

Navegación de Robots Móviles en Entornos no Estructurados utilizando Álgebra Lineal

Andrés Rosales*, Gustavo Scaglia**, Vicente Mut*, Fernando di Sciascio*

*Instituto de Automática, Universidad Nacional de San Juan, Av. Libertador San Martín 1109 (oeste), San Juan, Argentina (e-mail: arosales@inaut.unsj.edu.ar)

** Instituto de Ingeniería Química, Universidad Nacional de San Juan, Av. Libertador San Martín 1109 (oeste), San Juan, Argentina (e-mail: gscaglia@unsj.edu.ar)

Resumen: Este trabajo presenta un enfoque basado en la teoría del álgebra lineal, los métodos numéricos y una modificación al método de fuerza ficticia, para la navegación de robots móviles en entornos dinámicos. Para el diseño del controlador se utiliza el modelo dinámico de un robot móvil no holonómico tipo unicycle. Trabajos anteriores a menudo ignoran la dinámica del robot, por lo que sufren de singularidades en sus algoritmos. Los resultados de simulación y experimentación confirman la factibilidad y efectividad del controlador propuesto, logrando que el robot sea capaz de adaptar su comportamiento al nivel del conocimiento disponible y navegar de manera segura en entornos no estructurados, mientras se minimiza el error de seguimiento. Copyright © 2009 CEA.

Palabras Clave: álgebra lineal, evasión de obstáculos, fuerza ficticia, modelo dinámico, robot móvil.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de la navegación de robots móviles en entornos estacionarios ha sido un tema de interés para los investigadores durante los últimos años. El desafío actual es la navegación autónoma en entornos que contienen obstáculos en movimiento, especialmente cuando los objetos que ocupan el entorno tienen un movimiento desconocido. Los métodos tradicionales de planificación de movimiento requieren una excesiva carga computacional para ser aplicados en tiempo real a este tipo de problemas (Tian *et al.*, 2007), por lo cual surge la necesidad de nuevas técnicas.

Cuando el movimiento de los obstáculos es totalmente desconocido, entonces, una selección reactiva del movimiento es una manera razonable para que un robot evite las colisiones, en este caso, lo importante no es la optimalidad sino la seguridad del movimiento del robot. Por otro lado, cuando el movimiento de un obstáculo es completamente conocido, un movimiento óptimo puede ser generado mediante el empleo de una planificación en espacio-tiempo. En varias aplicaciones, puede hacerse una localización del entorno mediante la construcción de un mapa del área de trabajo a partir de los sensores que posee el robot. Estos mapas son muy útiles en un robot para encontrar el camino libre de colisiones con objetos estáticos tales como una pared. Sin embargo, para objetos en movimiento tales como seres humanos, no es una tarea fácil, que el robot dibuje mapas dinámicos que generen caminos para la evasión y mantengan una distancia mínima deseada entre el robot y el objeto por razones de seguridad. El robot requiere una reacción dinámica rápida para evitar la colisión con objetos en movimiento en lugar de depender de mapas estáticos o dinámicos que se actualizan muy lentamente.

Los métodos globales (algoritmos de planificación de trayectorias) calculan un camino completo a la meta a partir de la posición actual del robot (Latombe, 1991). En el caso de los

obstáculos móviles, una técnica común es añadir la dimensión tiempo al espacio de estado y reducir el problema a uno estático (Fraichard, *et al.* 1994). Además, si los métodos globales pueden proveer soluciones óptimas, su mayor desventaja es que asumen un conocimiento completo del entorno: en aplicaciones prácticas estas técnicas son usualmente combinadas con métodos locales para evitar obstáculos inesperados (Stachniss, *et al.* 2002; Jang, *et al.* 2004; Jung, *et al.* 2005; Seder, *et al.* 2005). Estos últimos, también denominados métodos reactivos, generan solo la próxima señal de control: ellos usan solo la porción más cercana del entorno y actualizan el modelo del mundo de acuerdo a la observación actual de los sensores. La mayoría de las técnicas desarrolladas, como el método de la ventana dinámica (Dynamic Window), (Fox, *et al.* 1997), el método de la velocidad de curvatura (Nak, *et al.* 1998) y el método del camino de curvatura (Simmons, *et al.* 1996), el concepto de los estados de colisión inevitables (Fraichard, *et al.* 2003; Owen, *et al.* 2006), dependen de un conocimiento completo del entorno estático y dinámico.

Algunos investigadores han desarrollado una variedad de métodos basados en el concepto de campo de potencial. En (Connolly, *et al.* 1990) se presentó un método usando la ecuación de Laplace para evadir mínimos locales. En (Masoud, *et al.* 1996) se propuso un campo repulsivo el cual está localizado estrictamente en la vecindad del robot para protegerlo de las colisiones. En (Poty, *et al.* 2004) desarrollaron un método potencial fraccional, el cual define potenciales atractivos y repulsivos tomando en cuenta la posición relativa y la velocidad del robot con respecto a obstáculos y objetivos. Para superar algunas deficiencias del método de campo de potencial, se desarrolló el Histograma de Campo Vectorial (Vector Field Histogram, VFH) (Borenstein, *et al.* 1991), un método que busca espacios en histogramas polares construidos localmente. Luego surgieron los métodos del VFH+ (Ulrich, *et al.* 1998) y del VFH* (Ulrich, *et al.* 2000).

En general, el objetivo de este trabajo es calcular las acciones de control necesarias para que el robot móvil alcance una posición (x, y) , con una orientación preestablecida ψ en cada instante de muestreo (kT_0) evitando colisiones durante su trayectoria. Para lograr este objetivo, en un vehículo no holonómico, se dispone de dos variables de control: la velocidad lineal u y la velocidad angular ω del robot. El controlador propuesto, sobre la base del modelo dinámico del robot, calcula la acción de control óptima (según mínimos cuadrados (Strang, 1980)) que permite al robot móvil pasar del estado actual al estado deseado (Scaglia, 2006a). Esta técnica ha sido probada en varios trabajos, por ejemplo, Rosales *et al.* (2006a,b,c; 2007), Scaglia *et al.* (2006b,c; 2007a,b; 2008a,b). El algoritmo de la fuerza ficticia modificado permite reducir las oscilaciones de orientación del robot las cuales ocurren cuando un robot se aproxima a un obstáculo o a otro robot (Wang, *et al.* 2006), permitiendo la evasión segura de colisiones en la trayectoria realizada.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta el modelo dinámico del robot móvil; en la sección 3 se describe el controlador utilizado para la navegación, mientras que en la sección 4 se presenta el método de la fuerza ficticia. En la sección 5 se presentan los resultados de experimentación, y en la sección final se dan las conclusiones del trabajo.

2. MODELO DINÁMICO

Para realizar tareas que requieren alta velocidad y/o transporte de cargas pesadas, es muy importante considerar la dinámica del robot. Las características dinámicas del robot, tales como masa e inercia, cambian cuando el robot está cargado. Un modelo dinámico no holonómico de un robot móvil tipo unicycle (De la Cruz, 2006), se muestra en la Fig. 1 y se presenta en la Ec. (1).

El punto que define la posición del robot es (x, y) , el cual está ubicado a una distancia a delante del centro del eje que une las ruedas traseras del robot, u y \tilde{u} son las velocidades longitudinal y lateral del centro de masa; ω es la velocidad angular del robot y ψ es el ángulo de orientación del robot, G es el centro de gravedad, B el centro de la línea de base de las ruedas, E es el punto de ubicación de la herramienta de trabajo (por ejemplo, un brazo robótico) y C es el punto de ubicación de la rueda castor.

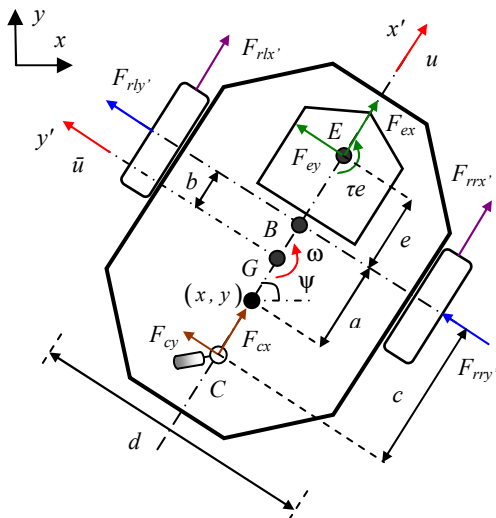


Figura 1. Modelo de un robot móvil no holonómico tipo unicycle

F_{rrx} y F_{rry} son las fuerzas longitudinal y lateral en el neumático de la rueda derecha; F_{rlx} y F_{rly} son las fuerzas longitudinal y lateral en el neumático de la rueda izquierda; F_{cx} y F_{cy} son las fuerzas longitudinal y lateral ejercidas sobre C por la rueda castor; F_{ex} y F_{ey} son las fuerzas longitudinal y lateral ejercidas sobre E por la herramienta de trabajo; b , c , d y e son distancias; y τ_e es el momento ejercido por la herramienta de trabajo.

A partir del esquema Fig. 1, se obtiene el siguiente modelo dinámico para un robot móvil no holonómico tipo unicycle:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos \psi - a \omega \sin \psi \\ u \sin \psi + a \omega \cos \psi \\ \omega \\ \frac{\theta_3}{\theta_1} \omega^2 - \frac{\theta_4}{\theta_1} u \\ -\frac{\theta_5}{\theta_2} u \omega - \frac{\theta_6}{\theta_2} \omega \end{bmatrix} + \frac{1}{\theta_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\theta_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \omega_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \\ \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix} \quad (1)$$

Los parámetros identificados, $\delta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6]^T$, en el modelo dinámico del robot móvil (validados en De la Cruz & Carelli, 2008) son:

$$\theta_1 = \left(\frac{R_a}{k_a} (m R_t r + 2 I_e) + 2 r k_{DT} \right) / (2 r k_{PT}) = 0.24089;$$

$$\theta_2 = \left(\frac{R_a}{k_a} (I_e d^2 + 2 R_t r (I_z + m b^2)) + 2 r d k_{DR} \right) / (2 r d k_{PR}) = 0.2424;$$

$$\theta_3 = \frac{R_a}{k_a} m b R_t / (2 k_{PT}) = -0.00093603;$$

$$\theta_4^0 = \frac{R_a}{k_a} \left(\frac{k_a k_b}{R_a} + B_e \right) / (r k_{PT}) + 1 = 0.99629;$$

$$\theta_5 = \frac{R_a}{k_a} m b R_t / (d k_{PR}) = -0.0037256;$$

$$\theta_6 = \frac{R_a}{k_a} \left(\frac{k_a k_b}{R_a} + B_e \right) d / (2 r k_{PR}) + 1 = 1.0915.$$

donde m es la masa del robot; r es el radio de las ruedas izquierda y derecha; k_b es igual a la constante contraelectromotriz multiplicada por la constante de reducción; R_a es la constante de resistencia eléctrica; k_a es la constante de torque multiplicada por la constante de reducción; k_{PR} , k_{PT} , and k_{DT} son constantes positivas; I_e y B_e son el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa de la combinación rotor del motor, caja de reducción y rueda; y R_t es el radio nominal del neumático (De la Cruz & Carelli, 2008).

El vector de incertidumbre, relacionado al robot móvil es $\delta = [\delta_x \ \delta_x \ 0 \ \delta_u \ \delta_\omega]^T$, donde δ_x y δ_y dependen de la velocidad, el deslizamiento de las ruedas y la orientación del robot; δ_u y δ_ω dependen de los parámetros mecánicos del robot, tales como la masa, el momento de inercia, el diámetro de las ruedas, los parámetros del motor y los servo-controladores, etc. Todos estos parámetros son considerados perturbaciones.

Comentario 1. Si los deslizamientos de las ruedas, las fuerzas y torques ejercidos por la herramienta y las fuerzas ejercidas por la rueda castor tienen un valor despreciable, el vector de incertidumbres δ no será considerado en el modelo.

En general, la mayor parte de robots comerciales poseen controladores PID de velocidad de bajo nivel para seguir velocidades de referencia para de esta manera no permitir que los voltajes de los motores sean directamente manejados. Por lo tanto, es útil expresar el modelo del robot móvil en una forma adecuada considerando a las velocidades rotacional y traslacional como señales de control.

3. DISEÑO DEL CONTROLADOR

El controlador propuesto está basado en la teoría del álgebra lineal y los métodos numéricos. Conociendo el estado deseado en el próximo periodo de muestreo, es posible calcular las acciones de control necesarias para que el robot móvil siga la trayectoria de referencia con un buen rendimiento. Se asume que el robot móvil se mueve en un plano horizontal sin deslizarse.

3.1 Aproximación de Euler

Primero, mediante la aproximación de Euler¹ del modelo dinámico del robot móvil, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} x_{(k+1)} \\ y_{(k+1)} \\ \Psi_{(k+1)} \\ u_{(k+1)} \\ \omega_{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{(k)} \\ y_{(k)} \\ \Psi_{(k)} \\ u_{(k)} \\ \omega_{(k)} \end{bmatrix} + T_0 \left\{ \begin{bmatrix} u_{(k)} \cos \Psi_{(k)} - a \omega_{(k)} \sin \Psi_{(k)} \\ u_{(k)} \sin \Psi_{(k)} + a \omega_{(k)} \cos \Psi_{(k)} \\ \omega_{(k)} \\ \frac{\theta_3}{\theta_1} \omega_{(k)}^2 - \frac{\theta_4}{\theta_1} u_{(k)} \\ -\frac{\theta_5}{\theta_2} u_{(k)} \omega_{(k)} - \frac{\theta_6}{\theta_2} \omega_{(k)} \end{bmatrix} + \frac{1}{\theta_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c(k)} \\ \omega_{c(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \\ \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix} \right\} \quad (2)$$

donde los valores de x al tiempo discreto $t = kT_0$, serán denotados como $x_{(k)}$; T_0 es el periodo de muestreo, y $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Luego, el vector de estados $\mathbf{x}_{(k+1)}$ es remplazado por el vector de estados deseados,

$$\mathbf{x}_{d(k+1)} = \begin{bmatrix} x_{d(k+1)} & y_{d(k+1)} & \Psi_{d(k+1)} & u_{d(k+1)} & \omega_{d(k+1)} \end{bmatrix}^T$$

Comentario 2. El uso de métodos numéricos para calcular la evolución de sistemas se basa principalmente en la posibilidad de determinar el estado del sistema al instante $k+1$, si el estado actual, es decir, al instante k , es conocido (propiedad de Markov²). De manera que, una variable al instante $k+1$ puede ser substituida por la variable deseada y subsecuentemente se puede calcular la acción de control necesaria para hacer que los estados del sistema vayan desde su valor actual hasta el valor deseado.

A partir de (2), el siguiente sistema de ecuaciones es creado:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{b} \quad (3)$$

donde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} u_{c(k)} & \omega_{c(k)} \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{T_0} \begin{bmatrix} x_{d(k+1)} - x_{(k)} \\ y_{d(k+1)} - y_{(k)} \\ \Psi_{d(k+1)} - \Psi_{(k)} \\ u_{d(k+1)} - u_{(k)} \\ \omega_{d(k+1)} - \omega_{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{(k)} \cos \Psi_{(k)} - a \omega_{(k)} \sin \Psi_{(k)} \\ u_{(k)} \sin \Psi_{(k)} + a \omega_{(k)} \cos \Psi_{(k)} \\ \omega_{(k)} \\ \frac{\theta_3}{\theta_1} \omega_{(k)}^2 - \frac{\theta_4}{\theta_1} u_{(k)} \\ -\frac{\theta_5}{\theta_2} u_{(k)} \omega_{(k)} - \frac{\theta_6}{\theta_2} \omega_{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \\ \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\theta_2} \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

A partir de (3), el cual es un sistema de cinco ecuaciones con dos incógnitas, y mediante el uso de las ecuaciones normales³ ($\mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$), se encuentra la solución óptima (de acuerdo a mínimos cuadrados⁴ - Strang, 1980) para $\boldsymbol{\mu}$,

$$\begin{bmatrix} u_{c(k)} \\ \omega_{c(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\theta_1 (u_{d(k+1)} - u_{(k)}) - T_0 (\theta_3 \omega_{(k)}^2 - \theta_4 u_{(k)} + \theta_1 \delta_u)}{T_0} \\ \frac{\theta_2 (\omega_{d(k+1)} - \omega_{(k)}) - T_0 (-\theta_5 u_{(k)} \omega_{(k)} - \theta_6 \omega_{(k)} + \theta_2 \delta_\omega)}{T_0} \end{bmatrix} \quad (7)$$

3.2 Criterio del Espacio Columna

Ahora, el objetivo es encontrar $u_{d(k+1)}$ y $\omega_{d(k+1)}$, de manera que el error de seguimiento llegue a ser mínimo. Para satisfacer esta condición, el sistema (3), debe tener una solución exacta. Luego, el vector \mathbf{b} debe pertenecer al espacio columna⁵ de la matriz \mathbf{A} , esto es, el vector \mathbf{b} debe ser una combinación lineal de los vectores columna de la matriz \mathbf{A} (Strang, 1980); una base para el espacio columna de la matriz \mathbf{A} es,

$$C(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\theta_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\theta_2} \end{bmatrix} \right\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \quad (8)$$

¹ Las aproximaciones de Euler son un procedimiento numérico de primer orden para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs) dado un valor inicial.

² Tener la propiedad de Markov significa que, dado el estado actual, los estados futuros son independientes de los estados pasados. En otras palabras, la descripción del estado actual captura toda la información que podría influenciar en la futura evolución del proceso.

³ Dada la ecuación matricial $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, la ecuación normal es aquella que minimiza la suma de las diferencias al cuadrado entre los lados izquierdo y derecho de $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$; donde $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ es una matriz normal, $\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{0}$.

⁴ La solución de mínimos cuadrados para un sistema inconsistente $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ satisface la ecuación $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$. Si las columnas de \mathbf{A} son linealmente independientes $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ es invertible y $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$.

⁵ En Álgebra Lineal, el espacio columna de una matriz es el conjunto de todas las combinaciones lineales posibles de sus vectores columna.

El sistema (3) debe tener una solución exacta, de allí que debe satisfacer $\mathbf{b} = \zeta_1 \mathbf{v}_1 + \zeta_2 \mathbf{v}_2$ (combinación lineal de \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2), donde $\zeta_1, \zeta_2 \in \Upsilon$. Esto es,

$$\mathbf{b} = \zeta_1 \mathbf{v}_1 + \zeta_2 \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\zeta_1}{\theta_1} & \frac{\zeta_2}{\theta_2} \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

Para visualizar de mejor manera el concepto anterior acerca del espacio columna, la Fig. 2 presenta un ejemplo de la proyección de un vector \mathbf{p} sobre el espacio columna de una matriz \mathbf{Q} , donde $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{p}$ es un sistema inconsistente, esto es, el vector \mathbf{p} no es una combinación lineal de las columnas de la matriz \mathbf{Q} ; $\hat{\mathbf{p}}$ es la proyección del vector \mathbf{p} en el espacio columna de la matriz \mathbf{Q} y es el punto más cercano a \mathbf{p} en este espacio; $\|\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}\|$ es la distancia de \mathbf{p} al punto $\mathbf{Q}\mathbf{x}$ en el espacio columna de \mathbf{Q} , es decir, es el vector de errores. El vector de errores $\|\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}\|$ debe ser perpendicular al espacio columna de la matriz \mathbf{Q} . Además, la norma se define por $\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{P}}^2 = \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z}$ con $\mathbf{P} > 0$.

La solución óptima (de acuerdo a mínimos cuadrados) de este sistema satisface $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{Q}^T \mathbf{p}$ (ecuaciones normales), por tanto, $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{Q}^+ \mathbf{p}$, donde \mathbf{Q}^+ es la matriz pseudo-inversa de \mathbf{Q} . Luego, si las columnas de \mathbf{Q} son linealmente independientes: $\mathbf{Q}^+ = (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^T$.

Retornando al diseño del controlador, y a partir de (5) y (9) las relaciones en (10) pueden ser establecidas,

$$\begin{cases} x_{d(k+1)} - x_{(k)} = T_0 (u_{(k)} \cos \psi_{(k)} - a \omega_{(k)} \sin \psi_{(k)} + \delta_x) \\ y_{d(k+1)} - y_{(k)} = T_0 (u_{(k)} \sin \psi_{(k)} + a \omega_{(k)} \cos \psi_{(k)} + \delta_y) \\ \psi_{d(k+1)} - \psi_{(k)} = T_0 \omega_{(k)} \end{cases} \quad (10)$$

A partir (10) y tomando en cuenta el *Comentario 1*, se creó el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{c} \quad (11)$$

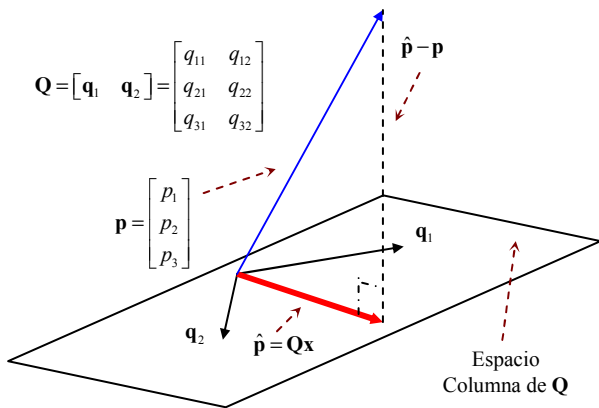


Figura 2. Proyección del vector \mathbf{p} en el espacio columna de una matriz \mathbf{Q} .

donde

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{(k)} & \omega_{(k)} \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

$$\mathbf{c} = \frac{1}{T_0} \begin{bmatrix} x_{d(k+1)} - x_{(k)} & y_{d(k+1)} - y_{(k)} & \psi_{d(k+1)} - \psi_{(k)} \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \psi_{(k)} & -a \sin \psi_{(k)} \\ \sin \psi_{(k)} & a \cos \psi_{(k)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

A partir de (11), el cual es un conjunto de tres ecuaciones con dos incógnitas y utilizando nuevamente las ecuaciones normales ($\mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{B}^T \mathbf{c}$), se encuentra la solución óptima (de acuerdo a mínimos cuadrados) para \mathbf{v} .

La solución óptima para $u_{(k)}$ y $\omega_{(k)}$ representa las velocidades lineal y angular que el robot móvil debe tener al instante k , de manera que el sistema (3) tenga una solución exacta, por tanto, se justifica el uso de estos valores como las velocidades deseadas $u_{d(k+1)}$ y $\omega_{d(k+1)}$. Estos valores están dados por

$$\begin{bmatrix} u_{d(k+1)} \\ \omega_{d(k+1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{T_0} \begin{bmatrix} k_u (\Delta x \cos \psi_{(k)} + \Delta y \sin \psi_{(k)}) \\ k_\omega \left(\frac{-a \Delta x \sin \psi_{(k)} + a \Delta y \cos \psi_{(k)} + \Delta \psi}{a^2 + 1} \right) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\text{donde} \begin{cases} \Delta x = x_{d(k+1)} - x_{(k)} \\ \Delta y = y_{d(k+1)} - y_{(k)} \\ \Delta \psi = \psi_{d(k+1)} - \psi_{(k)} \end{cases}$$

donde k_u y k_ω son constantes positivas que permiten ajustar el rendimiento del controlador propuesto; éstas constantes satisfacen la condición $0 < (k_u, k_\omega) < 1$, permitiendo reducir las variaciones en los estados del sistema (Scaglia, *et al.* 2008b).

3.3 Evaluación del Seguimiento de Trayectorias

Para mostrar el buen rendimiento del método propuesto, se presentan dos resultados experimentales. La primera trayectoria de referencia fue un círculo definido por $x_r = r \cos(\omega_r t)$ y $y_r = r \sin(\omega_r t)$, donde $r \in \Upsilon$ es el radio del círculo y ω_r es la velocidad rotacional de la trayectoria de referencia.

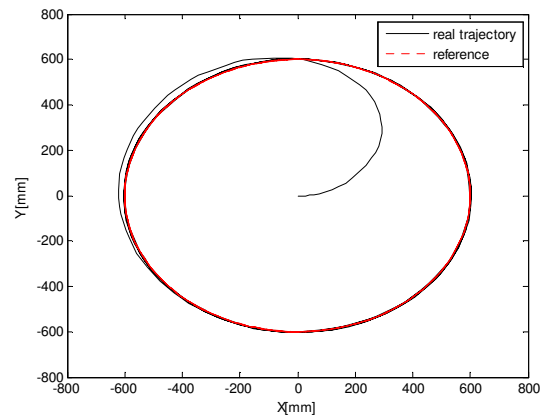


Figura 3. Seguimiento de trayectorias con una referencia circular. Datos experimentales.

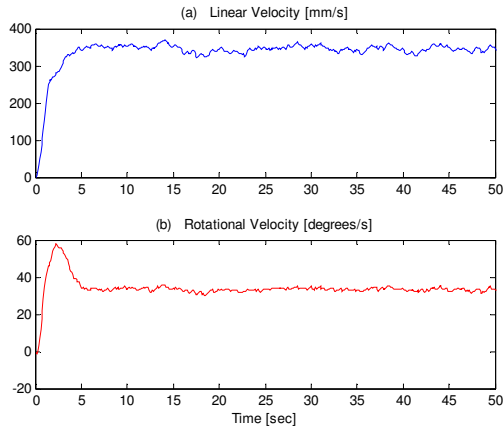


Figura 4. Perfiles de velocidad (a) lineal (b) angular. Datos experimentales.

Para esta prueba $r = 600[\text{mm}]$, $u_{\text{ref}} = 400[\text{mm/s}]$ y $\omega_r = 38.2[\text{grados/s}]$. El periodo de muestreo fue $T_0 = 0.1[\text{s}]$, y las condiciones iniciales utilizadas fueron $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T [\text{mm}]$.

En la Fig. 3 se observa que el robot móvil sigue la trayectoria deseada con un error máximo (*valor absoluto de la diferencia entre las trayectorias deseada y real, una vez que el robot móvil ha alcanzado el camino geométrico predefinido*) de $20[\text{mm}]$. Este error es pequeño comparado con la distancia que existe entre las ruedas del robot móvil ($400[\text{mm}]$). La Fig. 4 muestra los perfiles de velocidad del robot móvil para esta trayectoria circular.

Si se realiza una comparación entre estos resultados experimentales y los resultados publicados en otros trabajos (e.g. Do & Pan, 2006, donde se presenta un algoritmo basado en el modelo dinámico de un robot móvil), puede concluirse que el sistema de control aquí propuesto, presenta un mejor rendimiento, trabajando en el mismo rango de velocidades.

La segunda trayectoria de referencia fue una curva en forma de ocho definida por $x_r = r \sin(\omega_r t)$ y $y_r = r \cos(0.5\omega_r t)$, donde $r \in \mathbb{Y}$ es el radio y ω_r es la velocidad rotacional de la trayectoria de referencia. Para esta prueba $r = 800[\text{mm}]$, $u_{\text{ref}} = 300[\text{mm/s}]$ y $\omega_r = 21.49[\text{grados/s}]$. El tiempo de muestro también fue $T_0 = 0.1[\text{s}]$ y las condiciones iniciales fueron $\mathbf{x}_0 = [500 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T [\text{mm}]$.

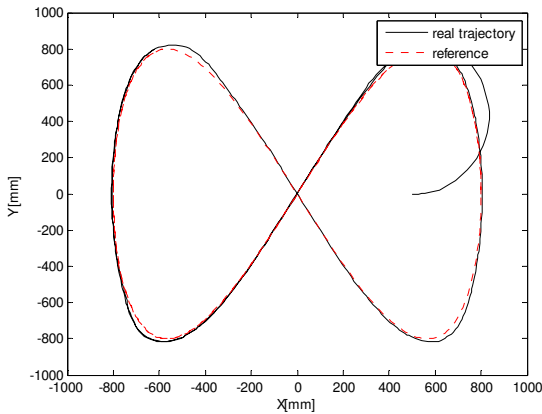


Figura 5. Seguimiento de trayectorias con una referencia en forma de ocho. Datos experimentales.

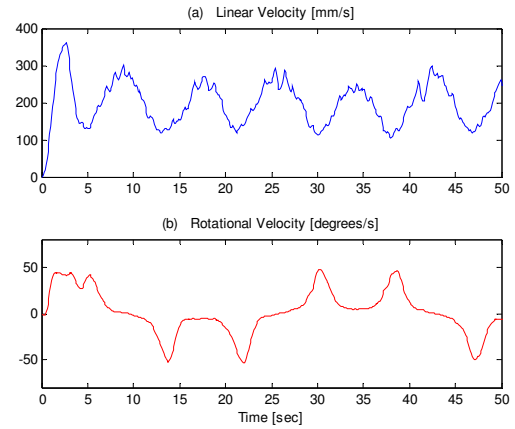


Figura 6. Perfiles de velocidad (a) lineal (b) angular. Datos experimentales.

En la Fig. 5 se observa que el robot móvil sigue la trayectoria deseada con un error máximo de $60[\text{mm}]$ en las partes pronunciadas de la trayectoria. Este error aún es pequeño comparado con la distancia que existe entre las ruedas del robot móvil ($400[\text{mm}]$). La Fig. 4 muestra los perfiles de velocidad del robot móvil para esta trayectoria.

Los resultados obtenidos corroboran las bondades del controlador propuesto, mostrando que el robot móvil sigue la trayectoria de referencia de una manera precisa. La próxima sección presentará cómo se modifica esta trayectoria de referencia para la evasión de obstáculos.

4. FUERZA FICTICIA MODIFICADA

El método de fuerza ficticia basado en la generación de un campo de potencial virtual, ha sido en los últimos años, un enfoque muy utilizado para la planificación de caminos de robots móviles autónomos debido a su simplicidad matemática y eficiencia. El concepto básico de este método es cubrir un entorno de trabajo con una fuerza artificial, mediante la cual el robot es atraído por la meta y repelido por los obstáculos.

El método de la fuerza ficticia, propuesto en este trabajo, genera un campo de fuerza virtual que continuamente va cambiando, dependiendo de la distancia al obstáculo y, las velocidades real y máxima del robot móvil. Esta fuerza ficticia se define como,

$$|\vec{F}_{(k)}| = \begin{cases} 0 & \text{si } d_{(k)} > d_{\max} \\ \frac{c_f \eta}{|d_{\min} - d_{(k)}|} & \text{si } d_{(k)} \leq d_{\max} \end{cases} \quad (16)$$

donde $d_{(k)}$ es la distancia entre el robot y el obstáculo; d_{\max} define una zona repulsiva dentro de la cual se activa la estrategia de evasión; d_{\min} representa la mínima distancia de no contacto del robot con el obstáculo, más los radios del robot y del obstáculo; c_f es una constante positiva que determina la cobertura del campo de fuerza y η se define como,

$$\eta = \rho \frac{u_{(k)}}{u_{\max}}, \quad 0 < \rho \leq 1$$

donde $u_{(k)}$ y u_{\max} son las velocidades real y máxima del robot móvil, respectivamente.

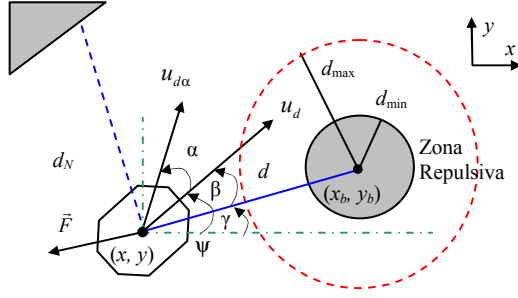


Figura 7. Esquema del método de la fuerza ficticia modificada.

La Fig. 7 muestra un esquema de la fuerza ficticia, donde, ψ es el ángulo de orientación del robot, γ es el ángulo que existe entre el obstáculo y el robot, β es el ángulo que indica la dirección en la que se encuentra el obstáculo con respecto al robot (por tanto, proporciona también la dirección para el desvío de la trayectoria); α el ángulo de rotación debido a la fuerza ficticia; d es la distancia al obstáculo y d_N es la distancia en la dirección normal a d que indica la presencia de obstáculos en dirección perpendicular al obstáculo a evadir; u_d es el vector velocidad deseada y u_{da} es el velocidad deseada modificada. Además (x_b, y_b) es la posición del obstáculo y (x, y) la posición del robot.

Las componentes del vector velocidad deseada u_d , se modifican de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \frac{x_{da(k+1)} - x_{da(k)}}{T_0} \\ \frac{y_{da(k+1)} - y_{da(k)}}{T_0} \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} \cos \alpha_{(k)} & -\sin \alpha_{(k)} \\ \sin \alpha_{(k)} & \cos \alpha_{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_{d(k+1)} - x_{d(k)}}{T_0} \\ \frac{y_{d(k+1)} - y_{d(k)}}{T_0} \end{bmatrix} \quad (17)$$

La función del parámetro $0 < \sigma < 1$ es reducir la magnitud del vector velocidad deseada modificada en el momento de la evasión del obstáculo. Cuando $|\vec{F}_k| = 0$, $\sigma = 1$ (seguimiento normal de trayectoria).

El ángulo de rotación α se calcula como,

$$\alpha_{(k)} = |\vec{F}_{(k)}| \text{sign}(\sin(\beta_{(k)})) \quad (18)$$

Cuando el obstáculo es dinámico, el método de la fuerza ficticia hace que el robot evada al obstáculo móvil en dirección contraria al movimiento del obstáculo móvil, es decir, el robot móvil se moverá por detrás del obstáculo dinámico (ver Fig. 8) de esta forma el obstáculo móvil es eludido por detrás, lo cual proporciona seguridad al robot.

Para saber si un obstáculo es estático o dinámico, se hace una estima de la velocidad de dicho objeto, mediante la comparación de su posición actual con su posición en el anterior periodo de muestreo,

$$\left. \begin{aligned} u_{bx(k)} &= \frac{x_{b(k+1)} - x_{b(k)}}{T_0} \\ u_{by(k)} &= \frac{y_{b(k+1)} - y_{b(k)}}{T_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} u_{b(k)} = \sqrt{u_{bx(k)}^2 + u_{by(k)}^2} \\ \psi_{b(k)} = \arctan\left(\frac{u_{by(k)}}{u_{bx(k)}}\right) \end{cases}$$

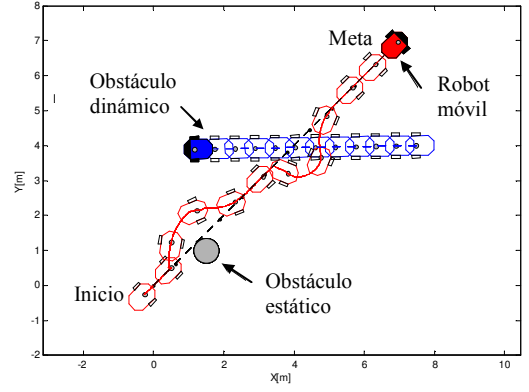


Figura 8. Evasión de un obstáculo estático y un obstáculo móvil.

Para evitar problemas de tipo herradura (Myers *et al.*, 2005), simplemente se usa una distancia d_N , normal a d , de forma que, si $d_N \leq d_{max}$, al ángulo α se le sumarán $\pi/2$, así por ejemplo, si existe un obstáculo en forma de "V" frente al robot, éste girará hasta poder salir del inconveniente.

Para que el método de la fuerza ficticia propuesto deje de actuar, es decir, para que el robot móvil "sepa" que ya ha evadido el obstáculo se utilizó el teorema del coseno: sea el triángulo $P_r P_d P_o$, de la Fig. 9, en donde P_r es la posición inicial del robot móvil; P_d es la posición deseada del robot móvil en $k+1$ y P_o es posición del obstáculo; φ es el ángulo opuesto al segmento que une los puntos P_r y P_d , es decir, el ángulo que nos indica si el obstáculo ya fue evadido o no.

Cuando $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$, el $\cos(\varphi)$ es negativo, lo cual nos indica que el obstáculo no ha sido evadido aún (Fig. 9a), mientras que cuando $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, el $\cos(\varphi)$ es positivo, por lo que el obstáculo ya ha sido evadido, como se muestra en la Fig. 9b.

Para mostrar como afectan los parámetros propuestos al método de la fuerza ficticia, en la Fig. 10 se muestra cinco experimentos con diferentes valores en los parámetros de ajuste. El robot debe seguir una trayectoria rectilínea desde el punto (0.0, 0.0) al punto (5.5, 5.5), en el camino se ha colocado un obstáculo estático. Los parámetros usados se muestran en la Tabla I, utilizando una velocidad máxima $u_{max} = 437.5$ [mm/s] y $\sigma = 0.2$.

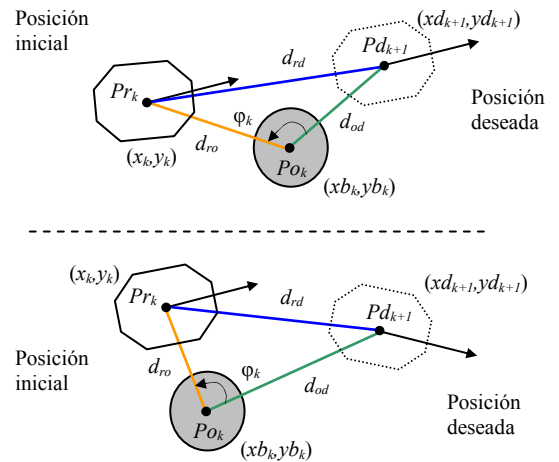


Figura 9. Criterio del coseno para el método de la fuerza ficticia
(a) obstáculo no evadido $\rightarrow \cos(\varphi) > 0$ ($-\pi/2 < \varphi < \pi/2$);
(b) obstáculo evadido $\rightarrow \cos(\varphi) < 0$ ($\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$)

Tabla I: Parámetros del método de la fuerza ficticia

	c_f	ρ	dist. recorrida [m]	colisión
1	0.99	0.467	8.630	No
2	0.99	0.167	8.484	No
3	0.85	0.167	8.078	No
4	0.85	0.937	8.243	No
5	0.23	0.167	7.716	Si

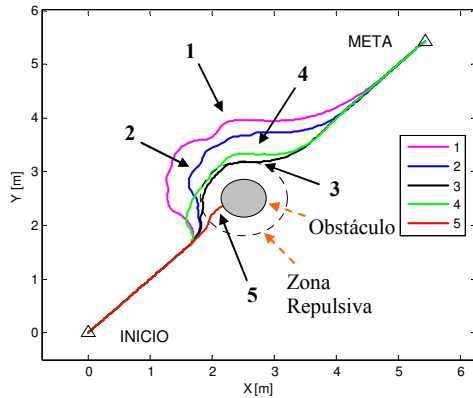


Figura 10. Influencia de los parámetros en el método de la fuerza ficticia propuesto.

El problema de control utilizando el método de la fuerza ficticia, que en este trabajo ha sido modificado para mejorar su funcionamiento, corresponde al diseño de un controlador, que luego de detectar los obstáculos en el entorno del robot móvil, modifica momentáneamente la velocidad de éste, así como también la trayectoria deseada a seguir, para de esta manera evitar dichos obstáculos.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

La metodología propuesta ha sido probada con robots PIONEER 3DX (con un radio aproximado de 400[mm]) uno de ellos equipado con un sensor SICK LMS200 de barrido láser (ver Fig. 11). El entorno real de pruebas para los robots PIONNER incluye puertas, corredores y obstáculos desconocidos. En este entorno (ver Fig. 11), el robot sigue una trayectoria dada de manera autónoma. La adquisición de datos y todos los algoritmos requeridos son calculados en tiempo real en el computador que posee el robot.

En las Figs. 12 y 13 se presentan los perfiles de velocidad del primer experimento realizado (Fig. 15). La velocidad lineal está limitada a $u_{\max} = 437.5[\text{mm/s}]$ y la velocidad angular a $\omega_{\max} = 50[\text{grados/s}]$. En estas gráficas se puede observar que cuando el robot termina de evadir un obstáculo aumenta su velocidad para volver a alcanzar la trayectoria deseada, luego vuelve a la velocidad promedio de 300[mm/s].



Figura 11. Robots PIONEER y su entorno.

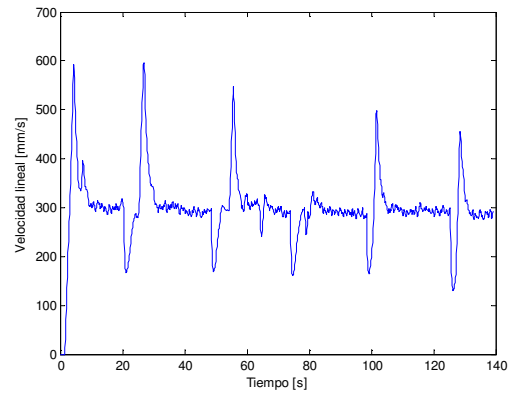


Figura 12. Primer experimento. Perfil de velocidad lineal.

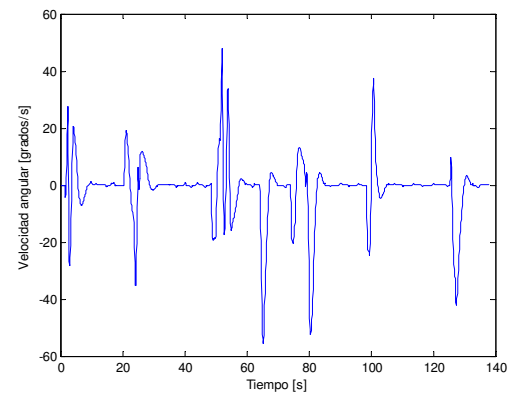


Figura 13. Primer experimento. Perfil de velocidad angular.

Se utilizó un tiempo de muestreo de $T_0 = 0.1[\text{s}]$ y un valor de $a = 200[\text{mm}]$ (ver Fig. 1). La trayectoria de referencia fue generada a una velocidad constante de 218.75[mm/s]. Para la evasión de obstáculos se ha tomado $d_{\min} = 300[\text{mm}]$ y $d_{\max} = 700[\text{mm}]$.

Una comparación entre la trayectoria deseada y la trayectoria seguida por el robot móvil en el entorno de pruebas se presenta en la Fig. 14, en la gráfica también se puede observar la manera en que el robot móvil evadió los obstáculos del entorno para luego regresar a la trayectoria deseada. Se debe recalcar que en el actual experimento la trayectoria deseada no espera al robot móvil, mientras éste evade los obstáculos, por la velocidad del robot móvil debe incrementarse luego de la evasión para poder alcanzar a la referencia nuevamente.

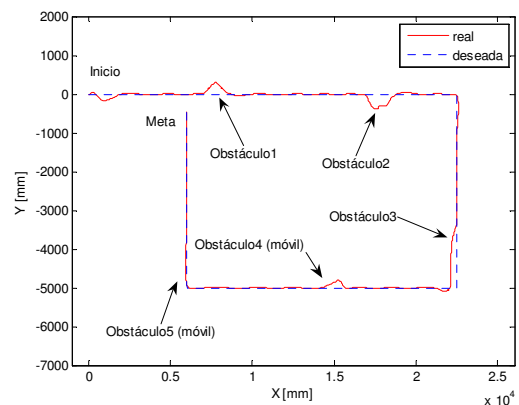


Figura 14. Trayectorias experimentales extraídas del entorno de pruebas - real (línea roja continua) y deseada (línea azul punteada).

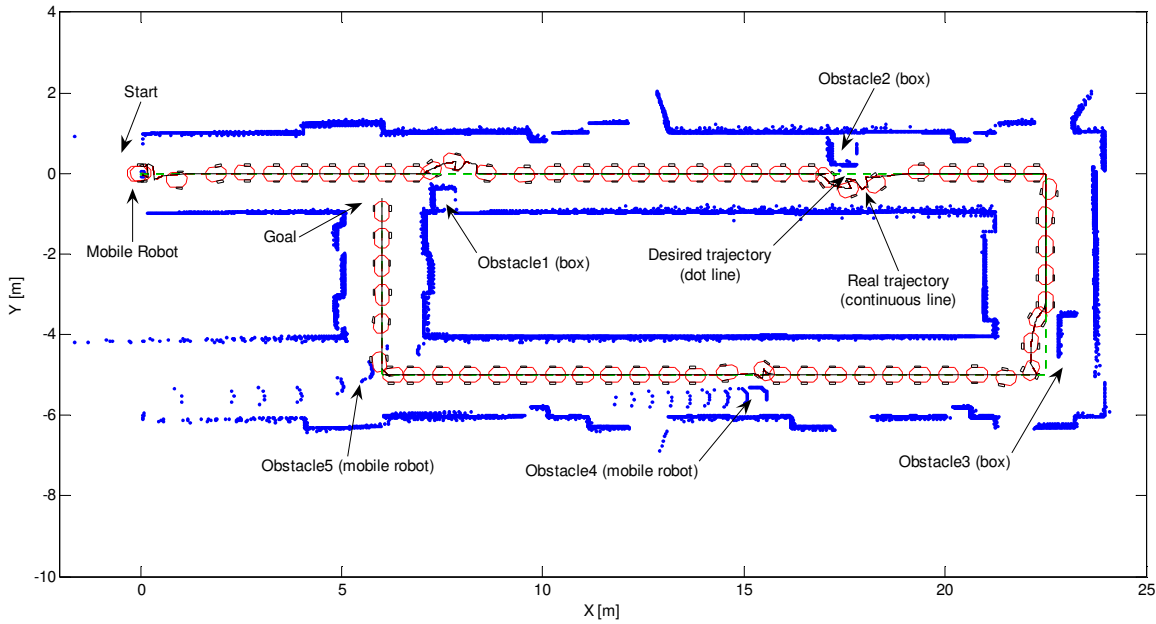


Figura 15: Entorno del primer experimento y trayectorias descritas por el robot móvil

Tabla II: Resumen de los errores experimentales en la trayectoria

u_{ref} [mm/s]	Max. error [mm]	Vel. lineal max. [mm/s]	Vel. angular max. [grad/s]
100	36	257.6	44.1
200	52	374	42.34
300	87	597.2	-55.59

La Tabla II presenta un resumen de los experimentos llevados a cabo para diferentes velocidades de referencia. Los resultados más representativos de estas pruebas se muestran en este trabajo. Es importante destacar que el valor absoluto de la diferencia entre las trayectorias real y deseada, una vez que el robot móvil ha alcanzado el camino geométrico predefinido, será denominado error.

Puede observarse que el sistema de control propuesto depende de la precisión y la exactitud de los sensores, sin embargo, es independiente del método de sensado. Esto debido a que no solo sensores internos (odometría), sino también sensores externos (láser) pueden ser usados; dependiendo de la aplicación, complejidad o del problema a resolver.

En la Fig. 15, las líneas gruesas corresponden a los obstáculos detectados en línea, los cuales son incorporados de forma incremental dentro del mapa, a medida que el robot avanza. El robot fue capaz de alcanzar trayectoria deseada de forma correcta minimizando el error de seguimiento.

Comentario 3. El valor máximo del error en el seguimiento de trayectorias se calcula cuando el método de la fuerza ficticia no actúa, es decir, cuando el robot móvil sigue la trayectoria deseada sin la presencia de obstáculos. Cuando un obstáculo es detectado mediante los sensores, la trayectoria de referencia es modificada, por lo que, durante el tiempo de evasión el error de seguimiento de trayectoria no es evaluado.

El segundo experimento en el entorno de una oficina. La Figura 16 muestra el mapa del entorno experimental con la trayectoria descrita por el robot móvil, así como también la trayectoria deseada (línea punteada) y los obstáculos del entorno detectados en línea (paredes, cajas, personas, etc.), los cuales son añadidos dentro del mapa, según el movimiento del robot móvil.

Puede observarse que el sistema de control propuesto es dependiente de la precisión del sistema sensorial; sin embargo es independiente del sensor utilizado. Esto se debe al hecho de que no solo los sensores internos (odometría), sino también los sensores externos (láser) pueden ser utilizados, dependiendo de la aplicación, complejidad o del problema a ser resuelto.

Cuando el robot móvil encuentra un obstáculo, su velocidad se reduce hasta cuando la posible colisión ha sido superada. Para esta prueba el parámetro σ_k (ver 18) tuvo un valor más pequeño que en el experimento anterior.

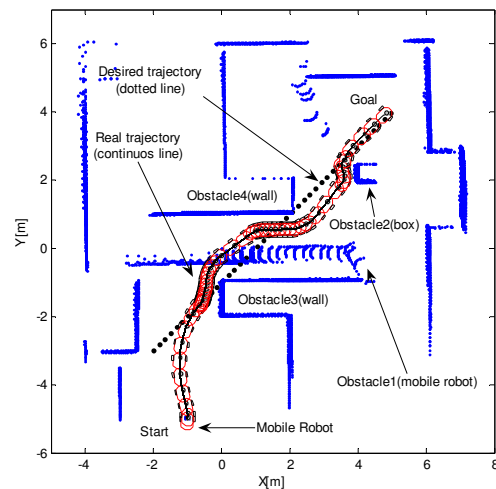


Figura 16: Trayectorias del segundo entorno experimental.

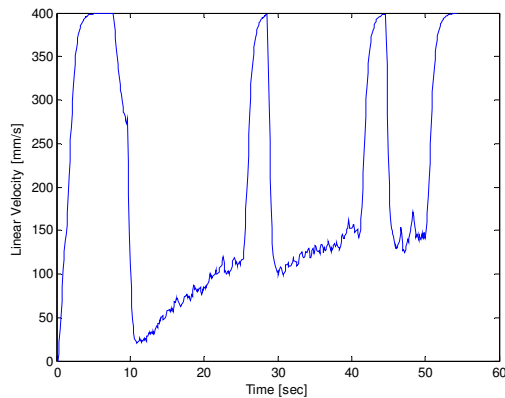


Figura 17: Segundo experiment. Perfil de velocidad lineal.

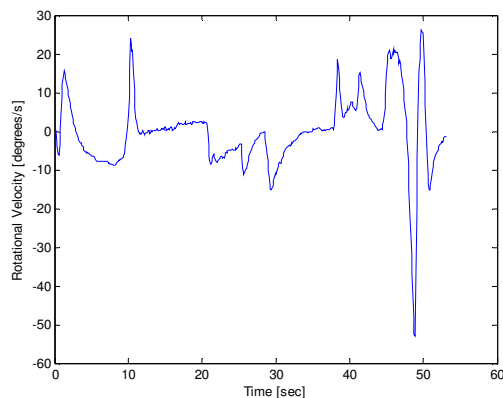


Figura 18: Segundo experiment. Perfil velocidad angular.

Los perfiles de velocidad lineal y angular se presentan en las figuras 17 y 18, respectivamente. La velocidad lineal está limitada a $|u_{\max}| = 400[\text{mm/s}]$ y la velocidad angular a $|\omega_{\max}| = 60[\text{grados/s}]$. la trayectoria de referencia fue generada con una velocidad constante $u_{\text{ref}} = 320[\text{mm/s}]$.

Comentario 4. Un aspecto importante para aclarar el comportamiento del robot móvil durante los experimentos es que en el seguimiento de trayectoria, a diferencia de en el seguimiento de caminos, el punto deseado no espera por el robot móvil debido que la trayectoria es un camino parametrizado en el tiempo. El robot móvil trata de alcanzar la trayectoria pre-establecida mientras el punto deseado se mueve. Las velocidades del robot móvil y de la trayectoria se igualan, cuando la trayectoria deseada es alcanzada por el robot. Si un obstáculo causa la activación del método de la fuerza ficticia, el robot móvil reduce su velocidad, por lo que la trayectoria se adelanta al robot, de allí que cuando el obstáculo ha sido ya evadido, el robot móvil debe acelerar (hasta su velocidad máxima) para alcanzar nuevamente a la trayectoria deseada (ver Figs. 10, 15, 17 and 18). A pesar de esta demandante asignación, el funcionamiento del robot móvil durante el experimento es satisfactorio.

Comentario 5. Note que en el problema de seguimiento de trayectoria enfocado en este documento, la referencia nunca espera por el robot móvil, por el contrario la referencia avanza según lo hace el tiempo. Existen otros métodos para parar la referencia mientras que el robot móvil se aproxima a la misma (Del Rio, *et al.* 2002; Lee & Park, 2003), pero en este trabajo la situación más demandante ha sido analizada y superada, pues el

robot móvil tiene que alcanzar la referencia tan pronto como sea posible sin chocar con los obstáculos que se presenten.

6. CONCLUSIONES

Se ha presentado un nuevo enfoque para la navegación de robots móviles en entornos dinámicos, utilizando la teoría del álgebra lineal y una modificación del método de fuerza ficticia. Este controlador permite una navegación libre de colisiones para el seguimiento de trayectorias. Este enfoque combina un controlador basado en el modelo dinámico de un robot móvil tipo unicycle, la teoría del álgebra lineal y los métodos numéricos con una estrategia reactiva de evasión de obstáculos. Los resultados experimentales muestran que la combinación de estas técnicas produce un controlador eficiente para la navegación de robots en ambientes donde existen tanto obstáculos estáticos como obstáculos dinámicos.

Una característica atractiva de este controlador basado en la teoría del álgebra lineal es que su implementación es simple y efectiva. A través de los experimentos realizados se puede concluir que el error entre las trayectorias real y deseada es muy pequeño, con respecto a las dimensiones del robot.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente financiado por el Servicio Alemán de Intercambio Académico (DAAD - Deutscher Akademischer Austausch Dienst), la Universidad Nacional de San Juan (UNSJ) y por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET - National Council for Scientific Research), Argentina. Además agradecemos la cooperación del Instituto de Sistemas en Tiempo Real (RTS) de la Universidad de Hannover, Alemania.

REFERENCIAS

- Borenstein J. and Koren Y., (1991). "The vector field histogram-fast obstacle avoidance for mobile robots", IEEE Transact. on Robotics and Autom., pp.278-288.
- Connolly C., Burns J., Weiss R., (1990). "Path planning using Laplace's equation," Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 2102-2106.
- De la Cruz C., (2006). "Control de Formación de Robots Móviles", Tesis Doctoral, INAUT - UNSJ.
- Fox D., Burgard W., Thrun S., (1997). "The dynamic window approach to collision avoidance," IEEE Robotics & Automation Magazine, vol. 4.
- Fraichard T. and Asama H., (2003). "Inevitable collision states: a step towards safer robots?" IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, IROS.
- Fraichard T. and Scheuer A., (1994). "Car-like robots and moving obstacles," IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA.
- Jang E., Jung S., Hsia T., (2004). "Collision Avoidance and Control of a Mobile Robot Using a Hybrid Force Control Algorithm", 30th Annual Conf. IEEE Industrial Electronics Society, pp. 413-418.
- Jung S., Jang E., Hsia T., (2005). "Collision Avoidance of a Mobile Robot Using Intelligent Hybrid Force Control Technique", Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 4418-4423.

- Latombe J. C., (1991). "Robot Motion Planning", **vol. 24**, Dordrecht, The Netherlands Kluwer.
- Masoud A., (1996). "Using hybrid vector-harmonic potential fields for multi-robot, multi-target navigation in a stationary environment", Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, pp.3564 – 3571.
- Myers T. and Vlacic L., (2005). "Autonomous Driving in a Time-Varying Environment", IEEE - Advanced Robotics and its Social Impacts, pp. 53-58.
- Nak Y. K. and Simmons R., (1998). "The lane-curvature method for local obstacle avoidance," IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA.
- Owen E. and Montano L., (2006). "A robocentric motion planner for dynamic environments using the velocity space", IEEE Int. Conf. Intelligent Robots and Systems, IROS.
- Poty A., Melchior P., Oustaloup A., (2004). "Dynamic path planning by fractional potential ", Computational Cybernetics - ICCCC, pp.365-371.
- Rosales A., Scaglia G., Mut V., di Sciascio F., (2009). "Trajectory Tracking of Mobile Robots in Dynamic Environments: A Linear Algebra Approach", Robotica Cambridge University Press.
- Rosales A., Scaglia G., Mut V., di Sciascio F., (2006a). "Controller Designed by means of Numeric Methods for a Benchmark Problem: RTAC (Rotational Translational Actuator)", IEEE - Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conf., pp. 97-104.
- Rosales A., Scaglia G., Mut V., di Sciascio F., (2006b). "Diseño de un Controlador mediante Métodos Numéricos para un Problema No Lineal Clásico: RTAC (Rotational Translational Actuator)", XII Cong. Latinoam. de Control Automático - CLCA.
- Scaglia G., Quintero O., Mut V., di Sciascio F., (2006). "Diseño de un Controlador basado en Métodos Algebraicos: Aplicación a Robotica Movil", XII Cong. Latinoam. de Control Automático - CLCA.
- Scaglia G., Mut V., Rosales A., Quintero O., (2007). "Tracking Control of a Mobile Robot using Linear Interpolation", IMAACA.
- Scaglia G., Quintero O., Mut V., di Sciascio F., (2008). "Numerical Methods based Controller design for Mobile Robots", Robotica Cambridge University Press.
- Scaglia G., Rosales A., Quintero O., Agarwal R., (2009). "A Linear-Interpolation based Controller Design for Path Tracking of Mobile Robots", Control Engineering and Practice.
- Seder M., Macek K., Petrovic I., (2005). "An integrated approach to realtime mobile robot control in partially known indoor environments", Proc. Conf. IEEE Industrial Electronics Society.
- Simmons R., (1996). "The curvature-velocity method for local obstacle avoidance," IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA.
- Stachniss C. and Burgard W., (2002). "An integrated approach to goal directed obstacle avoidance under dynamic constraints for dynamic environments," IEEE Int. Conf. Intelligent Robots and Systems, IROS.
- Strang G., (1980). *Linear Algebra and its Applications*, Academic Press, New York.
- Tian J., Gao M., Lu E., (2007). "Dynamic Collision Avoidance Path Planning for Mobile Robot Based on Multi-sensor Data Fusion by Support Vector Machine", Int. Conf. on Mechatronics and Automation, ICMA07, pp.2779-2783.
- Ulrich I. and Borenstein J., (2000). "VFH*: local obstacle avoidance with look ahead verification", Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, **vol.3**, pp.2505-2511.
- Ulrich I. and Borenstein J., (1998). "VFH+: reliable obstacle avoidance for fast mobile robots", Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, **vol.2**, pp.1572-1577.
- Wang D., Liu D., Dissanayake G., (2006). "A Variable Speed Force Field Method for Multi-Robot Collaboration", Proc. Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, pp.2697-2702.