

# Reajuste de los parámetros de la impedancia mecánica para la mejora de la disipación de la energía durante el impacto

Ranko Zotovic Stanisic, Ángel Valera Fernández

*Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, 46022, Valencia, España,  
(e-mails: [rzotovic@isa.upv.es](mailto:rzotovic@isa.upv.es), [giuprog@isa.upv.es](mailto:giuprog@isa.upv.es))*

**Resumen:** El impacto es la parte más peligrosa de una tarea con contacto. Su duración es muy breve por lo que es necesario un control extremadamente rápido. Durante el impacto, la energía cinética del robot adquirida en movimiento libre se transforma en potencial elástica y viceversa. Este artículo propone la comutación de los parámetros de la impedancia mecánica de forma a aumentar la disipación de la energía del sistema y, de esta forma, suavizar el impacto. Copyright © 2009 CEA.

**Palabras Clave:** Impacto, impedancia, brazos robot, control de robots, energía.

## 1. INTRODUCCIÓN

Possiblemente el mayor problema cuando se aborta del control de fuerza mediante robots manipuladores sea el cambio abrupto de la fase de movimiento libre a la de movimiento restringido. La transición de una fase a la otra, también llamada impacto, puede ser considerada como la cuestión más crítica de la tarea, puesto que la diferencia en la dinámica del sistema durante las dos fases es trascendental. Esto queda enfatizado por el hecho de que en las aplicaciones industriales típicas el entorno suele ser muy rígido, provocando que el sistema sea altamente subamortiguado con elevadas frecuencias de oscilación.

De esta forma, durante el impacto pueden tener lugar altos picos de fuerza, lo que puede provocar en el peor de los casos daños irreversibles al robot, al entorno o a la herramienta. En el mejor de los casos, los picos menores de fuerza deterioran gradualmente la mecánica del robot.

Además de los picos de fuerza, otro problema relacionado con el impacto es la posibilidad de que aparezcan rebotes, en los cuales la herramienta del robot pierde momentánea y repetidamente el contacto con la superficie del entorno.

Si las características del entorno fueran conocidas, estos inconvenientes se podrían evitar diseñando un regulador sobreamortiguado. Por desgracia, generalmente éste no es el caso. Así, los parámetros seleccionados originalmente para el regulador pueden ser inapropiados y puede requerir algún cambio en dichos parámetros si el sistema tiene una respuesta subamortiguada al realizarse el contacto. Un problema adicional del control del impacto es su duración extremadamente breve, de pocos períodos de muestreo. Como consecuencia, un control adaptativo, por ejemplo, puede ser demasiado lento para proteger el sistema.

Algunos autores proponen la aplicación de un controlador cuyo único fin sea tratar de suavizar del impacto y que sería aplicado solamente durante la fase transitoria. Su objetivo no sería el seguimiento de un valor de referencia, sino la disipación rápida

de la energía del sistema. Una vez acabada la transición el controlador debería ser reemplazado por otro para poder alcanzar la referencia de fuerza.

El control de impacto ha sido investigado ampliamente y se han propuesto diversas soluciones. La recopilación más extensa de diferentes fuentes, junto con un análisis exhaustivo ha sido realizado (Brogliato 1999). Cabe resaltar que el impacto existen dos modelos: el impacto rígido y el flexible (Brach 1991, Brogliato 1999). El primero no toma en consideración lo que está ocurriendo durante el propio impacto, sino lo que pasa antes y después. Se asume que la duración del impacto es infinitamente breve, de forma que la relación entre las velocidades antes y después del contacto viene dada por el coeficiente de restitución. En el caso del modelo flexible, el impacto se trata de forma analítica, considerando el robot y/o el entorno como cuerpos elásticos. Este es el modelo que ha sido considerado y utilizado en este artículo.

Existen métodos muy diversos de control de impacto. En cuanto al modelo rígido se han propuesto dos métodos que limitan el número de rebotes asegurando así la estabilidad del sistema (Brogliato et al. 1997). Sin embargo, la mayoría de los estudios se basan en el modelo flexible. (Volpe y Khosla, 1993) propusieron tres métodos para el control de impacto. Los tres están diseñados para evitar la pérdida de contacto, pero no tratan la protección contra los picos de fuerza. (Hyde y Cutkosky, 1993) propusieron una modulación en pulsos de la prealimentación. (Ferretti, et al., 1998) aplicaron durante el impacto una prealimentación determinada de forma empírica de forma a evitar las pérdidas de contacto.

De las citadas fuentes se puede deducir que las técnicas de control de impacto varían ampliamente y no utilizan el mismo modelo. Algunas están dedicadas a evitar las pérdidas de contacto sin tener en cuenta los posibles picos de fuerza. Otras están limitadas a garantizar la convergencia del sistema después de un número finito de rebotes. Algunas consideran que las características del entorno son conocidas.

Cabe resaltar que la aplicación de un regulador solamente para el impacto implica la necesidad de otro controlador para seguir la

referencia de fuerza, lo que implica la necesidad de comutar entre dos reguladores. Esto puede crear problemas como la pérdida de estabilidad (aunque ambos controladores de por sí sean estables) o la aparición de regímenes deslizantes.

Como alternativa a la conmutación de controladores, se ha introducido el control por impedancia mecánica (Hogan, 1985). El propósito de este método no es el seguimiento de una referencia, sino la imposición de la dinámica (habitualmente de segundo orden) deseada al sistema.

Como se demostrará en el artículo más adelante, el controlador por impedancia mecánica se trata en realidad de un control por posición, velocidad o aceleración. Por esta razón, éste es adecuado para el movimiento libre. En cuanto al movimiento restringido, en la bibliografía, por ejemplo (De Schutter 1997), se afirma que es necesario conocer las características del entorno (mecánicas y geométricas) para alcanzar el valor de referencia de fuerza. Además, relacionado con la transición entre el movimiento libre y el restringido, los parámetros del sistema se pueden tratar de ajustar de forma que el sistema tenga un comportamiento sobrearmortiguado si las características del entorno son conocidas, lo que podría amortiguar el impacto.

Sin embargo en las aplicaciones reales, generalmente las características del entorno son desconocidas, por lo que es necesario introducir medidas adicionales para el control de impacto. En este artículo se propone la conmutación de los parámetros de la impedancia de forma que trate de disipar la energía del sistema con la mayor rapidez posible.

La variación de los parámetros del regulador en función del estado ha sido estudiada con anterioridad. Una recopilación de diferentes fuentes se puede encontrar en (Armstrong, *et al.*, 2006). Posiblemente la primera contribución importante sea la de (Franke, 1981). Sin embargo, (Xu, Hollerbach y Ma, 1995) han sido los primeros en introducir la variación de los parámetros en el control de fuerza al proponer un regulador PD no lineal. Tanto la constante proporcional como la derivativa variaban entre un valor mínimo y un valor máximo según una ley no lineal que consideraba los signos del error de fuerza y su derivada. (Seraji y Colbaugh, 1997) y (Seraji, 1998) propusieron técnicas de control de impacto con variación de parámetros.

La conmutación de parámetros ha sido introducida en el control de fuerza por (Armstrong, McPerson y Li, 1997), (Armstrong, Neevel y Kusik, 2001) y (Arsmstrong, *et al.*, 2006) en un análisis similar al de este artículo. Los autores comutan la matriz de ganancias en función del estado del sistema. La idea esencial es la misma pero la metodología matemática es diferente. En los trabajos de Armstrong se han utilizado LMIs para demostrar la validez del método. La técnica funciona bien mientras que la diferencia entre los parámetros no excede un valor, que además debe ser encontrado empíricamente que debía ser encontrado empíricamente. Una ventaja del método descrito en el presente artículo es que no requiere ajustes empíricos. Como se explicará posteriormente, no se limitan los valores de los parámetros y cuantos más extremos son, mejores son las prestaciones.

Algunas aportaciones con conmutación de parámetros en las tareas con contacto han sido publicadas por los autores de este artículo (Zotovic, Valera y García, 2005), (Zotovic y Valera, 2008) o (Zotovic y Valera, 2009).

Este artículo propone el control de impacto comutando los parámetros del controlador para disipar lo más rápidamente posible la energía del sistema, reduciendo así tanto los picos de fuerza como la posibilidad de pérdidas de contacto. Por consiguiente es una mejora con respecto a los métodos previamente enumerados puesto que en ellos contemplaba únicamente las pérdidas de contacto.

El método que se propone en este artículo aumenta siempre la disipación de la energía independientemente de las características del entorno, mejorando así los métodos que necesitan la identificación del entorno o se ajustan a él de forma empírica.

El método más parecido al de este artículo es el propuesto por (Armstrong, McPerson y Li, 1997), (Armstrong, Neevel y Kusik, 2001) y (Arsmstrong, *et al.*, 2006). Sin embargo, existen algunas diferencias aparte de la metodología matemática. Armstrong comuta todos los parámetros a la vez, mientras que los autores de este artículo estudian cada uno por separado, demostrando que algunos no se deben comutar. Además, Armstrong no tiene en cuenta que la conmutación de algunos parámetros puede modificar el punto de equilibrio del sistema, por lo que en algunos casos pierde la estabilidad y está obligado a limitar los valores de los parámetros de forma empírica.

El artículo está organizado de la siguiente forma: el segundo apartado está dedicado a la definición y a la aclaración de la noción de la impedancia mecánica. El tercer apartado explica el modelo dinámico de un brazo robot así como la manera de desacoplar el sistema en diferentes direcciones cartesianas. De esta forma, en lugar de tratar un sistema multivariable no lineal y altamente acoplado, se obtienen seis sistemas lineales desacoplados. Esto permite realizar en el resto del artículo el análisis del caso de un grado de libertad sin perder la generalidad. En el cuarto apartado se deducen algunas ecuaciones describiendo la dinámica del sistema, los valores finales, etc. Estos resultados serán utilizados posteriormente en el artículo. El quinto apartado explica la transformación de la energía cinética en energía potencial y el efecto de los parámetros y su conmutación. El sexto apartado está dedicado a la deducción de los criterios de conmutación de cada uno de los parámetros de forma a maximizar la disipación de la energía del sistema. Los resultados teóricos están verificados mediante simulaciones. El séptimo apartado propone una mejora del anterior, reajustando los parámetros, de forma a lograr que el sistema se haga sobrearmortiguado en pocas conmutaciones. El octavo apartado explica el efecto del ruido sobre el comportamiento del sistema. El último apartado resume las conclusiones del artículo.

Cabe resaltar que en este artículo se ha considerado el caso cuando la posición del entorno es positiva, es decir si la velocidad del robot es positiva, está penetrando en el entorno, y si es negativa está rebotando. El caso contrario es completamente simétrico.

## 2. DEFINICIÓN DE LA IMPEDANCIA MECÁNICA

Como se ha comentado anteriormente, el control de fuerza por impedancia mecánica activa (Hogan, 1985), también denominado implícito, es una estrategia de control adecuada tanto para el movimiento libre como el restringido. La

impedancia mecánica relaciona la fuerza que actúa sobre un cuerpo con su movimiento. Se considera que el cuerpo opone a la fuerza externa fuerzas de inercia, amortiguamiento y rigidez. La definición de la impedancia mecánica es:

$$Z(s) = \frac{F(s)}{v(s)} = \frac{Ms^2 X + BsX + KX}{sX} = Ms + B + \frac{K}{s} \quad (1)$$

donde  $Z$  es la impedancia,  $F$  la fuerza,  $v$  la velocidad,  $X$  la posición,  $M$  la masa,  $B$  el amortiguamiento y  $K$  la rigidez del sistema.

El propósito del control por impedancia es imponerle al sistema las características deseadas, es decir la masa, el amortiguamiento y la rigidez. Los valores naturales de cada una de estas magnitudes se suelen denominar *pasivos*. Los añadidos por el control se denominan *activos*. Los resultantes de los dos *equivalentes*.

Durante el movimiento restringido, el objetivo principal del control por impedancia no es seguir una referencia de fuerza o de posición, sino hacer que el proceso tenga el comportamiento dinámico deseado. Por esta razón se llama también control implícito de fuerza, dado que ésta no se controla directamente.

Variando los parámetros de la impedancia mecánica del brazo es posible controlar la interacción con el entorno. Como es evidente, el efecto de cada uno de los parámetros es intuitivo, lo que aporta una ventaja adicional a esta forma de control. Cabe resaltar que un problema del control de fuerza reside en el hecho de que se ha de realizar el contacto con diferentes materiales. Esto suele implicar la necesidad de reajustar los parámetros del regulador para cada caso, lo que complica considerablemente la aplicación del control de fuerza, especialmente si se tiene en cuenta que los operadores de robots en la industria típicamente no suelen tener los conocimientos suficientes para diseñar un regulador. Con el control implícito en cambio, el sentido de los parámetros como la masa, el amortiguamiento y la rigidez es completamente intuitivo y no requiere conocimiento teórico de control. El usuario puede ajustar los parámetros según su experiencia y el sentido común para cada caso.

Sin embargo, la principal ventaja del control por impedancia con respecto al control explícito de fuerza reside en el hecho de que el mismo regulador puede ser utilizado tanto para la fase de movimiento libre como la de movimiento restringido. Esto es posible gracias al hecho que los reguladores de impedancia activa, si la fuerza de interacción es nula (es decir en movimiento libre), se reducen a controladores de posición, velocidad o aceleración. De hecho, la forma más sencilla de implementar el control implícito es como control de posición puro. La principal limitación del control implícito de fuerza reside en el hecho de que éste no garantice que se pueda alcanzar la referencia de fuerza.

El control por impedancia ha sido utilizado, por ejemplo, en tareas de montaje donde no se requiere un control preciso de fuerza. El ejemplo más típico es la inserción de un objeto en un

agujero. También se utiliza para el control de los robots teleoperados que entran en contacto con el entorno. Estas aplicaciones son adecuadas para el control por impedancia puesto que requieren, más que un seguimiento de la referencia de fuerza, un determinado comportamiento del sistema.

### 2.1. Formulaciones para la impedancia mecánica

Diferentes autores han utilizado diversas formulaciones para la impedancia mecánica activa. Las más comunes (Volpe y Khosla 1993), (Seraji y Colbaugh, 1997) son:

$$\begin{aligned} F_{ext} &= M_d(\ddot{x} - \ddot{x}_{ref}) + B_d(\dot{x} - \dot{x}_{ref}) + K_d(x - x_{ref}) \\ F_{ext} &= M_d\ddot{x} + B_d\dot{x} + K_d(x - x_{ref}) \\ F_{ext} &= M_d\ddot{x} + B_d(\dot{x} - \dot{x}_{ref}) + K_d(x - x_{ref}) \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $F_{ext}$  es la fuerza exterior que actúa sobre el robot,  $M_d$ ,  $B_d$ , y  $K_d$  la masa el amortiguamiento y la rigidez que se quieren imponer al sistema,  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$ , la posición, velocidad y aceleración del robot respectivamente, y  $x_{ref}$ ,  $\dot{x}_{ref}$ ,  $\ddot{x}_{ref}$ , los valores de referencia de la posición, velocidad y aceleración.

Las dos últimas formulaciones son casos especiales de la primera. Ésta se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F_{ext} &= M_d\ddot{x} + B_d\dot{x} + K_dx - (M_d\ddot{x}_{ref} + B_d\dot{x}_{ref} + K_dx_{ref}) = \\ &= M_d\ddot{x} + B_d\dot{x} + K_dx - ff \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $ff$  es la prealimentación.

## 3. IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROL POR IMPEDANCIA MECÁNICA Y DESACOPLO DEL SISTEMA

En este apartado se va a realizar la descripción del modelo utilizado para la deducción de las ecuaciones. Éste consiste en el proceso físico y el regulador. El proceso físico tiene dos elementos: el robot y el entorno. Se ha considerado un robot rígido sin deformación elástica.

En cuanto al regulador, tiene dos funciones. La primera es el desacoplamiento del sistema, de forma que se pueda considerar como monovariable y lineal en cada dirección. La segunda función es el conseguir la dinámica del sistema requerida

Cabe resaltar que las letras mayúsculas serán utilizadas para las magnitudes de seis grados de libertad (vectores y matrices), mientras que las letras minúsculas serán utilizadas para el caso de un grado de libertad (escalares).

### 3.1 La dinámica del robot

El modelado dinámico de brazos robóticos es un tema muy tratado y ha sido publicado en múltiples ocasiones, por ejemplo, (Sciavicco y Siciliano, 1996). A pesar de ello, en aras a favorecer la claridad del artículo, a continuación se va a presentar una breve descripción de éste. Asumiendo que una

fuerza externa está actuando sobre el efecto final del robot, la dinámica del mismo queda descrita por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{T} - \mathbf{J}^T(Q)\ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{H}(Q, \dot{Q}) + \mathbf{G}(Q) \quad (4)$$

donde  $\mathbf{T}$  es el vector de pares de los motores,  $\mathbf{J}(Q)$  la matriz Jacobiana del robot,  $\mathbf{F}$  el vector de fuerzas externas,  $Q$  el vector de posiciones de las articulaciones,  $\dot{Q}$  el vector de velocidades de las articulaciones,  $\ddot{Q}$  el vector de aceleraciones de las articulaciones,  $D(Q)$  es la matriz de inercia del robot,  $H(Q, \dot{Q})$  la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $G(Q)$  el vector de pares de gravedad sobre los motores.

La dinámica también se puede expresar en el espacio cartesiano:

$$\mathbf{F}_\tau - \mathbf{F} = \mathbf{B}(X)\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}(X, \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{L}(X) \quad (5)$$

donde  $X$ ,  $\dot{X}$  y  $\ddot{X}$  son los vectores de posición, velocidad y aceleración del efecto final en coordenadas Cartesianas,  $F_\tau$  es el vector de pares de los motores transformado a coordenadas cartesianas,  $B(X)$  la matriz de pseudo-inercias en el espacio de la tarea,  $C(X, \dot{X})$  el vector de pares de centrifugos y de Coriolis en el espacio de la tarea y  $L(X)$  el vector de pares de gravedad en el espacio de la tarea.

Los términos de (5) son definidos por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{J}^T(Q)\mathbf{F}_\tau \\ \mathbf{B}(X) &= (\mathbf{J}\mathbf{D}^{-1}(Q)\mathbf{J}^T)^{-1} \\ \mathbf{C}\dot{X} &= \mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{H}\dot{Q} - \mathbf{B}\mathbf{J}\dot{Q} \\ \mathbf{L}(X) &= \mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{G} \end{aligned} \quad (6)$$

### 3.2 El control

Existen varias formas de implementar el control por impedancia. Las dos más comunes son mediante la realimentación del estado y mediante la dinámica inversa (Sciavicco y Siciliano, 96). La primera forma tiene la ventaja de que es más sencilla y que no necesita un sensor de fuerza. Sin embargo no es adecuada para más de un grado de libertad. Por esta razón se utilizará la segunda forma.

El propósito del regulador por dinámica inversa es obtener la dinámica requerida (equivalente a la ecuación (3)), pero de forma independiente para cada dirección. Así, el regulador se compone de dos partes. La primera, que compensa la dinámica del robot y desacopla el sistema, es bien conocida y se ha utilizado a menudo para el control de robots, por ejemplo, (Volpe y Khosla, 1993). La segunda parte del controlador se encarga de imponer la dinámica requerida.

Para desacoplar el sistema, el vector de pares de los motores en coordenadas cartesianas debe ser:

$$\mathbf{F}_\tau = \mathbf{B}(X)\ddot{\mathbf{X}}_d + \mathbf{C}(X, \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{L}(X) + \mathbf{F} \quad (7)$$

donde  $\ddot{\mathbf{X}}_d$  es el vector de aceleraciones deseadas.

Para obtener una dinámica equivalente a (3) en cada dirección, se debe asignar el siguiente valor a la aceleración deseada:

$$\ddot{\mathbf{X}}_d = \mathbf{I}_d^{-1}(\mathbf{FF} + \mathbf{F} - \mathbf{B}_d \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{K}_d \mathbf{X}) \quad (8)$$

donde  $\mathbf{I}_d$  es la matriz de inercias deseadas, y debe ser diagonal para obtener un sistema desacoplado.  $\mathbf{FF}$  es el vector de prealimentaciones,  $\mathbf{B}_d$  y  $\mathbf{K}_d$  son las matrices de amortiguamientos y rígideces deseadas respectivamente (ambas diagonales).

De esta forma, se obtiene un sistema desacoplado en coordenadas cartesianas. Esto permite realizar el control en cualquier dirección independientemente de las demás. Por consiguiente, el análisis hecho para un grado de libertad es válido para seis. Por esta razón, en adelante se procederá al análisis del caso de un grado de libertad sin perder la generalidad.

## 4. COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL SISTEMA

En este apartado se va a realizar un breve análisis de la dinámica del sistema durante la fase de movimiento restringido. También se van a deducir los valores de los estados en régimen permanente. Estos pasos son necesarios para el análisis realizado en los apartados posteriores.

Se supone una fuerza de reacción del entorno de primer orden:

$$f = -K_e(x - x_e) - B_e \dot{x} \quad (9)$$

donde  $K_e$  y  $B_e$  son la rigidez y el amortiguamiento del entorno y  $x_e$  su posición. Substituyendo la ecuación (9) en (3):

$$\mathbf{ff} + \mathbf{K}_e \mathbf{x}_e = \mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{B}_d + \mathbf{B}_e) \dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K}_d + \mathbf{K}_e) \mathbf{x} \quad (10)$$

La dinámica del sistema en el dominio de Laplace es:

$$X(s) = \frac{\mathbf{ff} + \mathbf{K}_e \mathbf{x}_e}{\mathbf{M}_d s^2 + (\mathbf{B}_d + \mathbf{B}_e)s + (\mathbf{K}_d + \mathbf{K}_e)} \quad (11)$$

Se pueden deducir posiciones y fuerzas en régimen permanente para los diferentes casos:

$$x_\infty = \frac{\mathbf{ff} + \mathbf{K}_e \mathbf{x}_e}{\mathbf{K}_d + \mathbf{K}_e} \quad (12)$$

La ecuación característica del sistema es:

$$\mathbf{M}_d s^2 + (\mathbf{B}_d + \mathbf{B}_e)s + \mathbf{K}_d + \mathbf{K}_e = 0 \quad (13)$$

por lo que el comportamiento del sistema depende de las características del entorno y no solo de los parámetros de la impedancia mecánica. De lo contrario sería trivial lograr que el sistema fuera sobreamortiguado, evitando así los picos de fuerza y la necesidad de aplicar un control de impacto. Las raíces del polinomio característico estarán en:

$$s_{1,2} = \frac{-B_{TOT} \pm \sqrt{B_{TOT}^2 - 4K_{TOT}M_d}}{2M_d} \quad (14)$$

donde  $B_{TOT}$  es el amortiguamiento total, es decir la suma del amortiguamiento del robot y el del entorno. De la misma forma,  $K_{TOT}$  la rigidez total del sistema, suma de la del robot y la del entorno.

## 5. DISIPACIÓN DE LA ENERGÍA MEDIANTE LA CONMUTACIÓN DE PARÁMETROS

El propósito de este apartado es la explicación de la aplicación de la conmutación de los parámetros a la disipación de la energía del sistema, así como la indicación de algún problema que puede ocurrir.

Como ejemplo se va a utilizar un sistema de segundo orden (como la impedancia mecánica). Se va suponer que es un sistema conservativo, sin pérdida de energía, en el que la energía cinética se transforma en potencial y viceversa. Se va a utilizar la representación mediante diagramas de fase puesto que de esta forma los resultados obtenidos son representados de una forma bien clara e intuitiva. Se va a suponer que la conmutación de parámetros no modifica el punto de equilibrio del sistema.

La energía del sistema en este caso es constante y es la suma de la energía cinética y la potencial:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (15)$$

Esto representa una elipse en el plano de fase. Los puntos de intersección con los ejes de abscisas y ordenadas serán respectivamente:

$$\begin{aligned} x(\dot{x}=0) &= \pm\sqrt{\frac{2E}{K}} \\ \dot{x}(x=0) &= \pm\sqrt{\frac{2E}{m}} \end{aligned} \quad (16)$$

Dependiendo de si es mayor la rigidez o la masa, la elipse tendrá la forma representada en la Figura 1 o en la Figura 2.

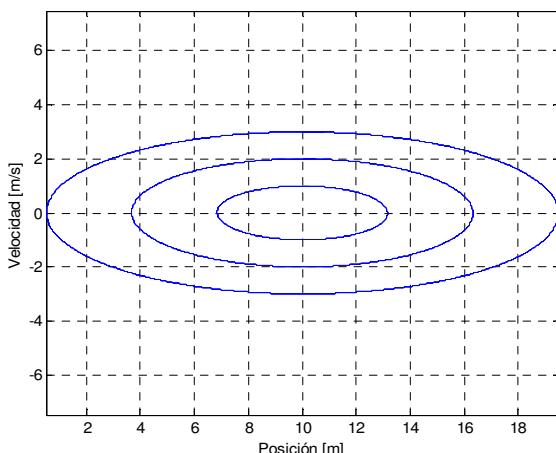


Figura 1. Tres superficies equipotenciales de un sistema sin amortiguamiento con masa elevada y rigidez baja.

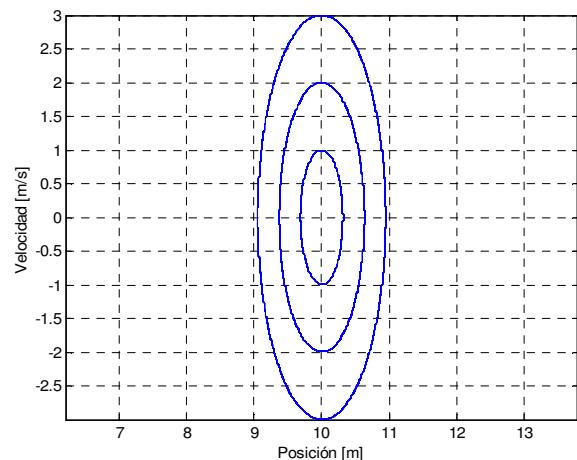


Figura 2. Tres superficies equipotenciales de un sistema sin amortiguamiento con poca masa y rigidez elevada.

Si se utilizase una mayor masa en el primer y en el tercer cuadrante, y una mayor rigidez en el segundo y el cuarto, el sistema convergería más rápido y los picos serían menores.

Llamando  $\Sigma_1$  al sistema de los cuadrantes pares y  $\Sigma_2$  al de los impares y suponiendo que en el segundo y en el cuarto cuadrante la masa y la rigidez del sistema son respectivamente  $m_{max}$  y  $k_{min}$ . Suponiendo también que en el primer y tercer cuadrante son  $m_{min}$  y  $k_{max}$ , siendo:

$$m_{max} > m_{min}, \quad k_{max} > k_{min} \quad (17)$$

De esta forma los parámetros de la impedancia comutan según el cuadrante. La Figura 3 muestra el diagrama de fase del sistema. Se asume que el sistema parte del punto  $(0, 0.1)$  marcado con  $X_0$ . Las partes de la curva en línea a tramos corresponden a  $\Sigma_1$  y las en línea llena a  $\Sigma_2$ . La secuencia de activación de  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  está marcada con números de 1 a 5.

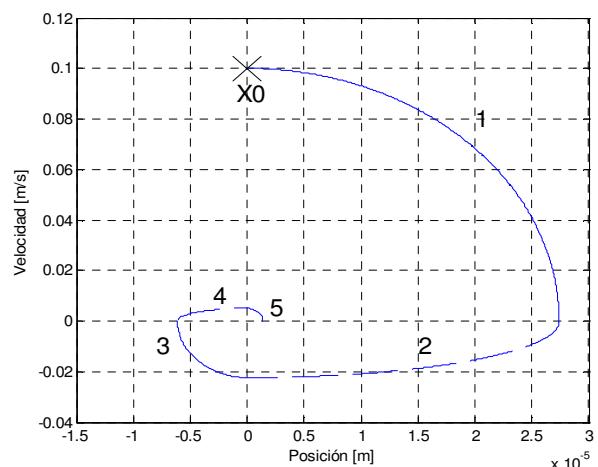


Figura 3. Diagrama de fase del sistema con conmutación de parámetros.

La energía total del sistema en el primer y tercer cuadrante será:

$$E_{13} = \frac{1}{2}m_{min}v^2 + \frac{1}{2}k_{max}x^2 \quad (18)$$

En el segundo y en el cuarto cuadrante será:

$$E_{24} = \frac{1}{2}m_{\max}v^2 + \frac{1}{2}k_{\min}x^2 \quad (19)$$

Si se supone que el robot penetra en el entorno en el segundo cuadrante con la energía inicial de  $E_0$ . Cabe resaltar que el comportamiento del sistema, es decir la ellipse en la que va estar, viene definida por su energía. En el instante del impacto la energía es puramente cinética. Por esta razón depende de la velocidad y no de la posición del punto del contacto.

La velocidad al cortar el eje de ordenadas será:

$$\dot{x}_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m_{\max}}} \quad (20)$$

Si se efectúa la conmutación en este instante, la energía del sistema pasa a ser:

$$E_1 = \frac{1}{2}m_{\min}\dot{x}_0^2 = \frac{m_{\min}}{m_{\max}}E_0 < E_0 \quad (21)$$

La siguiente conmutación tiene lugar al intersectar el eje de abscisas. Esto ocurre en la coordenada:

$$x_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{k_{\max}}} \quad (22)$$

Si ahora se vuelve a conmutar, la energía del sistema será:

$$E_2 = \frac{1}{2}k_{\min}x_1^2 = \frac{k_{\min}}{k_{\max}}E_1 < E_1 \quad (23)$$

Dada la simetría y repetitividad del sistema, se puede generalizar:

$$E_k < E_{k-1} \quad (24)$$

Tomando la propia energía como función candidata de Lyapunov, su incremento entre dos conmutaciones es siempre negativo, quedando con esto demostrada la convergencia asintótica del sistema.

Se puede deducir:

$$E_{2k} = \frac{k_{\min}}{k_{\max}}E_{2k-1} = \frac{k_{\min}}{k_{\max}}\frac{m_{\min}}{m_{\max}}E_{2k-2} = \dots = \left(\frac{k_{\min}}{k_{\max}}\frac{m_{\min}}{m_{\max}}\right)^k E_0 \quad (25)$$

$$E_{2k-1} = \frac{m_{\min}}{m_{\max}}\left(\frac{k_{\min}}{k_{\max}}\frac{m_{\min}}{m_{\max}}\right)^{k-1} E_0$$

Las coordenadas de intersección del eje de abscisas:

$$x_{2k-1} = \sqrt{\frac{2E_{2k-1}}{k_2}} = \sqrt{\frac{2\left(\frac{k_{\min}}{k_{\max}}\frac{m_{\min}}{m_{\max}}\right)E_{2k-3}}{k_2}} = \sqrt{\left(\frac{k_{\min}}{k_{\max}}\frac{m_{\min}}{m_{\max}}\right)}x_{2k-3} \quad (26)$$

Con lo que queda demostrado que el sistema intersecta el eje  $x$  cada vez más cerca del origen, lo que reduce la posibilidad de pérdida de contacto.

Se puede concluir que con la conmutación de impedancias se logran dos ventajas:

1. La sobreoscilación es menor.
2. La posibilidad de pérdidas de contacto también es menor.

Desafortunadamente, este modelo del sistema es idealizado. Un inconveniente es que en la realidad el añadir la rigidez activa modifica el punto de equilibrio del sistema según la ecuación (12). Por esta razón, el efecto de la conmutación es más complejo y hasta puede llevar a la pérdida de estabilidad. Un ejemplo se puede ver en la Figura 4. En ella se puede observar como el sistema parte del punto  $X_0$  (0,0,1) marcado con una cruz negra y  $X_0$ . Conmuta a  $\Sigma_1$  en los cuadrantes pares y a  $\Sigma_2$  en los impares. Los puntos de equilibrio de  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  están designados con una cruces marcadas con  $X_1$  y  $X_2$  respectivamente. Los diferentes tramos del sistema están numerados de 1 a 5. Lo que corresponden a  $\Sigma_1$  están representados con una línea a tramos y los que corresponden a  $\Sigma_2$  con una línea continua.

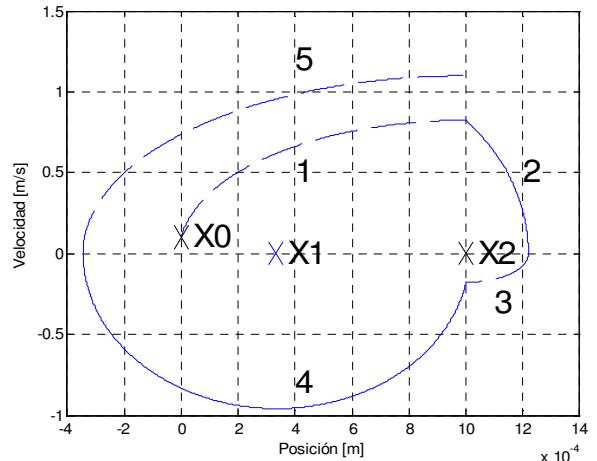


Figura 4. Ejemplo de pérdida de estabilidad.

Para evitar el peligro de pérdida de estabilidad puede ser conveniente omitir la modificación de la rigidez. En este caso sería simplemente la del entorno sea cual sea el cuadrante:

$$k_{\min} = k_{\max} = K_e \quad (27)$$

La energía del sistema en este caso se puede escribir:

$$E_{2k} = E_{2k-1} = \frac{m_{\min}}{m_{\max}}E_{2k-2} = \dots = \left(\frac{m_{\min}}{m_{\max}}\right)^k E_0 \quad (28)$$

$$E_{2k-1} = \frac{m_{\min}}{m_{\max}}E_{2k-2} = \left(\frac{m_{\min}}{m_{\max}}\right)^k E_0$$

Con lo que la estabilidad asintótica sigue vigente, aunque la convergencia sea más lenta.

Las intersecciones con el eje  $x$ :

$$x_{2k-1} = \sqrt{\frac{m_{\min}}{m_{\max}}} x_{2k-3} \quad (29)$$

Con lo que las pérdidas de contacto son más probables que si se conmuta también la rigidez, pero menos que si no hace ninguna conmutación.

## 6. CONMUTACIÓN DE PARÁMETROS DE LA IMPEDANCIA MECÁNICA

Las consideraciones anteriores han sido hechas para un sistema idealizado. Un sistema real conlleva dos factores nuevos:

- El punto de equilibrio cambia al conmutar de rigidez.
- El sistema contiene amortiguamiento.

A continuación se va a realizar el análisis del sistema teniendo en cuenta estos dos efectos.

Para estudiar la convergencia del sistema, se va a asumir la función candidata de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (x - x_{\infty})^2 \quad (30)$$

Su derivada será:

$$\dot{V} = \ddot{x}\dot{x} + \dot{x}(x - x_{\infty}) \quad (31)$$

Partiendo del comportamiento del sistema dado en la ecuación (10) se obtiene:

$$\ddot{x} = \frac{ff + K_e x_e - (B_d + B_e)\dot{x} - (K_d + K_e)x}{M_d} \quad (32)$$

Substituyendo (32) en (31) se obtiene:

$$\dot{V} = \frac{ff + K_e x_e - (B_d + B_e)\dot{x} - (K_d + K_e)x}{M_d} \dot{x} + \dot{x}(x - x_{\infty}) \quad (33)$$

Sustituyendo la expresión para  $x_{\infty}$  de (12):

$$\dot{V} = \frac{ff + K_e x_e - (B_d + B_e)\dot{x} - (K_d + K_e)x}{M_d} \dot{x} + \dot{x}\left(x - \frac{ff + K_e x_e}{K_d + K_e}\right) \quad (34)$$

A partir de este resultado, a continuación se va a proceder a obtener los criterios de conmutación para cada uno de los tres parámetros.

La función del control del impacto debe ser disipar la energía inicial del sistema tan rápidamente como sea posible. De esta manera, se amortiguan las oscilaciones, los picos de la fuerza son reducidos, el sistema se protege mejor y la posibilidad de rebotes se reduce.

La expresión (34) representa el ritmo del cambio de la energía. Con el fin de disipar la energía inicial del sistema tan rápidamente como sea posible, se debe diseñar el controlador para reducir  $\dot{V}$ . Por esta razón, el criterio para las condiciones óptimas de la conmutación será que la expresión (34) debe siempre ser tan pequeña como sea posible.

Cabe resaltar que como se trata de un sistema disipativo su energía total, representada por  $V$  siempre decrece. Sin embargo, se va transformando de una forma de energía a otra, por ejemplo de cinética a potencial y viceversa. Por esta razón en algunos momentos la derivada de la energía cinética puede ser positiva y, en otros puede ser que sea positiva la derivada de la energía potencial. Así, el objetivo de la conmutación es lograr que las formas de energía que en un momento dado estén creciendo, lo hagan lo más lento posible, y que las formas de energía que estén decreciendo lo hagan lo más rápido posible. De esta forma la energía total se disipa con mayor rapidez y se mejora el amortiguamiento del impacto.

A continuación se va a analizar la posibilidad de variar los parámetros de la impedancia para disipar la energía lo más rápido posible (es decir, para reducir  $\dot{V}$ ). Este artículo se limita al caso en el que los parámetros conmutan tan solo entre dos valores: el mínimo y el máximo. En las próximas subsecciones se va a estudiar la conmutación para cada uno de los parámetros.

### 6.1 Comutación de la masa

Para deducir los criterios de conmutación para la masa, se va a utilizar la derivada parcial de la derivada de la energía  $\dot{V}$  con respecto a la masa:

$$\frac{\delta \dot{V}}{\delta M_d} = -\frac{ff + K_e x_e - (B_d + B_e)\dot{x} - (K_d + K_e)x}{M_d^2} \dot{x} \quad (35)$$

Sustituyendo la ecuación (32) en (35):

$$\frac{\delta \dot{V}}{\delta M_d} = -\frac{\ddot{x}\dot{x}}{M_d} \quad (36)$$

La expresión (36) representa el ritmo de la disipación de la energía en función de la masa. Cuando es positiva, la energía se disipa más lentamente a medida que  $M_d$  crece. En el caso contrario, cuando (36) es negativa, la energía se disipa de forma más rápida cuando  $M_d$  crece.

Es conocido de la experiencia cotidiana que este sistema, es decir un cuerpo que choca contra el entorno, es siempre estable. Por consiguiente  $\dot{V}$  es siempre negativa. Sin embargo, el término de  $\dot{V}$  asociado a  $M_d$  puede ser positivo o negativo en un instante dado, dependiendo de qué forma de energía se está transformando en que otra. El objetivo de la conmutación de la masa es hacer que la influencia del término asociado a sea mayor cuando este está absorbiendo energía y que sea menor cuando la este devolviendo al sistema.

Por lo tanto, para disipar la energía lo más rápido, es lógico asumir la siguiente ley de conmutación de  $M_d$ :

$$M_d = \begin{cases} M_{\min} & \text{si } \ddot{x}\dot{x} < 0 \\ M_{\max} & \text{si } \ddot{x}\dot{x} > 0 \end{cases} \quad (37)$$

Cabe resaltar que el producto  $\dot{x}\ddot{x}$  es equivalente a la derivada de la energía cinética del sistema dividida por la masa real. Por consiguiente, cuando  $\dot{x}\ddot{x} < 0$ , se puede decir que la energía cinética del sistema se está reduciendo, es decir está siendo transformada en energía potencial elástica del entorno. En cambio cuando  $\dot{x}\ddot{x} > 0$ , la energía cinética está aumentando a costa de la energía potencial.

Los criterios de conmutación (37) han sido verificados mediante simulaciones. Para las simulaciones se han sumido los siguientes valores:  $M_d=10\text{kg}$  (si no se conmuta),  $B_d=1\text{ Ns/m}$ ,  $K_d=0$ ,  $ref=100\text{N}$ ,  $B_e=10\text{ Ns/m}$ ,  $K_e=10^6\text{ N/m}$ .

Se ha asumido que el robot impacta contra el entorno en el instante cero. También se ha asumido, por sencillez, que la coordenada del entorno  $x_e=0$ , utilizándose un período de muestreo de un microsegundo.

Primero se han estado conmutando  $M_{min}$  dejando  $M_{max}$  a un valor constante, y posteriormente se ha hecho lo contrario. De esta forma, se verifican ambos casos por separado sin poder interferir el uno en el otro. Los resultados están representados en las siguientes gráficas.

Se puede apreciar que reduciendo el valor de  $M_{min}$  se atenúan más los picos de fuerza en todos los casos, haciéndose también más rápida la convergencia.

Al aumentar el valor de  $M_{max}$  más se atenúan los picos de fuerza en todos los casos. Sin embargo, existe un valor a partir del cual la dinámica del sistema se vuelve tan lenta que puede ser poco práctica su aplicación debido al elevado tiempo de establecimiento.

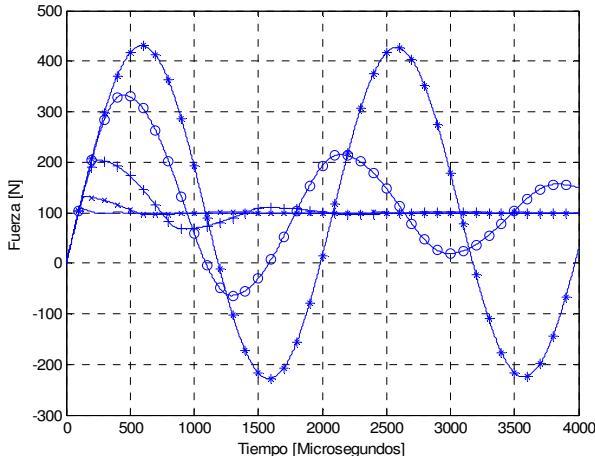


Figura 5. Fuerza en función del tiempo al conmutar  $M_{min}$ .  $M_{max}=10$  en todos los casos. a)  $M_{min}=10$  (Marcado con “\*”) b)  $M_{min}=5$  (Marcado con “o”) c)  $M_{min}=1$  (Marcado con “+”) d)  $M_{min}=0.1$  (Marcado con “x”) e)  $M_{min}=0.01$  (Sin marcar).

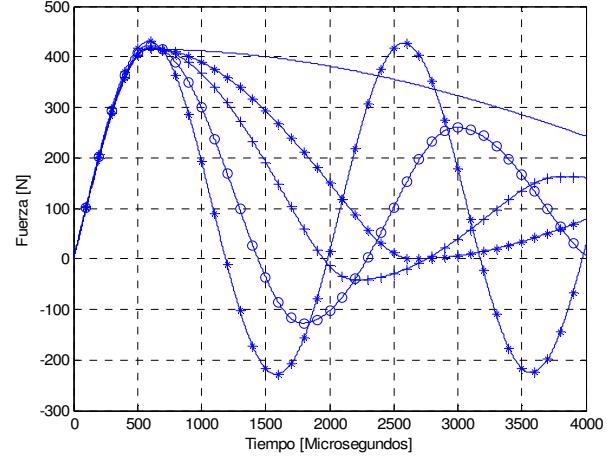


Figura 6. Fuerza en función del tiempo al conmutar  $M_{max}$ .  $M_{min}=10$  en todos los casos. a)  $M_{max}=10$  (Marcado con “\*”) b)  $M_{max}=20$  (Marcado con “o”) c)  $M_{max}=50$  (Marcado con “+”) d)  $M_{max}=100$  (Marcado con “x”) e)  $M_{max}=1000$  (Sin marcar).

Se puede comprobar que al aumentar el valor de  $M_{max}$  más se atenúan los picos de fuerza en todos los casos. Sin embargo, la dinámica del sistema se ralentiza. Afortunadamente el tiempo que dura el impacto sigue siendo muy breve y se puede despreciar con respecto a la duración del resto de la tarea. En todo caso, es más importante proteger el sistema contra picos de fuerza que garantizar un tiempo de establecimiento rápido.

## 6.2. Criterios de conmutación de la rigidez

El valor de la derivada de la energía con respecto a la rigidez:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \dot{V}}{\delta K_d} &= -\frac{\dot{x}\ddot{x}}{M_d} + \dot{x} \left( \frac{ff + K_e x_e}{(K_d + K_e)^2} \right) = \\ &= \dot{x} \left( \frac{ff + K_e x_e}{(K_d + K_e)^2} - \frac{x}{M_d} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

Y los criterios de conmutación lógicos:

$$K_d \begin{cases} K_{max} & \text{si } \dot{x} \left( \frac{ff + K_e x_e}{(K_d + K_e)^2} - \frac{x}{M_d} \right) < 0 \\ K_{min} & \text{si } \dot{x} \left( \frac{ff + K_e x_e}{(K_d + K_e)^2} - \frac{x}{M_d} \right) > 0 \end{cases} \quad (39)$$

Se aprecia que los criterios dependen de la rigidez del entorno. Se sabe que, asumiendo que ésta es conocida, es muy fácil diseñar un regulador de forma que el sistema esté sobreamortiguado. Por ello la conmutación de la rigidez activa es innecesaria. En cambio, si es desconocida, los criterios de conmutación no se pueden evaluar, por lo que la conmutación de la rigidez no se puede aplicar.

### 6.3 Comutación del amortiguamiento

La derivada parcial con respecto del amortiguamiento de la derivada de la energía es:

$$\frac{\delta \dot{V}}{\delta B_d} = -\frac{\dot{x}^2}{M_d} \quad (40)$$

Como se ve, siempre es negativa, por lo que este término es siempre disipativo y por consiguiente no tiene sentido comutar el amortiguamiento.

## 7. REAJUSTE DE LOS PARÁMETROS

Los instantes en los que unos valores de parámetros (los mínimos o los máximos) están inactivos se pueden aprovechar para reajustarlos, mejorando así aún más el control del impacto en las futuras comutaciones. Esto es importante sobre todo para la fase en la que la energía cinética se transforma en potencial ( $\ddot{x} < 0$ ), puesto que es cuando es posible hacer el sistema sobreamortiguado. Si esto se logra, el sistema no entrará en la fase de aumento de energía cinética ( $\ddot{x} > 0$ ). Además, es necesario tener en cuenta que donde se corre el mayor peligro de picos de fuerza es en la fase de reducción de energía cinética.

Asumiendo que  $M_d(2k-1)$  y  $B_d(2k-1)$  son la masa y el amortiguamiento impuestos en las fases de aumento de energía cinética y  $M_d(2k)$  y  $B_d(2k)$  en la de reducción, se pueden asignar los valores a los parámetros de forma que se cumpla:

$$\begin{aligned} M_d(2k+2) &< M_d(2k) \\ B_d(2k+2) &> B_d(2k) \end{aligned} \quad (41)$$

Sin embargo, es difícil encontrar una expresión analítica para calcular los valores exactos de la masa y del amortiguamiento. Como se ha dicho anteriormente, dada la brevedad del impacto, el número de muestras puede ser insuficiente para identificar los parámetros del sistema.

Una alternativa reside en la corrección del amortiguamiento en base a la frecuencia del sistema durante la fase de reducción de energía cinética. Esta se puede estimar en la primera aproximación:

$$\omega = \frac{\pi}{2(t_{final} - t_{initial})} \quad (42)$$

donde  $t_{initial}$  y  $t_{final}$  son respectivamente los instantes donde comienza y acaba la fase de reducción de energía cinética. Es importante resaltar que esta estimación es válida únicamente para un sistema de segundo orden, como es el caso de la impedancia.

El discriminante del sistema es:

$$B_{Tot}^2 - 4K_{Tot}M_d = -4\omega^2 \quad (43)$$

donde

$$\begin{aligned} B_{Tot} &= B_d + B_e \\ K_{Tot} &= K_d + K_e \end{aligned} \quad (44)$$

Este discriminante será positivo si se aumenta el amortiguamiento según la siguiente fórmula:

$$B_{Tot}^2(2k+2) > B_{Tot}^2(2k) + 4\omega^2 \quad (45)$$

lo es equivalente a:

$$B_{Tot}^2(2k+2) - B_{Tot}^2(2k) > 4\omega^2 \Leftrightarrow \quad (46)$$

$$(B_{Tot}(2k+2) - B_{Tot}(2k))(B_{Tot}(2k+2) + B_{Tot}(2k)) > 4\omega^2$$

Dado que el valor del amortiguamiento activo es ajustable, se le puede asignar siempre un valor que cumpla:

$$B_{Tot}(2k+2) + B_{Tot}(2k) > 1 \quad (47)$$

En este caso la condición (46) se puede simplificar a:

$$B_{Tot}(2k+2) - B_{Tot}(2k) > 4\omega^2 \quad (48)$$

Para que esto se cumpla, es suficiente asignar el valor de:

$$B_{Tot}(2k+2) > B_{Tot}(2k) + 4\omega^2 \quad (49)$$

lo que, según (44) equivale a:

$$B_d(2k+2) > B_d(2k) + 4\omega^2 \quad (50)$$

A continuación están representados los resultados de las simulaciones para diferentes casos:

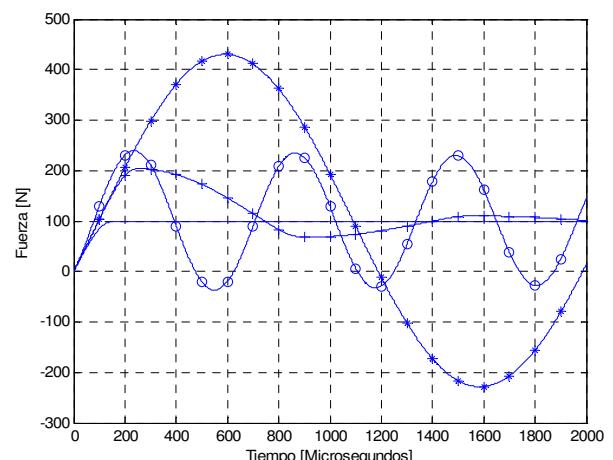


Figura 7. Variación de la fuerza en función del tiempo. Los siguientes casos están representados: a) una masa grande (Marcado con “\*”), b) una masa diez veces más pequeña (Marcado con “o”), c) comutación entre las dos masas según la ley (37) (Marcado con “+”), y d) con reajuste del amortiguamiento según (50) (Sin marcar).

Se puede apreciar en la Figura 7 que, como es lógico, una masa pequeña causa menos impacto que una masa grande. Así mismo, se puede observar también cómo la comutación de la masa conlleva una mejora drástica de las prestaciones del sistema en cuanto a sobreoscilación y tiempo de establecimiento. Por último, se verifica que con el reajuste del amortiguamiento según la fórmula (50) la mejora es aún mayor.

## 8. EFECTO DEL RUIDO

Como se ha visto anteriormente, la conmutación se efectúa basándose en los valores de las variables del estado (ecuación (37)), en concreto de la velocidad y de la aceleración. Por consiguiente, es necesario medir estas magnitudes. Desafortunadamente la señal de los sensores es propensa a ruido eléctrico, lo que puede provocar conmutaciones en el instante equivocado.

En la figura 8 está representado el valor de la fuerza en función del tiempo para los casos con y sin ruido. En ambos casos la masa conmutaba entre 1 y 10 kg. Se ha considerado que el ruido de ambos sensores el ruido está acotado. Para el valor máximo del ruido se han tomado el 10% de los valores máximos de la aceleración y la velocidad de la simulación sin ruido, es decir  $10 \text{ m/s}^2$  y  $0.1 \text{ m/s}$  respectivamente.

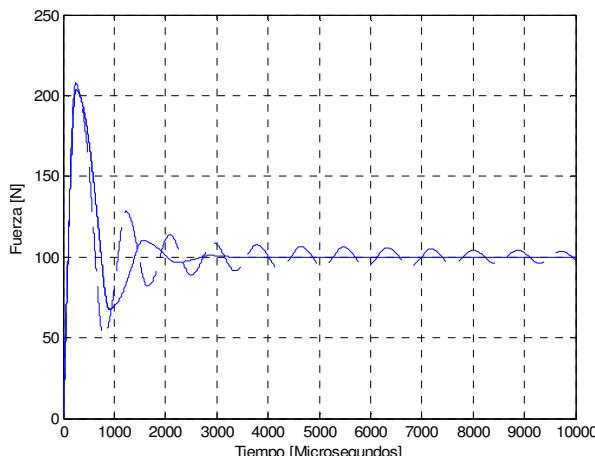


Figura 8. Variación de la fuerza en función del tiempo. La línea llena representa el caso sin ruido y la línea a tramos el caso con el ruido añadido. En ambos casos la masa conmuta entre 1 y 10kg.

Se puede apreciar que el ruido aumenta los picos de fuerza, lo que era de esperar puesto que la conmutación ya no se realiza de forma óptima. Sin embargo, es más grave el hecho de que el sistema tarda en estabilizarse. Esto se debe al hecho que cuando las oscilaciones los valores extremos de la velocidad y la aceleración pueden ser menores que el nivel de ruido lo que provoca que el sistema oscile en torno al punto de equilibrio.

Una solución para este efecto es dejar de conmutar una vez la amplitud de oscilación es suficientemente pequeña. Cuando esto ocurre el sistema ya está bastante amortiguado, los máximos de fuerza son relativamente pequeños y el control de impacto ya no tiene tanta importancia como durante los primeros picos.

## 9. CONCLUSIONES

El propósito del artículo es la búsqueda de una forma de amortiguar el impacto en el control de impedancia mecánica si las características del entorno son desconocidas. Para ello se ha propuesto un método basado en la conmutación de los parámetros de la impedancia mecánica. Los criterios de

comutación están basados en la transformación de la energía de cinética a potencial elástica y viceversa.

Al analizar los criterios de conmutación para cada uno de los parámetros, se ha demostrado que la conmutación de la masa según los criterios deducidos en el artículo (ecuación (37)) siempre mejora el control del impacto. También se ha deducido que la conmutación de los otros dos parámetros no se puede aplicar. En el caso de la rigidez porque los criterios de conmutación dependen de las características del entorno y por consiguiente no se pueden evaluar. En el caso del amortiguamiento, porque el término asociado es siempre disipativo y no influye en la transformación de la energía de un tipo a otro.

Por último, se ha propuesto una forma de reajustar el amortiguamiento activo del sistema entre dos conmutaciones de forma a hacer en pocas iteraciones que el sistema se vuelva sobreamortiguado.

De esta forma, la conmutación de la masa es un método que siempre mejora el control del impacto, limitando los picos de fuerza y reduciendo las pérdidas de contacto. Además, el método necesita poco tiempo para ser efectivo, lo que es muy importante debido a la brevedad y el peligro del impacto. Las prestaciones mejoran a medida que los valores de la masa se hacen extremos, es decir el valor máximo se hace más grande y el mínimo más pequeño. Por esta razón son fáciles de ajustar.

Por último, reajustando el amortiguamiento de la forma explicada en el artículo logra que el sistema sea sobreamortiguado en poco tiempo.

## REFERENCIAS

- B. Armstrong, J. McPherson y Y. Li, "Stability of Nonlinear PD control." *Applied Mathematics and Computer Science*, 7 (2), 101–120 (1997);
- B. Armstrong, D. Neevel y T. Kusik "New results in NPID control: Tracking, integral control, friction compensation and experimental results" *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 9 (2), 399–406 (2001);
- B. Armstrong, J. Gutierrez, B. Wade y R. Joseph "Stability of Phase-Based Gain Modulation with Designer-Chosen Switch Functions", *The International Journal of Robotics Research* 25 (8), 781-796 (2006).
- R. Brach, *Mechanical Impact Dynamics- Rigid Body Collisions* (John Wiley & Sons Publishers, New York, 1991);
- B. Brogliato, *Nonsmooth mechanics*. (Springer Verlag, London, 1999);

B. Brogliato, S.I. Niculescu y P. Orhant "On the Control of Finite Dimensional Mechanical Systems with Unilateral Constraints"- IEEE Transactions on Automatic Control **42** (2), 200-215 (1997);

J. De Schutter y M. Spong " Force Control: A bird's eye view" – IEEE CSS/ RAS Workshop on Control Problems in Robotics and Automation: Future Directions" San Diego, CA, ( 1997).

G. Ferretti, G. Magnani y A. Zavala Río, " Impact modelling and Control for Industrial Manipulators"- IEEE Control Systems Magazine, **18** (4), 65-71 (1998);

D. Franke, "Entwurf robuster Regelungssysteme mittels zustandsabhängiger Strukturänderung", Regelungstechnik **29** (1), 263-268 (1981);

N. Hogan "Impedance Control: An approach to manipulation"- Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control, Vol. **107**, pp 1-24, (1985).

J. Hyde y M. Cutkosky, "Controlling Contact Transitions" IEEE Control Systems Magazine, **14** (1), 25-30 (1994).

L. Sciavicco y B. Siciliano, Modeling and Control of Robot Manipulators (McGraw-Hill Company Inc., New York, 1996);

H. Seraji y R. Colbaugh "Force Tracking in impedance Control." The International Journal of Robotics Research, **16** (1), 97 – 117, (1997).

H. Seraji, "Nonlinear and Adaptive Control of Force and Compliance in Manipulators" The International Journal of Robotic Research, **17** (5), pp. 467-484 (1998);

R. Volpe y P. Khosla, "A Theoretical and Experimental Investigation of Impact Control for Manipulators"- International Journal of Robotics Research, **12** (4), 351-365 (1993).

Y. Xu , J.M. Hollerbach y D. Ma, "A nonlinear PD controller for force and contact transient control.", IEEE Control Systems Magazine, **15** (1), pp. 15–21 (1995);

R. Zotovic., A. Valera y P. García,: "Impact and force control with switching between mechanical impedance parameters", Proceedings of the 16th IFAC world Congress, Praga, (2005).

R. Zotovic y A. Valera, "Robot Force and Impact Control with Feedforward Switching", Proceedings of the 17th IFAC world Congress, Seoul, Korea (2008).

R. Zotovic y A. Valera, "Simultaneous velocity, impact and force control", Robotica, Aceptado para publicación (doi:10.1017/S0263574709005451), (2009).