-1}{2}} \sum_{l_2=-\frac{N_2-1}{2}}^{\frac{N_2-1}{2}} \left[ \bigcap_{i=1}^2 \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) \right]} \quad (18)$$

$$i_c = \phi(x) = \phi(x_1, x_2) \quad (19)$$

donde  $\bigcap$  denota el operador intersección que en este trabajo ha sido escogido como operador mínimo, e  $\bar{i}_c^{l_1 l_2}$  es el centro de las funciones de pertenencia de salida dadas en (17).

La ecuación (18) representa un mapeo no lineal con propiedades interesantes de pasividad (Calcev, 1998); esto es, el mapeo  $\phi(x)$  satisface:

$$\int_0^t x_2(\sigma) [\phi(x_1(\sigma), x_2(\sigma))] d\sigma \geq V_1(x_1(t)) - V_1(x_1(0))$$

con función de almacenamiento  $V_1(x_1)$  definida positiva; esto es,

$$V_1(x_1(t)) = \int_0^{x_1} \phi(\xi_1, 0) d\xi_1 > 0.$$

Esto significa que el sistema borroso no puede almacenar más energía a la suministrada externamente. La diferencia entre la energía suministrada y la energía almacenada resulta ser la energía disipada. Esta propiedad es fundamental en los controladores basados en pasividad para prueba de estabilidad de sistemas no lineales (Santibáñez *et al.*, 2004, 2005).

Debido a las propiedades de pasividad, arriba mencionadas, del presente controlador lógico borroso y a la naturaleza Lagrangiana y Hamiltoniana del modelo no lineal del levitador magnético, se abre la posibilidad de justificar teóricamente la estabilidad asintótica del equilibrio del sistema en lazo cerrado. Este problema teórico está actualmente en desarrollo.

#### 4.3 Respuesta experimental del sistema de control borroso (FLC)

En la Figura 5 se muestra la respuesta del sistema FLC, la cual será comparada más adelante con la respuesta de otros controladores.

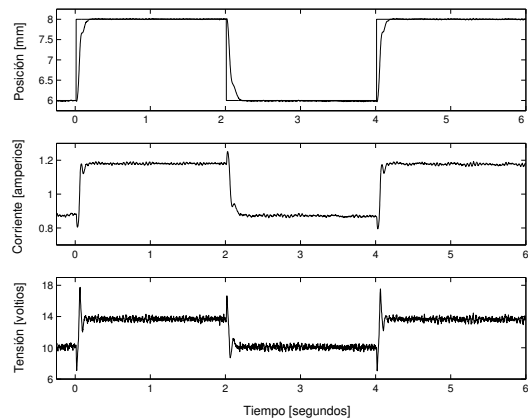


Figura 5. Respuesta experimental del controlador lógico borroso.

Los parámetros de las funciones de pertenencia, se obtuvieron mediante el método experimental de sintonización presentado

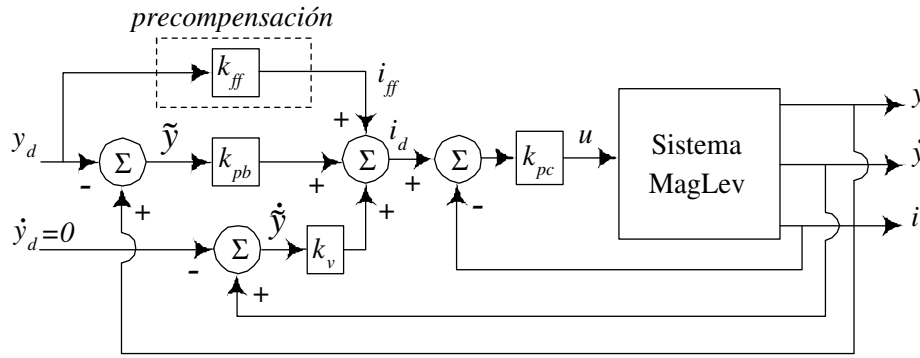


Figura 6. Sistema de control PD.

en (Passino y Yurkovich, 1998), el cual consiste en escalar proporcionalmente los parámetros de soporte de las funciones de pertenencia de entrada hasta obtener una respuesta satisfactoria de la posición y velocidad sin saturar la acción de control, pero siempre cumpliendo, adicionalmente, con las características impuestas por (Calcev, 1998) para satisfacer las propiedades de pasividad; es decir, en todos los casos las funciones de pertenencia son simétricas con respecto a cero; para cualquier entrada la suma de los valores de pertenencia de dos conjuntos borrosos adyacentes es uno; las reglas mostradas en la Tabla 1 satisfacen que la salida es nula para entradas nulas; dentro de un renglón, la acción de control (conclusión) se incrementa gradualmente de izquierda a derecha, y dentro de una columna ésta se incrementa de arriba hacia abajo.

Específicamente, se seleccionaron los parámetros de las funciones de pertenencia de entrada y salida de acuerdo a los límites físicos del error de posición (de -7 [mm] a 7 [mm]) y de la corriente (de -1 [A] a 1 [A]). Los límites físicos del error de velocidad fueron obtenidos experimentalmente a partir de los valores observados con el controlador PD clásico mostrado en la siguiente sección (de -0.1575 [m/s] a 0.1575 [m/s]). Estos límites definen el universo de discurso de cada una de las variables, tanto de entrada como de salida.

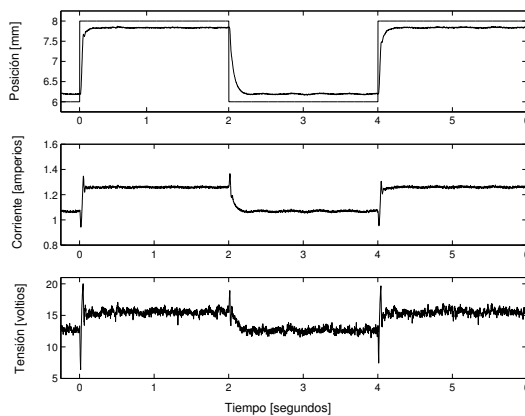


Figura 7. Respuesta experimental del controlador PD.

## 5. LEY DE CONTROL LINEAL PD

Otro esquema de control muy sencillo a comparar, es el control lineal PD, cuyos parámetros fueron sintonizados de acuerdo

a la colocación de polos del sistema en lazo cerrado, usando un modelo linealizado alrededor del punto de operación del levitador magnético.

### 5.1 Descripción del controlador

En el diagrama de bloques de la Figura 6 se muestra la estructura del controlador PD. La ley de control se expresa analíticamente como:

$$u(t) = k_{pc}(i_d(t) - i(t)) \quad (20)$$

donde  $i_d(t) = k_{pb}\tilde{y}(t) + k_v\dot{\tilde{y}}(t) + i_{ff}$  es la corriente deseada del lazo interno,  $k_{pb}$  y  $k_{pc}$  son las ganancias proporcionales de posición y de corriente respectivamente,  $k_v$  es la ganancia de velocidad, e  $i_{ff} = k_{ff}y_d$  es la corriente de precompensación. El modelo lineal del MagLev se obtuvo mediante una linealización aproximada del modelo no lineal en (3), utilizando la serie de Taylor evaluada en el punto de operación, y bajo la hipótesis que  $L(y_{eq}) = L_{eq} = \frac{k}{y_{eq}}$  (inductancia propia en el punto de equilibrio), calculando así la función de transferencia del MagLev:

$$G_{LA}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \left[ \frac{k_{cdc}}{\sigma_c s + 1} \right] \left[ \frac{-k_{bdc}\omega_b^2}{s^2 - \omega_b^2} \right] \quad (21)$$

utilizando las siguientes constantes del sistema linealizado:  $k_{cdc} = \frac{1}{R} \left[ \frac{A}{V} \right]$ ,  $\sigma_c = \frac{L_{eq}}{R} [s]$  como los parámetros de la dinámica eléctrica, y  $k_{bdc} = \sqrt{\frac{k}{2mg}} \left[ \frac{m}{A} \right]$ ,  $\omega_b = \sqrt{\frac{2gL_{eq}}{k}} \left[ \frac{rad}{s} \right]$  como los parámetros de la dinámica electromecánica. La sintonización de las ganancias de este controlador se llevó a cabo con el método analítico de ubicación de los polos y ceros para sistemas lineales (Quanser Consulting, 2003), sin embargo se realizó una resintonización mediante experimentación para aumentar la rapidez de la respuesta del sistema. Los valores obtenidos son  $k_{pb} = 400 \left[ \frac{A}{m} \right]$ ,  $k_v = 15 \left[ \frac{A \cdot s}{m} \right]$  y  $k_{pc} = 300 \left[ \frac{V}{A} \right]$ . Las condiciones iniciales del vector de estado se ubicaron en los siguientes valores:

$$[y(0) \ i(0) \ \dot{y}(0)]^T = [6 \times 10^{-3} \ i_{eq} \ 0]^T \quad (22)$$

La frecuencia de muestreo para el cálculo numérico en tiempo real de las leyes de control lineal y borroso se asignó en  $f_s = 1$  kHz, la cual es suficientemente rápida como para estudiar el sistema en tiempo continuo.

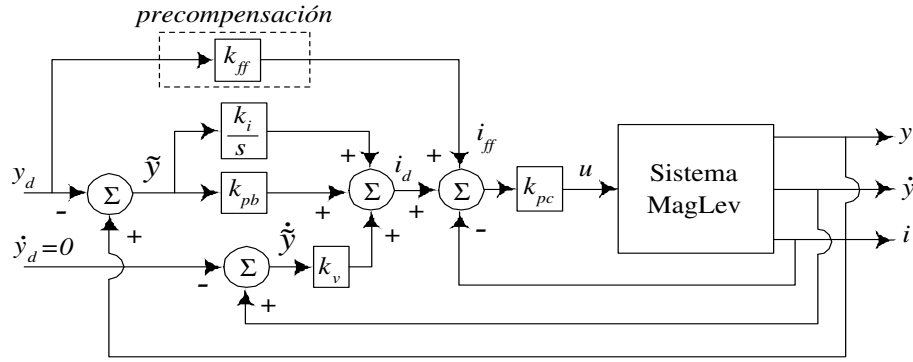


Figura 8. Sistema de control PID.

### 5.2 Respuesta experimental del sistema de control PD

En la Figura 7 se muestran las gráficas de la respuesta del sistema PD ante una entrada escalón. Se puede notar claramente que existe un error considerable en estado estacionario, propio de una acción PD.

## 6. CONTROL PID

Con el fin de eliminar el error en estado estacionario en el controlador lineal PD se agrega una acción integral.

### 6.1 Descripción del controlador

En el diagrama de bloques de la Figura 8 se muestra la estructura del controlador PID propuesto en (Quanser Consulting, 2003).

La ley de control aplicada en este esquema está definida de la siguiente manera:

$$u(t) = k_{pc}(i_d(t) - i(t)) \quad (23)$$

donde  $i_d(t) = k_{pb}\tilde{y}(t) + k_i \int \tilde{y}(t)dt + k_v\dot{y}(t) + i_{ff}$  es la corriente deseada del lazo interno,  $k_{pb}$ ,  $k_{pc}$ ,  $k_v$  e  $i_{ff}$  se definieron en la sección anterior, mientras que  $k_i$  es la ganancia integral de posición. La sintonización de las ganancias de este controlador se realizó en base a la colocación de polos de la función de transferencia del sistema en lazo cerrado linealizado alrededor del punto de operación, tal como se hizo en el controlador PD de la sección anterior. Los valores obtenidos son:  $k_{pb} = 380 \left[ \frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$ ,  $k_i = 750 \left[ \frac{\text{A}}{\text{s-m}} \right]$  y  $k_v = 15 \left[ \frac{\text{A-s}}{\text{m}} \right]$  y  $k_{pc} = 200 \left[ \frac{\text{V}}{\text{A}} \right]$ .

### 6.2 Respuesta experimental del controlador PID

En la Figura 9 se muestra la respuesta del sistema, donde se observa que la respuesta de posición ante la entrada escalón tiene sobrepaso, pero tiende al valor deseado de forma asintótica, lo que implica una mejora en el comportamiento de la posición en estado estacionario con respecto al controlador PD.

En suma, los experimentos con los controladores PD y PID se realizaron en base al método de colocación de polos; y a partir de ahí, se procedió a una resintonización fina de cada una de las ganancias, tal que ambos esquemas de control tuvieran su mejor respuesta posible.

## 7. LEY DE CONTROL IDA-PBC

Los experimentos para el controlador IDA-PBC que se muestran en este trabajo se realizaron en base al modelo expresado en (4). La señal de referencia y la frecuencia de muestreo ( $f_s$ ) utilizados en los experimentos de estos controladores son iguales a los que se utilizaron en los experimentos de control lineal y borroso, con el siguiente vector de condiciones iniciales:

$$[\lambda(0) \ \theta(0) \ \mathcal{M}(0)]^T = [\sqrt{2kmg} \ 0,006 \ 0]^T \quad (24)$$

### 7.1 Descripción del controlador

Esta ley de control es propuesta en (Rodríguez *et al.*, 2000; Ortega *et al.*, 2001), y se expresa como,

$$u(t) = -k_p\tilde{\theta}(t) - \frac{k_p}{\alpha}\tilde{\lambda}(t) - k_v\mathcal{M}(t) + \frac{R}{k}[c - \theta(t)]\lambda(t) \quad (25)$$

La sintonización de ganancias se llevó a cabo de forma experimental pero respetando las condiciones de estabilidad propuestas en (Rodríguez *et al.*, 2000; Ortega *et al.*, 2001) con  $k_p = \frac{b\alpha}{R_a}$  y  $k_v = [\frac{\alpha}{m} + k_p R_a]$  donde  $\alpha, b, R_a > 0$ , obteniéndose los siguientes valores:  $k_p = 60 \times 10^3 \left[ \frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$ ,  $k_v = 10 \times 10^3 \left[ \frac{\text{V-s}}{\text{kg-m}} \right]$ ,  $\alpha = 2 \left[ \frac{\text{Wb}}{\text{m}} \right]$  y  $R_a = 0,1661 \left[ \frac{\text{s}}{\text{kg}} \right]$ .

### 7.2 Respuesta experimental con el controlador IDA-PBC modificado

La respuesta experimental del sistema IDA-PBC no fue del todo satisfactoria, presentando un error grande en estado estacionario, por lo que es conveniente añadir la acción de control integral propuesta en (Rodríguez *et al.*, 2000), de la forma,

$$v(x, t) = u(x) - k_i \int_0^t g^T \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) d\tau \quad (26)$$

donde  $x = [\lambda \ \theta \ \mathcal{M}]$ ,  $u(x)$  es la ley de control IDA-PBC; y el segundo término representa la acción integral adicional a la ley de control (Ortega *et al.*, 2001), con  $k_i$  definida como la ganancia integral en  $\left[ \frac{\text{V}}{\text{N-m-s}} \right]$ ,  $g^T = [1 \ 0 \ 0]$  en [Wb] y  $H_d(x)$  definida como la función de energía deseada en [N-m], la cual

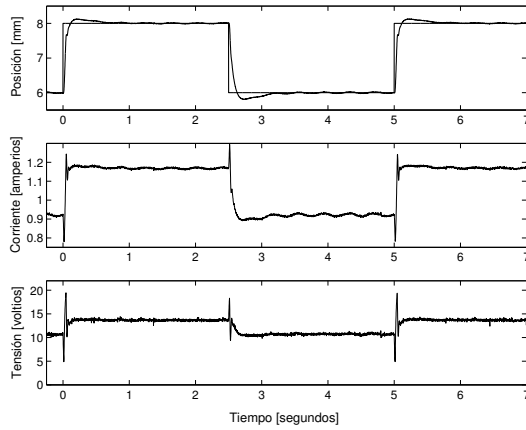


Figura 9. Respuesta experimental del controlador PID.

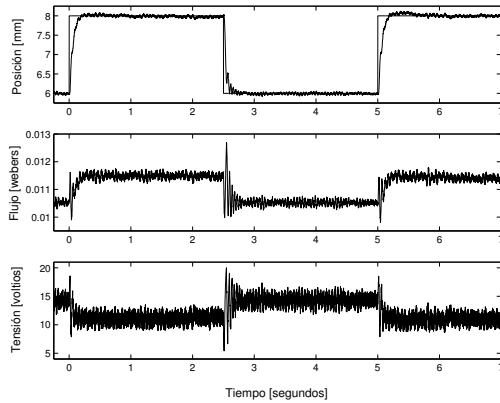


Figura 10. Respuesta experimental del controlador IDA-PBC modificado.

es escogida para asignar el punto de equilibrio en la posición deseada y satisfacer las condiciones de estabilidad requeridas en (Ortega *et al.*, 2001). La sintonización de  $k_i$  se llevó a cabo de forma experimental, obteniéndose un tiempo de respuesta lo suficientemente rápido. La sintonización se ajustó en  $k_i = 15 \left[ \frac{V}{N-m-s} \right]$ . Los resultados experimentales del sistema de control se muestran en las gráficas de la Figura 10, donde se observa que el error de posición tiende a cero. Por lo que claramente la acción integral mejoró el desempeño de este controlador.

## 8. DISCUSIÓN COMPARATIVA

En los experimentos de control lineal e IDA-PBC modificado se resalta la importancia de la acción integral en el lazo de control para reducir la magnitud del error en estado estacionario, mientras que el amortiguamiento del estado transitorio es producido por la realimentación de velocidad, la cual es necesaria para la estabilización de la posición, mientras que el lazo de control interno de corriente produce una variación suave de la corriente del electromagneto. En contraste, el control lógico borroso no requiere para este sistema de una acción integral externa para reducir el error en estado estacionario, esto debido a la naturaleza variable de la acción de control borroso en función de los estados. Con el objeto de presentar una comparación justa del desempeño entre los cuatro controladores estudiados, hemos utilizado los índices de tiempo de establecimiento  $t_s$  y sobrepaso  $M_p$  en el transitorio de la respuesta experimental de posición, mientras que para el estado estacionario hemos usado una función de la medida del error basada en la norma  $\mathcal{L}_2$  que

representa el error cuadrático medio en [mm], la cual pondera tanto errores positivos como negativos:

$$\mathcal{L}_2(\tilde{y}) = \sqrt{\frac{1}{T-t_1} \int_{t_1}^T \tilde{y}^2(t) dt}$$

donde  $T$  denota el tiempo final de experimentación y  $t_1$  el tiempo inicial de interés del estado estacionario, que en nuestro caso fue tomado de  $t_1 = 1$  [s] a  $T = 2$  [s]. Estos datos experimentales están resumidos en la Tabla 2. Note que en las Figuras 5, 7, 9 y 10,  $t = 0$  denota el tiempo inicial de grabación de datos.

Tabla2. Índices de desempeño.

Controlador	$t_s$ [ms]	$M_p$ [%]	$\mathcal{L}_2(\tilde{y}(t))$ [mm]
FLC	160	0	0,0071
PD	175	0	0,1642
PID	1000	6,3	0,0081
IDA-PBC	200	0	0,0293

Podemos apreciar que el controlador con menor tiempo de establecimiento ( $t_s = 160$  [ms]), sin sobrepaso ( $M_p = 0\%$ ) y con menor índice de error en estado estacionario ( $\mathcal{L}_2(\tilde{y}) = 0,0071$  [mm]), es el controlador lógico borroso (FLC). El controlador IDA-PBC modificado presenta una respuesta también bastante aceptable, con tiempo de establecimiento ( $t_s = 200$  [ms]), sin sobrepaso ( $M_p = 0\%$ ) y un índice de error en estado estacionario ( $\mathcal{L}_2(\tilde{y}) = 0,0293$  [mm]); sin embargo su respuesta de flujo y tensión es más ruidosa que en los demás controladores, esto es debido a que la medición del flujo magnético  $\lambda$  se realiza por estimación numérica. Otro controlador que presenta bajo error en estado estacionario (aún menor que en el IDA-PBC modificado  $\mathcal{L}_2(\tilde{y}) = 0,0081$  [mm]) es el PID, sin embargo presenta un ligero sobrepaso ( $M_p = 6,3\%$ ) y mayor tiempo de establecimiento que los controladores anteriores ( $t_s = 1000$  [ms]). Finalmente, como era de esperarse, el control PD tiene un mayor error en estado estacionario ( $\mathcal{L}_2(\tilde{y}) = 0,1642$  [mm]). Es preciso también poner en relieve el aspecto teórico que sustenta el comportamiento de la respuesta de los controladores estudiados. La sintonización de los controladores lineales está basada en la linealización del sistema no lineal alrededor del punto de operación. La sintonización del controlador IDA-PBC modificado, el cual es el único de los controladores estudiados que usa información de la dinámica no lineal del sistema para probar formalmente estabilidad asintótica del punto de equilibrio, está basada precisamente en el estudio de control basado en pasividad e interconexión y asignación de amortiguamiento para asegurar teóricamente que el error de posición tiende a cero. Por otra parte, debido a la naturaleza pasiva del controlador lógico borroso y del modelo dinámico no lineal del levitador, es de esperarse que el sistema en lazo cerrado sea estrictamente pasivo y que el error en estado estacionario converja a cero. Este estudio teórico del controlador FLC es un problema abierto que está siendo actualmente abordado por los autores.

En relación con el ruido presentado en las respuestas del controlador IDA-PBC modificado, es conveniente hacer notar que el equipo de suspensión magnética MAGLEV viene equipado con filtros para medición de las señales de interés, excepto en la medición del flujo magnético, el cual hemos estimado numéricamente para su uso en el controlador IDA-PBC modificado. Una manera de solucionar este problema sería incluir un sensor de flujo magnético en el equipo de prueba. Los controladores restantes no utilizan el flujo magnético como variable de estado,



ya que están basados en el modelo Lagrangiano (3) en lugar del modelo Hamiltoniano (4) usado en controlador IDA-PBC modificado.

## 9. CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó la comparación experimental de la respuesta de un sistema de control lógico borroso (FLC) con otros esquemas lineales de control, como el PD y PID, y con un esquema de control no lineal basado en la técnica de pasividad, interconexión y asignación de amortiguamiento IDA-PBC. Los resultados experimentales muestran claras ventajas en el desempeño de las respuestas del controlador borroso sobre los restantes; esto debido a la naturaleza no lineal en los estados de este controlador. El controlador IDA-PBC modificado, presenta un buen desempeño, teniendo a su favor un respaldo teórico formal de estabilidad asintótica, sin embargo añade ruido a la respuesta. El PID presenta menor error en estado estacionario que el IDA-PBC modificado, pero su tiempo de establecimiento es mayor. Finalmente, como era de esperar, el PD es el que presenta el más bajo desempeño de los controladores estudiados. Vale la pena resaltar que además de la agradable simplicidad de la estructura lineal del controlador PID su respuesta es bastante aceptable en comparación con los controladores no lineales estudiados en este trabajo. La formalización del análisis de estabilidad del controlador lógico borroso (FLC) aplicado a un sistema de levitación magnética es un tema abierto de investigación.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado por CONACYT y DGEST.

## REFERENCIAS

- Andújar J. M., A. J. Barragán, J. Córdoba and I. Fernández (2006). Diseño de Sistemas de Control Borroso: Modelado de la Planta. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* **3**(1), 75–81.
- Andújar J. M., A. J. Barragán, M. E. Gegúndez and M. Maestre (2007). Control Borroso Multivariable Basado en Heurística. Un Caso Práctico: Grúa Porta Contenedores, *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* **4**(2), 81–89.
- Ariño C., A. Sala and J. L. Navarro (2007). Diseño de Controladores en Varios Puntos de Funcionamiento para una Clase de Modelos Borrosos Takagi-Sugeno Afines. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* **4**(2), 98–105.
- Basil M., F. Matia and A. Jiménez (2005). Controladores Borrosos Basados en Estructura Variable con Modos Deslizantes: Aspectos y Similitudes. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* **2**(1), 19–35.
- Basil M., F. Matia and A. Jiménez (2007). Análisis de Estabilidad de Sistemas Borrosos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* **4**(2), 7–25.
- Bukley J. J. (1989). Fuzzy Controller Theory: Limit Theorems for Linear Fuzzy Control Rules. *Automatica* **25**(3), 469–472.
- Calcev G. (1998). *Some Remarks on the Stability of Mamdani Fuzzy Control Systems*. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**(3), 436–442.
- Fitzgerald, A. E., Ch. Kingsley Jr. and A. Kusko (1971). *Electric Machinery*. Third Edition.
- Goethem, J. V., F. Weber and G. Henneberger (2002). Fuzzy Control of Magnetic Levitation System for a Linear Drive and Comparison with a State Control. *The 17th International Conference on Magnetically Maglev'2002*. PP08103.
- Kelly R., R. Haber, R. E. Haber and F. Reyes (1999). Lyapunov stable control of robot manipulators: A fuzzy self-tuning procedure. *Intelligent Automation and Soft Computing* **5**(4), 313–326.
- Lewis F. L. and K. Liu (1995). Towards a Paradigm for Fuzzy Logic Control. *Automatica* **32**(2), 167–181.
- Llama M. A., R. Kelly, and V. Santibáñez (2000). Stable computed-torque control of robot manipulators via fuzzy self-tuning. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B* **30** (1), 143–150.
- Lozano, R., B. Brogliato, O. Egeland and B. Maschke (2000). *Dissipative systems analysis and control*. Springer-Verlag London.
- Mamdani, E. H. (1974). Applications of Fuzzy Algorithms for Control of Simple Dynamic Plant. In *Proc. IEE* **121**(12), 1585–1588.
- Matia F., A. Jimenez, R. Galán and F. Sanz (1992). Fuzzy controllers: Lifting the linear-nonlinear frontier. *Fuzzy Sets and Systems* **52**(2), 113–128.
- Ortega, R., A. J. van der Schaft, I. Mareels and B. Maschke (2001). Putting Energy Back in Control. *IEEE Control Systems Magazine* **21**(2), 18–33.
- Passino K. M. and S. Yurkovich (1998). *Fuzzy Control*. Addison-Wesley.
- Quanser Consulting Magnetic Levitation (MagLev) (2003). *Instructor Manual, Specialty Experiment: PIV-plus-Feedforward Control*. Quanser Innovate Educate.
- Rodríguez H., R. Ortega, and H. Siguerdidjane (2000). Experimental comparison of Linear and Nonlinear Controllers for a Magnetic Suspension. In: *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Control Applications*. Anchorage, Alaska (USA). September. pp. 715–719.
- Santibáñez, V., R. Kelly, and M. Llama (2001). Interpretación de Controladores Lógicos Difusos desde un Punto de Vista de Control Automático. *Memorias del 3<sup>er</sup> Congreso Mexicano de Robótica*. Santiago de Querétaro, Querétaro (México). Septiembre. pp. 132–143.
- Santibáñez V., R. Kelly and M. A. Llama (2004). Global Asymptotic Stability of a Tracking Sectorial Fuzzy Controller for Robot Manipulators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B* **34**(1), 710–718.
- Santibáñez V., R. Kelly and M. A. Llama (2005). A Novel Global Asymptotic Stable Set-Point Fuzzy Controller with Bounded Torques for Robot Manipulators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **13**(3), 362–372.
- Wang (1997). *A Course in Fuzzy Systems and Control*. Prentice-Hall PTR.
- WinCon 4.1 Quanser Consulting (2003). *User's Guide*. Quanser Innovate Educate.
- Woodson, H. H. and J. R. Melcher (1968). *Electromechanical Dynamics*. New York: Wiley.
- Yang, S. H., Y. T. Kim, D. O. Kong, Z. Bien, H. K. Zung, I. K. Kim, and J. S. Lee (1998). Multi-Objective Fuzzy Controller for Linear Motor Propulsion of MagLev Train. *The Second international Symposium of Linear Drives for Industry Applications*. Tokyo (Japan). April.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control* **8**, pp. 338–353.