

## APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE ROBOTS MANIPULADORES A LA BIOMECÁNICA DEL BRAZO HUMANO<sup>1</sup>

Carlos F. Rodríguez, Juan C. Botero, Hugo Quintero

*Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Los Andes, Bogotá, Colombia*

**Resumen:** Este artículo presenta la aplicación de un conjunto de técnicas propias de la teoría de los robots manipuladores al estudio del movimiento del brazo humano. Para ello el brazo humano se modela como un robot manipulador redundante. En particular se aplica el concepto de índices de desempeño para predecir posturas óptimas del brazo durante la realización de tareas. En el estudio se incluyen tanto posiciones estáticas, como secuencias de posiciones para la formulación de trayectorias óptimas de movimiento. *Copyright © 2007 CEA-IFAC*

**Palabras Clave:** Movimiento del brazo, Trayectorias del brazo, Índices de desempeño.

### 1. INTRODUCCIÓN

El estudio del movimiento del cuerpo humano se ha centrado fundamentalmente en el estudio de la marcha humana que por ser un movimiento repetitivo permite la definición de patrones de normalidad a partir de mediciones estadísticas. En contraposición el análisis del movimiento de los miembros superiores es mucho más complejo y la extensión de los métodos de la marcha humana resulta insuficiente por la gran versatilidad de acciones que se pueden realizar con los brazos. (Rau, *et al.*, 2000)

Así como las piernas dotan de movilidad al individuo permitiéndole desplazarse, son los brazos los que le permiten interactuar con diversos objetos, realizando movimientos con características dinámicas variadas: gran precisión, mucha fuerza, gran velocidad, etc.

Una posible aproximación a la evaluación del desempeño de los miembros superiores, es la aplicación de algunos criterios propios de la robótica al área de la biomecánica. Esta aproximación es curiosa pues los robots manipuladores surgieron como la imitación mecánica de los brazos humanos. Aunque en la actualidad diversos autores trabajan en este campo, es escasa la literatura que se encuentra sobre el tema (Klopčar, *et al.* 2007, Murphy, *et al.* 2006, Petuskey, *et al.* 2006).

<sup>1</sup>Trabajo financiado por COLCIENCIAS. Contrato 142-2002. Proyecto "Desarrollo de una Herramienta de Análisis Cuantitativo de Movimiento en Extremidades Superiores"

Este artículo presenta un nuevo método de evaluación del desempeño del miembro superior utilizando la teoría de robots manipuladores. Se entiende desempeño como la capacidad de generar fuerzas y movimientos controlados con la mano. Se presenta el modelo simplificado del brazo humano como un robot manipulador y se expone la aplicación del concepto de manipulabilidad en la predicción de las trayectorias del brazo.

La técnica propuesta potencialmente esta técnica tiene aplicaciones en la evaluación de puestos de trabajo y actividades laborales. También sirve para valorar terapias y otro tipo de prácticas medicas encaminadas a mejorar el desempeño de pacientes con problemas de movilidad de las extremidades superiores.

### 2. MODELO BIOMECÁNICO DEL BRAZO HUMANO

Como primer paso se define un modelo para describir la estructura del brazo y su movilidad asimilándolo a un robot manipulador: el brazo se considera como un mecanismo en cadena abierta de cuatro eslabones que representan el tórax (base), el brazo, el antebrazo y la mano. Estos cuatro eslabones se suponen como

cuerpos rígidos conectados por uniones mecánicas holonómicas, que representan las articulaciones de hombro, codo y muñeca.

El manipulador tiene un total de siete grados de libertad, asociados con siete movimientos del brazo. De esta forma cualquier configuración del brazo estará completamente definida mediante el vector de variables articulares (Rodríguez, *et al.* 2003).

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7]^T$$

En la tabla 1 se asocian estas variables articulares con los movimientos del brazo, los cuales se ilustran en la figura 1.

Tabla 1. Movimientos del brazo y grados de libertad

Eslabón	Unión	GDL	Movimiento Asociado
Tórax	Ninguna	0	Ninguno
Brazo	Hombro	3	Flexión ( $q_1$ ), Abducción ( $q_2$ ) y Rotación de Hombro ( $q_3$ )
Antebrazo	Codo	2	Flexión ( $q_4$ ) y Pronación ( $q_5$ )
Mano	Muñeca	2	Flexión ( $q_6$ ) y Desviación ( $q_7$ )

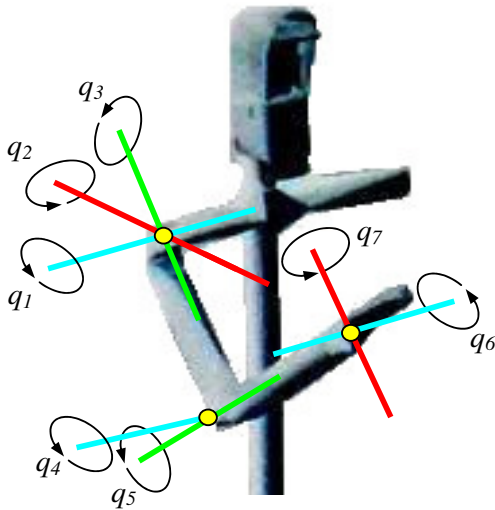


Figura 1. Grados de libertad del modelo del brazo humano.

### 3. MODELO CINEMÁTICO DEL BRAZO

Aplicando a este modelo los métodos tradicionales de descripción cinemática de robots manipuladores, es posible determinar la posición y orientación de la mano. Gracias a que los ejes de los tres últimos grados de libertad se intersectan en un punto (el centro de la muñeca), el modelo se puede dividir en dos partes (desacoplo brazo – muñeca): una primera transformación desde el sistema fijo hasta el centro de la muñeca, que permite ubicar este punto en una

posición deseada en el espacio y una segunda transformación que permite describir la orientación de la mano (Sciavicco, y Siciliano, 1996). Se definen entonces dos sub-vectores de configuración:

$$\mathbf{q}_p = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$$

$$\mathbf{q}_o = [q_5 \ q_6 \ q_7]^T$$

De tal forma que la cinemática directa del brazo se puede describir como:

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}_0^4(\mathbf{q}_p) \mathbf{T}_5^7(\mathbf{q}_o)$$

donde  $\mathbf{X}$  es la matriz de transformación homogénea de la mano respecto al tórax y las matrices  $\mathbf{T}_0^4$  y  $\mathbf{T}_5^7$  representan las dos partes del modelo antes mencionadas.

Es de notar, que el tipo de muñeca descrita por  $\mathbf{q}_o$ , no es exactamente igual a la muñeca esférica usada en los robots manipuladores. Sin embargo la descripción de orientación de la mano es bastante simple utilizando parámetros de Euler Z-Y-X (Sciavicco, y Siciliano, 1996).

A partir de la información contenida en la matriz  $\mathbf{T}_0^4$  se puede calcular una sub-matriz Jacobiana que relaciona la velocidad lineal del centro de la muñeca con las velocidades articulares de los cuatro primeros grados de libertad:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_p(\mathbf{q}_p) \dot{\mathbf{q}}_p$$

donde  $\mathbf{J}_p$  es una matriz de (3 x 4) que es función de las primeras cuatro variables articulares.

### 4. INDICES DE MANIPULABILIDAD

A partir de la formulación cinemática diferencial, es posible aplicar criterios propios de los robots manipuladores al brazo humano. Como se verá posteriormente la manipulabilidad (Yoshikawa, 1985) parece representar el criterio a optimizar en algunos movimientos del brazo humano.

La manipulabilidad se puede interpretar como la eficacia con la cual el brazo transmite fuerza y velocidad a su órgano terminal (Staffetti, *et al.*, 2002). Considerando la conservación de energía, las direcciones preferentes de fuerza serán las menos aptas para desarrollar altas velocidades, y viceversa. La manipulabilidad se representa como un elipsoide para cada configuración del brazo, donde la distancia del centro del elipsoide a la frontera es proporcional a la facilidad de transmisión de fuerza o velocidad en esa dirección.

El índice de manipulabilidad para manipuladores redundantes se define como (Yoshikawa, 1985):

$$w = \sqrt{\text{Det}(\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))}$$

donde  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{J}^T(\mathbf{q})$  denotan la matriz Jacobiana y su transpuesta, respectivamente.

Se define el índice de manipulabilidad de fuerza como:

$$w' = \frac{1}{w}$$

A continuación se presentan algunos ejemplos de la aplicación de estos índices al estudio del desempeño del brazo. Para facilitar la visualización se considera inicialmente un brazo compuesto de dos barras (húmero y antebrazo), cuyo movimiento ocurre en un plano. En este caso los elipsoides se reducen a elipses.

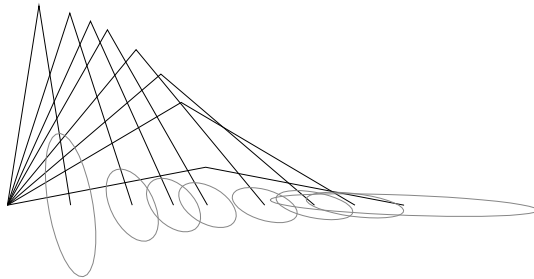


Figura 2. Elipses de manipulabilidad de fuerza para diferentes configuraciones de un brazo plano de dos eslabones (escala de 1:100)

La figura 2 muestra diferentes configuraciones del brazo con sus respectivas elipses de manipulabilidad de fuerza. Se observa como el semieje mayor de la elipse tiende a infinito cuando el brazo se acerca a una configuración singular. Por ejemplo cuando el brazo se estira, teóricamente podría resistir una fuerza infinita en la dirección de alineamiento del húmero y el antebrazo.

La figura 3 muestra el comportamiento del índice de manipulabilidad de fuerza  $w'$ , el cual teóricamente tiende a infinito en las configuraciones singulares

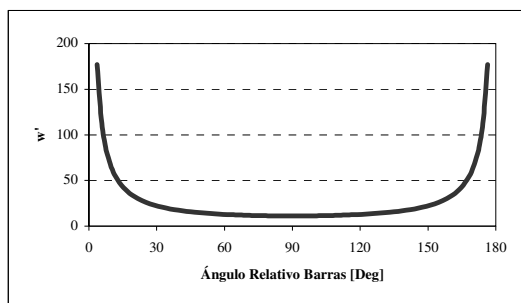


Figura 3. Índice de manipulabilidad de fuerza ( $w'$ ) para un brazo plano de dos eslabones. .

La figura 4 muestra las elipses de manipulabilidad de velocidad para las mismas configuraciones anteriores. Comparando las figuras 2 y 4, se puede verificar la dualidad de fuerza y velocidad: para cada configuración los ejes de las elipses de manipulabilidad se encuentran rotados noventa grados haciendo que la dirección del eje mayor de la

elipse de velocidad coincida con la dirección del eje menor de la elipse de fuerza y viceversa.

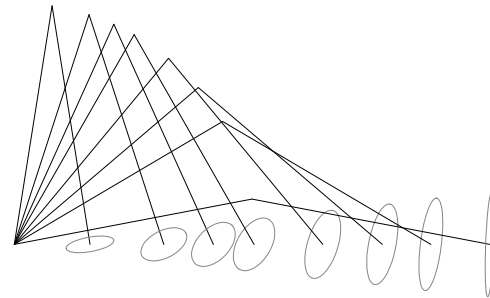


Figura 4. Elipses de manipulabilidad de velocidad. (escala 1:10)

En la figura 5 se muestra cómo varía el índice de manipulabilidad de velocidad  $w$ , anulándose en las configuraciones singulares (donde el manipulador pierde un grado de libertad). Además es posible observar cómo el máximo valor de manipulabilidad de velocidad se alcanza cuando el ángulo entre las dos barras se acerca a  $90^\circ$ . Esta observación coincide con la configuración que adopta el brazo cuando se desarrollan tareas que requieren gran control en la velocidad, por ejemplo escribir.

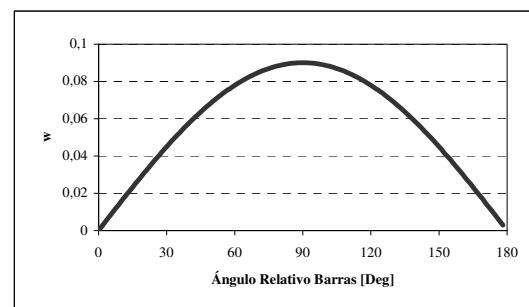


Figura 5. Índice de manipulabilidad de velocidad ( $w$ ) para un brazo plano de dos eslabones.

## 5. CONFIGURACIONES ÓPTIMAS PARA REALIZAR UNA TAREA SIMPLE

El estudio de la manipulabilidad se puede usar para el modelo del brazo completo, en algunos casos sencillos. Por ejemplo, estudiando la configuración del brazo para llevar una mano al hombro es posible predecir que es mas facil usar la mano del brazo contrario.

El modelo del brazo humano propuesto es un manipulador redundante, ya que la posee más grados de libertad de los necesarios para posicionar y orientar la mano en el espacio. Esto aumenta el volumen de su espacio de trabajo y le permite acceder a configuraciones que eviten obstáculos de forma efectiva o tomar configuraciones optiizando algún criterio. Este hecho se utilizará para estudiar la manipulabilidad como criterio a optimizar por el brazo humano.

Para un manipulador redundante el modelo cinemático inverso es de la forma (Chiu, 1988):

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \mathbf{z}$$

en donde  $\mathbf{J}^+$  denota la pseudo-inversa derecha de la matriz Jacobiana (Sciavicco y Siciliano, 1996),  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de  $(n \times n)$  y  $\mathbf{z}$  es un vector arbitrario en  $\mathbb{R}^n$ .

El segundo término de esta ecuación es la solución homogénea de las velocidades articulares y representa un movimiento interno de las articulaciones que no produce movimiento en el órgano terminal. Este proceso se conoce como reconfiguración.

Es posible utilizar la solución homogénea del modelo cinemático inverso para optimizar algún criterio cinemático (Chiu, 1988). Para ello se define el vector arbitrario  $\mathbf{z}$  como el gradiente del índice de desempeño que se desea optimizar, de tal forma que la reconfiguración ocurre en la dirección en la cual aumenta el índice de desempeño (Pámanes, *et al.*, 1999):

$$\mathbf{z} = k \nabla \mathbf{H}(\mathbf{q}_p)$$

donde  $\mathbf{H}(\mathbf{q}_p)$  es el índice a maximizar y  $k$  es un coeficiente escalar.

Como método alternativo se puede emplear directamente una optimización con restricciones. En este caso no se requiere definir el vector  $\mathbf{z}$ , sino directamente se define la función a optimizar que en este caso corresponde con el criterio cinemático seleccionado.

Para el caso del modelo propuesto del brazo humano, la cinemática inversa se calcula siguiendo los siguientes pasos:

- Se calcula la posición deseada del centro de la muñeca para alcanzar el punto de la tarea.
- Se resuelve el vector  $\mathbf{q}_p$  para alcanzar el punto centro de la muñeca minimizando la norma euclidiana del vector de error de posición del centro de la muñeca.
- Se reconfigura el brazo optimizando el criterio cinemático escogido.
- Se resuelve el vector  $\mathbf{q}_o$  para lograr la orientación deseada.

Como ejemplo se define una tarea simple a través de una lista de puntos en el espacio por los cuales debe pasar la mano sin ejercer fuerza. La tarea simula la acción de llevar la mano entre teclas externas de un teclado de computador (p.ej desde la tecla Tab hasta la tecla Intro). La tabla 2 muestra la ubicación espacial de los puntos de la tarea propuesta, definidos respecto a un sistema de coordenadas global fijo en el tórax, cuyo origen se ubica sobre el hombro derecho. El eje X es la dirección perpendicular al plano sagital

(positivo hacia delante), el eje Y es perpendicular al plano lateral (positivo hacia la izquierda) y el eje Z es vertical (positivo hacia arriba).

**Tabla 2. Tarea llevar mano entre dos extremos de un teclado de computador (medidas en mm.)**

Punto Tarea	X	Y	Z
1	300	300	-380
2	300	50	-380

Utilizando la manipulabilidad como criterio cinemático a optimizar y aplicando los dos métodos de optimización propuestos, se obtienen las configuraciones correspondientes a los puntos que definen la tarea (Tabla 3).

**Tabla 3. Resultados configuraciones óptimas (ángulos en grados)**

Método Utilizado	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	q <sub>4</sub>	q <sub>5</sub>	q <sub>6</sub>	q <sub>7</sub>
Gradiente							
Punto 1	8	9	-42	90	-170	27	34
Punto 2	28	58	-77	91	-120	-13	28
Restricción							
Punto 1	52	15	-88	76	-150	12	-45
Punto 2	30	55	-86	84	-74	-2	-45

Se puede observar que mediante el método de optimización con restricción los resultados obtenidos son más parecidos a los movimientos realizados por una persona normal. Además, este método resulta un poco más eficiente en cuanto al tiempo de cálculo pues evita el cálculo del gradiente del criterio a optimizar.

Adicionalmente se realizó el mismo cálculo con otros criterios cinemáticos siguiendo la idea propuesta para manipuladores en Klein, y Blaho (1987). Se utilizaron la manipulabilidad, el número de condición de la matriz Jacobiana transpuesta y la disponibilidad de rango articular (JRAE). La tabla 4 resume estos resultados.

**Tabla 4. Resultados comparativos con diferentes criterios cinemáticos (ángulos en grados)**

Criterio	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	q <sub>4</sub>	q <sub>5</sub>	q <sub>6</sub>	q <sub>7</sub>
Manipulabilidad							
Punto 1	52	15	-88	76	-150	12	-45
Punto 2	30	55	-86	84	-74	-2	-45
Número de Condición							
Punto 1	5	-2	-41	97	-170	64	5
Punto 2	-9	5	-5	116	-170	80	5
JRAE							
Punto 1	18	18	60	84	-82	21	5
Punto 2	11	56	-50	100	-79	26	5

La optimización de la manipulabilidad como criterio cinemático conduce a resultados que se asemejan bastante a las posiciones de función para el hombro (cerca de 45° de flexión y 60° de abducción) y la muñeca (cerca de 45° de desviación radio-cubital y

15° de flexión). Estas posiciones de función corresponden a estados de equilibrio de los músculos (Kapandji, 1993).

Con este y otros ejemplos similares puede concluirse que la manipulabilidad es el criterio que optimiza el brazo humano en las posiciones extremas de un movimiento.

## 6. CONFIGURACIONES ÓPTIMAS PARA UNA TRAYECTORIA REAL

El siguiente paso consiste en verificar si el brazo humano optimiza la manipulabilidad a lo largo de toda la trayectoria de movimiento. Para ello se realizó un estudio en el Laboratorio de Análisis de Movimiento del Instituto de Ortopedia Infantil Roosevelt (IOIR, Bogotá Colombia), con 10 pacientes entre los 5 y 7 años. Para el estudio, se diseñó un experimento que consiste en tomar un objeto ubicado en una mesa y llevarlo a la boca. Este movimiento representa una actividad de la vida cotidiana similar a la propuesta en Petuskey et al, 2006.

Para el estudio se colocaron marcadores reflectivos sobre el cuerpo con el fin de identificar el movimiento de los diferentes segmentos del brazo. La ubicación de los marcadores reflectivos se observa en la figura 6 y en la Tabla 5.

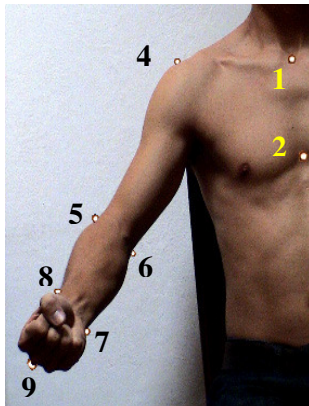


Figura 6. Conjunto de marcadores para el análisis de movimiento del brazo.

Tabla 5. Ubicación Marcadores Reflectivos.

Marcador	Ubicación
1	Articulación Esterno-Clavicular
2	Xifoides
3	7° Vértebra Cervical
4	Articulación Acromio-Clavicular
5	Epicóndilo Externo
6	Epicóndilo Interno
7	Prominencia del Cúbito
8	Prominencia del Radio
9	2do Metacarpiano

Aunque el conjunto de marcadores se utilizó para calcular el movimiento de los segmentos definidos previamente, podrían utilizarse para calcular el movimiento de modelos más complejos del brazo humano (Klopkar, et al, 2007, Williams, et al, 2006).

Para la medición de movimiento se utilizó la técnica de fotogrametría a partir de video digital. El Laboratorio cuenta con un sistema APAS de 5 cámaras que graban imágenes a una frecuencia de 60 Hz. Los marcadores son esferas de 15 mm de diámetro cubiertas con cinta reflectiva.

La trayectoria teórica se definió de acuerdo con Flash, y Hogan (1985), siguiendo las siguientes condiciones:

- El camino de la mano seguirá una línea recta entre el punto inicial y el final de la tarea.
- El perfil de velocidad en dirección del movimiento será una curva suave, simétrica y con un único máximo local ubicado su punto medio.

De esta forma la tarea se puede definir estableciendo únicamente los puntos inicial y final referenciados al sistema global (Tabla 6).

Tabla 6. Definición tarea llevar un vaso a la boca

Punto Tarea	X	Y	Z
Inicial	300	-10	190
Final	158	38	28

Se generó entonces la trayectoria usando la manipulabilidad como criterio cinemático a optimizar en todos los puntos de la tarea. Los resultados del camino seguido por la mano en el espacio se muestran en la figura 6 con línea punteada. Sin embargo se verificó que la trayectoria seguida por la mano de los pacientes no es exactamente una línea recta sino el movimiento descrito en la figura 7 con línea continua. Las diferencias entre la trayectoria predicha y la experimental son evidentes en especial en el movimiento en el eje Z: en el experimento el objeto se sube más rápidamente a la altura de la boca que en la predicción.

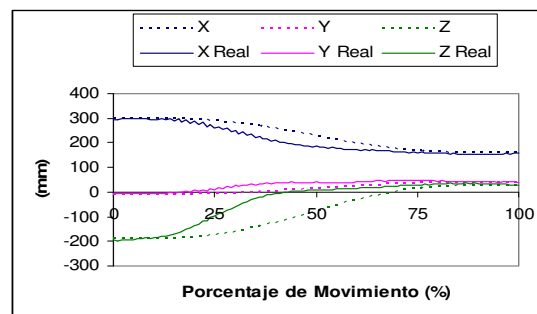


Figura 7. Trayectoria predicha y experimental del movimiento de llevar un objeto a la boca.

Los resultados de la predicción de los movimientos articulares y su comparación con los datos experimentales son similares a los de la trayectoria de la mano, en el sentido que la predicción se ajusta a las tendencias generales del movimiento. En la figura 8 se presentan los resultados del movimiento articular (vector  $q_p$ ) para algunos pacientes seleccionados al azar. Se utiliza la convención de signos para los movimientos propuesta en Rodríguez, *et al.*, 2006.

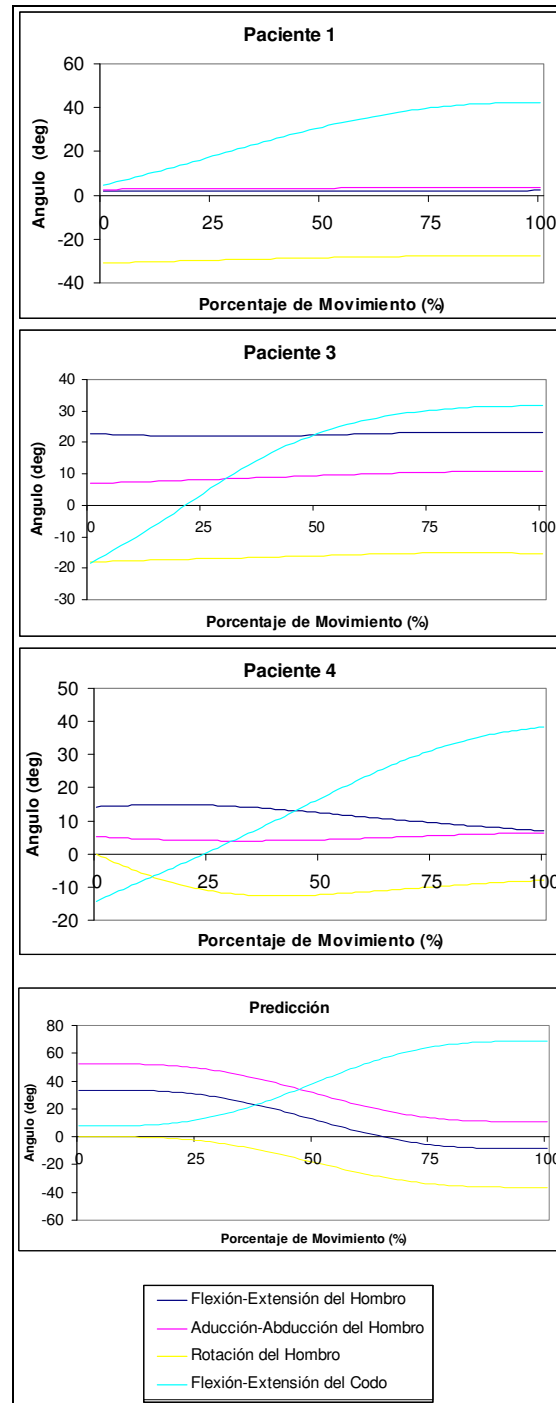


Figura 8. Comparación de los movimientos articulares predichos y algunos resultados experimentales en la tarea de llevar un objeto a la boca.

La dificultad de reproducir exactamente los puntos de definición de la tarea (Tabla 6), para cada paciente, hace que la comparación cuantitativa directa no sea posible.

Sin embargo, hay un conjunto de características predichas que se pueden observar analizando las gráficas de resultados:

- El movimiento se realiza predominantemente mediante la flexión de codo y la rotación negativa del hombro. Esta última, en general compensa el hecho que el codo se retira del tórax durante la ejecución de la tarea.
- Los movimientos de flexión-extensión y aducción-abducción responden a la configuración adoptada en la posición inicial de la tarea que depende de la ubicación relativa del objeto manipulado respecto al sistema fijo en el tórax.
- Los valores que toman estos ángulos determinan la posición del codo respecto al tórax. Se pueden identificar diversos hábitos para realizar la tarea, desde movimientos con el codo bastante pegado al tórax (Paciente 1) hasta el movimiento predicho en el cual se inicia con el codo separado del tórax y se va acercando a medida que transcurre la tarea.

## 7. CONCLUSIONES

Este artículo presenta la aplicación de la teoría de robots manipuladores a la biomecánica el brazo humano. En particular se utiliza el concepto de manipulabilidad y se propone como el criterio que optimiza el brazo humano para realizar tareas donde se requiere poca fuerza.

Los resultados de la aplicación de este criterio al posicionamiento del brazo para tareas simples son intuitivamente muy buenos. Sin embargo, los resultados de su aplicación a trayectorias óptimas, solo se pueden considerar como tendencias adecuadas para la ejecución de tareas y no como patrones óptimos de movimiento. En este sentido se requiere de mayor experimentación para afinar los criterios que se optimizan en el movimiento del brazo humano, antes de formalizar una propuesta de generación de trayectorias patrón para diversas tareas.

## REFERENCIAS

- Chiu, S.L. (1988). Task Compatibility of Manipulator Postures. *The International Journal of Robotics Research* 7 (5): 13 – 21.
- Flash T. y Hogan N. 1985. The coordination of arm movements: an experimentally confirmed mathematical model. *The Journal of Neuroscience* 5: 1688–1703.

- Kapandji, I.A. 1993. *Cuadernos de Fisiología Articular. Miembro Superior*. Toray Masson (ed). Barcelona, España.
- Klein, C.A. y Blaho, B.E. 1987. Dexterity Measures for the Design and Control of Kinetically Redundant Manipulators. *The International Journal of Robotics Research* **6** (2): 72 – 83.
- Klopčar N., Tomsic M. y Lenarcic J. 2007. A kinematic model of the shoulder complex to evaluate the arm-reachable workspace. *Journal of Biomechanics* **40** (1): 86-91.
- Murphy M. A., Sunnerhagen K. S., Johnels B. y Willén C. 2006. Three-dimensional kinematic motion analysis of a daily activity drinking from a glass: a pilot study. *Journal of Neuroengineering Rehabilitation*, **3**: 18.
- Pámanes, A., Barrón, A. y Pinedo, C. 1999. Constrained Optimization in Redundancy Resolution of Robotic Manipulators. *10<sup>th</sup> World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Oulu, Finlandia. pp: 1057 – 1066.
- Petuskey K., Bagley A., Abdala E., James M. A. y Rab G. 2006. Upper extremity kinematics during functional activities: Three-dimensional studies in a normal pediatric population. *Gait and Posture*, Epub ahead of print.
- Rau, G., Disselhorst-Klug, R. y Schmidt, R. 2000. Movement biomechanics goes upwards: from the leg to the arm. *Journal of Biomechanics*. **33**(10): 1207 – 1216.
- Rodríguez, C.F, Quintero, H. y Botero, J.C. 2003. Herramienta cuantitativa para Evaluación de la Funcionalidad del Brazo. *I Jornadas CYTED sobre Tecnologías de Apoyo a la Discapacidad. Natal*, Brasil. 33 – 40.
- Rodríguez, C.F, Quintero y H., Aschner H. 2006. Movimiento del Brazo Humano: de los tres planos a las tres dimensiones. *Revista de Ingeniería*. Universidad de los Andes, **22**:34-42.
- Sciavicco, L. y Siciliano, B. 1996. *Modeling and Control of Robot Manipulators*. McGraw – Hill (ed), NY. U.S.A.
- Staffetti, E, Bruyninckx, H. y De Schutter, J. 2002. *On the Invariance of Manipulability Indices. Advances in Robot Kinematics*, 57-66, J. Lenarcic and F. Thomas (eds.), Kluwer Academic Publishers
- Williams S., Schmidt R., Disselhorst-Klug C. y Rau G. 2006. An upper body model for the kinematical analysis of the joint chain of the human arm. *Journal of Biomechanics* **39**(13): 2419-2429.
- Yoshikawa, T. 1985. Manipulability of Robotic Mechanisms. *The International Journal of Robotics Research*, **4**(2): 3 – 9.