

**CONTROL MEDIANTE MODOS DESLIZANTES  
EN TIEMPO DISCRETO PARA EL  
SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS DE UN  
ROBOT MÓVIL<sup>1</sup>**

**P. A. Niño-Suárez, E. Aranda-Bricaire, M. Velasco-Villa**

*CINVESTAV-IPN  
Departamento de Ingeniería Eléctrica  
Sección de Mecatrónica  
Apdo. 14-740, 07000, México DF, México  
E-mails: asuarez@umng.edu.co, earanda@cinvestav.mx,  
velasco@cinvestav.mx*

**Resumen:** En este trabajo se presenta una estrategia de control en tiempo discreto para el seguimiento de trayectorias de un robot móvil tipo (2,0) controlado remotamente. La estrategia de control se desarrolló mediante un enfoque de modos deslizantes, considerando el modelo discreto exacto del vehículo en el cual se incluyen los efectos del retardo de transporte causado por la propagación de las señales sobre una red de comunicación. El esquema de control garantiza el seguimiento de trayectorias predeterminadas obteniéndose convergencia asintótica de los errores de seguimiento. La estrategia propuesta es evaluada mediante una serie de resultados por simulación. *Copyright © 2007 CEA-IFAC*

**Palabras Clave:** Robot móvil, retardos de transporte, control en tiempo discreto, modos deslizantes

## 1. INTRODUCCIÓN

Los robots móviles son dispositivos electromecánicos capaces de desplazarse en un espacio de trabajo con cierto grado de autonomía. De acuerdo a su forma de locomoción se clasifican en: robots móviles con locomoción mediante orugas; mediante patas y mediante ruedas, (Canudas *et al.* 1996). Los robots móviles propulsados por ruedas a su vez se clasifican de acuerdo al número y al tipo de grados de libertad. Los grados de libertad considerados en robótica móvil son de dos tipos, de movilidad y de direcciónabilidad. El grado de

movilidad es un grado de libertad asociado a una variable de velocidad del robot y el grado de direcciónabilidad es un grado de libertad asociado a una variable de dirección del robot. En este trabajo se considera un robot móvil propulsado por ruedas, que posee dos grados de movilidad y cero grados de direcciónabilidad, de ahí su denominación de robot móvil tipo (2,0).

La capacidad para desplazarse de forma autónoma le permite a un robot móvil desarrollar de manera eficiente diferentes tareas. Debido a esta autonomía es deseable utilizar una red de comunicación entre el sistema de control y los sensores y actuadores del vehículo. La inclusión de una red de comunicación, como se observa en la Figura 1, induce la presencia de retardos de propagación en el lazo de control. Estos retardos pueden no ser

<sup>1</sup> Trabajo financiado parcialmente por CONACyT, México, mediante el Proyecto 42093. El primer autor se encuentra en comisión de estudios otorgada por la Universidad Militar Nueva Granada, Facultad de Ingeniería, Programa de Ingeniería Mecatrónica, Bogotá, D.C., Colombia.

despreciables y podrían deteriorar el desempeño del sistema y provocar algunos problemas de inestabilidad, (Hale 1997).

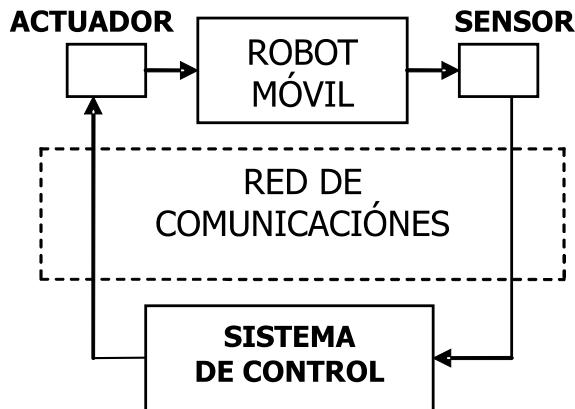


Figura 1. Red de Comunicación de un sistema controlado remotamente.

La necesidad de compensar los efectos de los retardos de tiempo en la propagación de las señales en un sistema controlado a distancia, ha motivado la utilización de modelos en tiempo discreto que permiten analizar alternativamente los efectos del retardo en la propagación de las señales y permiten el diseño de esquemas de control en tiempo discreto.

Para algunos sistemas no lineales es posible la obtención de su modelo discreto exacto, como sucede con algunas clases de robot móviles. La principal ventaja de utilizar un controlador discreto y un modelo discreto exacto del sistema, es que no se tiene como una restricción de trabajo el periodo de muestreo del sistema de control. Por lo tanto se puede utilizar en su implementación un sistema de computo con requerimientos mínimos.

Un robot móvil propulsado mediante ruedas es un sistema difícil de controlar debido a que en general satisface restricciones no holonómicas. Se han propuesto diversas soluciones para los problemas clásicos de control por ejemplo, algoritmos por modos deslizantes en tiempo continuo (Shim *et al.* 1995), (Yang and Kim 1999) y (Corradini and Orlando 2001). En los trabajos mencionados se proponen diferentes estrategias de control basadas en el modelo dinámico del robot móvil (2,0), para resolver el problema de seguimiento de trayectorias obteniéndose la convergencia asintótica deseada. De igual forma en (Guldner and Utkin 1995) se propone una función de navegación para generar un conjunto de trayectorias deseadas, donde el control por modos deslizantes garantiza el seguimiento de las trayectorias deseadas con errores de seguimiento que convergen asintóticamente a cero.

Actualmente, las estrategias de control desarrolladas comúnmente para robots móviles se obtienen a partir de modelos expresados en tiempo

continuo, produciendo consecuentemente, controladores del tipo continuo. Sin embargo, en la mayoría de las situaciones prácticas la implementación de estos controladores se realiza en sistemas de procesamiento digital de datos, siendo necesaria la utilización de un periodo de muestreo suficientemente pequeño para su adecuado funcionamiento. Debido a lo anterior, algunos autores presentan controladores por modos deslizantes en tiempo discreto utilizando el modelo discreto aproximado del robot móvil (2,0), tal como en (Corradini *et al.* 1999), donde se resuelve el problema de estabilización de un robot móvil ante la presencia de perturbaciones acotadas. De igual forma partiendo de los resultados obtenidos en (Corradini *et al.* 1999), en (Corradini *et al.* 2002) se propone una técnica de control por modos deslizantes en tiempo discreto para el seguimiento de trayectorias preestablecidas obteniendo experimentalmente errores de seguimiento acotados.

En (Wargui *et al.* 1997) y (Wargui *et al.* 1996) los autores consideran el modelo discreto aproximado de un robot móvil tipo (2,0) controlado remotamente e introducen el efecto del retardo de transporte debido a una red de comunicación en el modelo. Específicamente en (Wargui *et al.* 1997) se obtiene, a partir del modelo discreto aproximado con inclusión de retardos, una ley de control que estabiliza el robot móvil en presencia de tiempos de retardo menores que el periodo de muestreo.

En este trabajo se presenta el modelo discreto exacto de un robot móvil tipo (2,0), obtenido al considerar los efectos inducidos por retardos de propagación de las señales de control, considerando un tiempo de retardo  $\tau$  menor que el periodo de muestreo  $T$  utilizado. A partir de este modelo y considerando la metodología presentada en (Furuta 1990), se propone un esquema de control por modos deslizantes en tiempo discreto que resuelve el problema de seguimiento de trayectorias con convergencia asintótica de los errores de seguimiento. Una versión preliminar de este trabajo fue presentada en (Nino-Suarez *et al.* 2006)

El trabajo esta organizado de la siguiente forma: En la Sección 2 se presenta el modelo en tiempo discreto de un robot móvil tipo (2,0) con retardos de tiempo a la entrada. En la Sección 3 se desarrolla un esquema de control por modos deslizantes en tiempo discreto para resolver el problema de seguimiento de trayectorias. En la Sección 4, se presentan los resultados obtenidos mediante simulación, que muestran el desempeño de la ley de control propuesta. Finalmente las conclusiones se presentan en la Sección 5.

## 2. MODELO EN TIEMPO DISCRETO

Considérese el robot móvil tipo (2, 0) de la Figura 2. El modelo cinemático en tiempo continuo de un robot tipo (2, 0) es,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \cos x_3 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \sin x_3 \\ \dot{x}_3 &= u_2,\end{aligned}\quad (1)$$

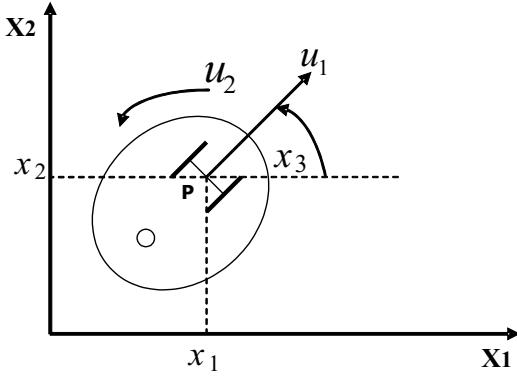


Figura 2. Robot Móvil Tipo (2,0)

donde  $x_1$  y  $x_2$  son las coordenadas del centro de rotación del robot con respecto a los ejes del marco de referencia fijo  $X_1$  y  $X_2$ . La variable  $x_3$  representa el ángulo que forma el eje de referencia del robot con respecto a  $X_1$ ,  $u_1$  es la velocidad lineal y  $u_2$  es la velocidad angular. Considerando una red de comunicación como la mostrada en la Figura 1, debido al efecto inducido por los retardos de transporte, el sistema (1) puede reescribirse como,

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t - \tau) \cos x_3(t) \quad (2a)$$

$$\dot{x}_2(t) = u_1(t - \tau) \sin x_3(t) \quad (2b)$$

$$\dot{x}_3(t) = u_2(t - \tau) \quad (2c)$$

donde  $\tau$  es la suma de tiempo entre la generación de la señal en el controlador y su aplicación efectiva en el sistema remoto y el tiempo entre la medición de las señales en el vehículo y su envío para su procesamiento. Nótese que, en general, el tiempo de retardo por la transmisión de la señal es despreciable. El retardo se presenta fundamentalmente debido al periodo de tiempo que requiere el procesamiento de la información de los sensores del robot, a la multiplexación y demultiplexación de las diferentes señales, etc.

### 2.1 Modelo Discreto Aproximado con Retardo

Un modelo discreto aproximado del robot móvil (2,0), dado en (2) se puede obtener a partir de una expansión de primer orden en series de Taylor como se presenta en (Wargui *et al.* 1997),

$$\begin{aligned}x_1(kT + T) &= x_1(kT) \\ &\quad + (T - \tau)u_1(KT) \cos x_3(KT + \tau) \\ &\quad + \tau u_1(KT - T) \cos x_3(KT) \\ x_2(KT + T) &= x_2(KT) \\ &\quad + (T - \tau)u_1(KT) \sin x_3(KT + \tau) \\ &\quad + \tau u_1(KT - T) \sin x_3(KT) \\ x_3(KT + T) &= x_3(KT) + (T - \tau)u_2(KT) \\ &\quad + \tau u_2(KT - T).\end{aligned}\quad (3)$$

Este modelo presenta como desventaja que cuando el periodo de muestreo no puede ser reducido a un valor suficientemente pequeño, el esquema de control implementado presenta un apreciable deterioro.

Se verificó mediante experimentos por simulación, que a partir de un periodo de muestreo mayor a 0.05 segundos el modelo discreto aproximado presenta un error considerable al compararlo con el modelo en tiempo continuo con retardo. Por tanto, cualquier ley de control que se diseñe a partir del modelo aproximado puede presentar un desempeño deficiente cuando se utilice un periodo de muestreo suficientemente grande.

### 2.2 Modelo Discreto Exacto con Retardo

El modelo discreto exacto de un robot móvil (2,0) controlado remotamente, considerando el efecto de la inclusión de una red de comunicación como la presentada en la Figura 1, se obtiene al desarrollar la discretización exacta del modelo en tiempo continuo (2), bajo la consideración de que el tiempo de retardo  $\tau$  es menor que el periodo de muestreo  $T$ .

Considérese la solución de la ecuación diferencial (2c) para  $x_3(t)$  en el intervalo de tiempo  $[t_0, t]$ ,

$$x_3(t) = x_3(t_0) + \int_{t_0}^t u_2(s - \tau) ds \quad (4)$$

Debido a que  $\tau < T$ , el valor de  $u(t)$  cambia de  $u(KT - T)$  a  $u(KT)$  en el instante  $t_0 + \tau$ , como se observa en el diagrama de la Figura 3. Asumiendo que  $\tau$  tiene un valor constante conocido, (4) se puede reescribir como,

$$\begin{aligned}x_3(t) &= x_3(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \tau} u_2(KT - T) ds \\ &\quad + \int_{t_0 + \tau}^t u_2(KT) ds\end{aligned}\quad (5)$$

donde  $u_2(KT)$  representa el valor de  $u_2(t)$  en el intervalo de tiempo actual y  $u_2(KT - T)$  representa el valor de  $u_2(t)$  durante el intervalo de tiempo anterior.

Nótese que cuando  $x_3(t)$  dada en (5) se evalúa en el intervalo de tiempo  $t_0 \leq t < t_0 + \tau$  se obtiene,

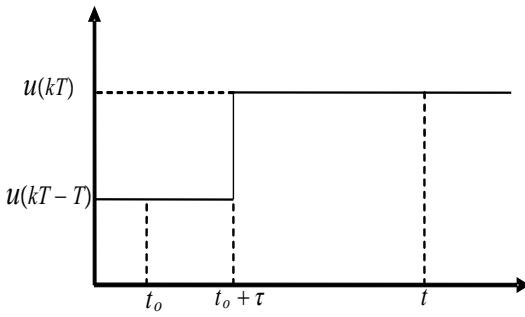


Figura 3. Señal de Control  $u(t - \tau)$

$$x_3(t) = x_3(t_0) + (t - t_0) u_2(KT - T) \quad (6)$$

pero cuando (5) se evalúa para  $t_0 \leq t$ , se tiene,

$$x_3(t) = x_3(t_0) + \tau u_2(KT - T) + (t - t_0 - \tau) u_2(KT). \quad (7)$$

Siguiendo el mismo procedimiento y considerando (6) y (7), es posible escribir la solución para  $x_1(t)$  dada en (2a) en la forma,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t_0) \\ &+ u_1(KT - T) \int_{t_0}^{t_0+\tau} \cos[x_3(t_0) \\ &+ (s - t_0) u_2(KT - T)] ds \\ &+ u_1(KT) \int_{t_0+\tau}^t \cos[x_3(t_0) + \tau u_2(KT - T) \\ &+ (s - t_0 - \tau) u_2(KT)] ds. \end{aligned} \quad (8)$$

La solución para  $x_2(t)$  se obtiene de manera similar,

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_2(t_0) \\ &+ u_1(KT - T) \int_{t_0}^{t_0+\tau} \sin[x_3(t_0) \\ &+ (s - t_0) u_2(KT - T)] ds \\ &+ u_1(KT) \int_{t_0+\tau}^t \sin[x_3(t_0) + \tau u_2(KT - T) \\ &+ (s - t_0 - \tau) u_2(KT)] ds. \end{aligned} \quad (9)$$

Con el fin de simplificar la presentación de los desarrollos que se presentan a continuación, considérese la notación  $\eta = \eta(kT)$ ,  $\eta^\pm = \eta(kT \pm T)$  con su generalización dada por

$$\eta(KT \pm mT) = \eta^{\pm m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Para obtener el modelo discreto exacto es suficiente considerar  $t_0 = KT$  y evaluar (7), (8) y (9) al final del intervalo de tiempo  $[KT, KT + T]$ , obteniéndose

$$\begin{aligned} x_1^+ &= x_1 + 2u_1^- \psi_1(u_2^-) \cos \beta + 2u_1 \psi_2(u_2) \cos \theta \\ x_2^+ &= x_2 + 2u_1^- \psi_1(u_2^-) \sin \beta + 2u_1 \psi_2(u_2) \sin \theta \\ x_3^+ &= x_3 + \tau u_2^- + (T - \tau) u_2 \end{aligned} \quad (10)$$

con

$$\begin{aligned} \theta &= x_3 + \tau u_2^- + \frac{T - \tau}{2} u_2, \\ \beta &= x_3 + \frac{\tau}{2} u_2^- \end{aligned}$$

y

$$\psi_1(u_2^-) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{\tau}{2}u_2^-\right)}{u_2^-} & \text{si } u_2^- \neq 0 \\ \frac{\tau}{2} & \text{si } u_2^- = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\psi_2(u_2) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{T - \tau}{2}u_2\right)}{u_2} & \text{si } u_2 \neq 0 \\ \frac{T - \tau}{2} & \text{si } u_2 = 0 \end{cases}$$

Nótese que  $\psi_1(u_2^-)$  y  $\psi_2(u_2)$  son funciones continuas, puesto que satisfacen,

$$\lim_{u_2^- \rightarrow 0} \psi_1(u_2^-) = \frac{\tau}{2} = \psi_1(0)$$

$$\lim_{u_2 \rightarrow 0} \psi_2(u_2) = \frac{T - \tau}{2} = \psi_2(0)$$

### 3. PROBLEMA DE SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA

El control por modos deslizantes en tiempo discreto es muy útil en aplicaciones prácticas debido a la simplicidad de su implementación ya que los problemas que se presentan en tiempo continuo, como las comutaciones a altas frecuencias, pueden ser reducidos si se garantiza una adecuada selección de los parámetros de control (Corradini *et al.* 2002), (Furuta 1990) y (Gao *et al.* 1995).

En tiempo continuo, un esquema de control por modos deslizantes considera una ley de control que conmuta a altas frecuencias para llevar la trayectoria de estados del sistema sobre una superficie deslizante y mantenerla allí por el tiempo subsiguiente, (Utkin *et al.* 1999), (Young *et al.* 1999).

Furuta presenta una técnica de control por modos deslizantes en tiempo discreto, insensible a la selección del periodo de muestreo y que no presenta comutaciones a alta frecuencia, (Furuta 1990). En este caso, la ley de control se diseña con base en una función discreta de Lyapunov y a una adecuada selección de los parámetros para garantizar la estabilidad del sistema.

El esquema de control propuesto en el presente trabajo tiene como objetivo resolver el problema de seguimiento de trayectorias de un robot móvil (2,0) utilizando su modelo discreto exacto con inclusión de retardos. Para tal efecto se considerará la metodología propuesta en (Furuta 1990) a fin de obtener un controlador por modos deslizantes en tiempo discreto. Contrario al caso continuo,

en el esquema en tiempo discreto presentado en (Furuta 1990) y utilizado en (Corradini *et al.* 2002), la superficie de conmutación es diferente a la superficie de deslizamiento.

### 3.1 Dinámica del error de seguimiento

Considérense los errores de seguimiento del sistema (10) con respecto a los valores deseados  $x_{1d}$ ,  $x_{2d}$  y  $x_{3d}$ ,

$$\begin{aligned} e_{x_1} &= x_1 - x_{1d} \\ e_{x_2} &= x_2 - x_{2d} \\ e_{x_3} &= x_3 - x_{3d}. \end{aligned}$$

Considerando el sistema (10), es posible mostrar que los errores de seguimiento satisfacen

$$\begin{aligned} e_{x_1}^+ &= e_{x_1} + 2\psi_1 u_1^- \cos \beta + 2\psi_2 u_1 \cos \theta - \Delta x_{1d} \\ e_{x_2}^+ &= e_{x_2} + 2u_1^- \psi_1 \sin \beta + 2u_1 \psi_2 \sin \theta - \Delta x_{2d} \\ e_{x_3}^+ &= e_{x_3} + \tau u_2^- + (T - \tau) u_2 - \Delta x_{3d} \end{aligned} \quad (12)$$

con

$$\begin{aligned} \theta &= e_{x_3} + x_{3d} + \tau u_2^- + \frac{T - \tau}{2} u_2, \\ \beta &= e_{x_3} + x_{3d} + \frac{\tau}{2} u_2^- \end{aligned}$$

y  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  definidas de la misma forma que en (11).

### 3.2 Esquema de control

Para el diseño de la estrategia de control, considérense las señales virtuales de control

$$w_{1x} = u_1 \psi_2 \cos \theta \quad (13)$$

$$w_{1y} = u_1 \psi_2 \sin \theta, \quad (14)$$

y adicionalmente, las señales auxiliares

$$v_{1x} = u_1^- \psi_1 \cos \beta$$

$$v_{1y} = u_1^- \psi_1 \sin \beta.$$

Utilizando las definiciones anteriores es posible reescribir el sistema (12) en la forma,

$$\begin{aligned} e_{x_1}^+ &= e_{x_1} + 2v_{1x} + 2w_{1x} - \Delta x_{1d} \\ e_{x_2}^+ &= e_{x_2} + 2v_{1y} + 2w_{1y} - \Delta x_{2d} \\ e_{x_3}^+ &= e_{x_3} + \tau u_2^- + (T - \tau) u_2 - \Delta x_{3d} \end{aligned} \quad (15)$$

donde se tiene ahora un sistema con tres señales de entrada, dos de ellas corresponden a los controles virtuales  $w_{1x}$  y  $w_{1y}$  y la tercera es la entrada  $u_2$ .

Con el fin de implementar una estrategia de control por modos deslizantes, considérense las superficies dadas por  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = 0$  y  $\sigma_t = 0$ , donde

$$\sigma_x = e_{x_1}^+ - e_{x_1} + \gamma_x e_{x_1}^- \quad (16a)$$

$$\sigma_y = e_{x_2}^+ - e_{x_2} + \gamma_y e_{x_2}^- \quad (16b)$$

$$\sigma_t = e_{x_3}^+ - e_{x_3} + \gamma_t e_{x_3}^-, \quad (16c)$$

y  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_t$  son parámetros reales positivos que se determinarán posteriormente.

A partir de la función  $\sigma_x$  dada en (16a) se tiene que,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= e_{x_1}^+ - e_{x_1} + \gamma_x e_{x_1}^- \\ \sigma_x &= (e_{x_1} + 2v_{1x} + 2w_{1x} - \Delta x_{1d}) - e_{x_1} + \gamma_x e_{x_1}^- \\ \sigma_x &= 2v_{1x} + 2w_{1x} - \Delta x_{1d} + \gamma_x e_{x_1}^- \end{aligned}$$

de donde, definiendo ahora la retroalimentación,

$$w_{1x} = \frac{1}{2} [\Delta x_{1d} - \gamma_x e_{x_1}^- - 2v_{1x} + \alpha \sigma_x^-] \quad (17)$$

en lazo cerrado con (16a) se obtiene,

$$\sigma_x = \alpha \sigma_x^-.$$

Por lo tanto, escogiendo adecuadamente el parámetro  $\alpha$  se obtiene que la superficie  $\sigma_x = 0$  es atractiva.

Considerando de manera similar la superficie dada en (16b) se obtiene el control virtual

$$w_{1y} = \frac{1}{2} [\Delta x_{2d} - \gamma_y e_{x_2}^- - 2v_{1y} + \beta \sigma_y^-] \quad (18)$$

el cual produce en lazo cerrado con (16b),

$$\sigma_y = \beta \sigma_y^-.$$

A partir de los desarrollos anteriores es posible ver que los controles virtuales  $w_{1x}$  y  $w_{1y}$  determinan el valor de  $u_1$  a partir de la relación

$$w_{1x}^2 + w_{1y}^2 = u_1^2 \psi_2^2,$$

de forma tal que

$$u_1 = \frac{\sqrt[2]{w_{1x}^2 + w_{1y}^2}}{\psi_2}. \quad (19)$$

Nótese también que a partir de (13) se tiene que

$$u_1 = \frac{w_{1x}}{\psi_2 \cos \theta} \quad (20)$$

y a partir de (14) se tiene que

$$u_1 = \frac{w_{1y}}{\psi_2 \sin \theta}. \quad (21)$$

Considérese finalmente la superficie dada en (16c), esto es,

$$\begin{aligned} \sigma_t &= e_{x_3}^+ - e_{x_3} + \gamma_t e_{x_3}^- \\ \sigma_t &= (e_{x_3} + \tau u_2^- + (T - \tau) u_2 - \Delta x_{3d}) - e_{x_3} + \gamma_t e_{x_3}^- \\ \sigma_t &= \tau u_2 + (T - \tau) u_2 - \Delta x_{3d} + \gamma_t e_{x_3}^- \end{aligned}$$

definiendo la retroalimentación,

$$u_2 = \frac{1}{(T - \tau)} [\Delta x_{3d} - \gamma_t e_{x_3}^- - \tau u_2^- + \delta \sigma_t^-] \quad (22)$$

se obtiene entonces en lazo cerrado con (16c),

$$\sigma_t = \delta \sigma_t^-.$$

### 3.3 Análisis de estabilidad

De acuerdo al diseño presentado anteriormente  $w_{1x}$  y  $w_{1y}$ , definidas en (17) y (18), pueden ser usadas separadamente para imponer un modo deslizante en las superficies  $\sigma_x = 0$  y  $\sigma_y = 0$  respectivamente. Por otra parte  $u_2$  definida en (22) puede utilizarse para imponer un modo deslizante para la superficie  $\sigma_t = 0$ .

Para mostrar la convergencia de los errores de seguimiento y la estabilidad del sistema en lazo cerrado, considérese la retroalimentación dada en (17) en lazo cerrado con el sistema (12).

Dado que  $u_1$  puede escribirse como se definió en (20) la dinámica de  $e_{x_1}$  estará dada por,

$$e_{x_1}^+ = e_{x_1} + 2v_{1x} + 2\psi_2 \cos \theta \left[ \frac{w_{1x}}{\psi_2 \cos \theta} \right] - \Delta x_{1d}$$

reemplazando  $w_{1x}$  dada en (17) se tiene,

$$e_{x_1}^+ = e_{x_1} + 2v_{1x} + [\Delta x_{1d} - \gamma_x e_{x_1}^- - 2v_{1x} + \alpha \sigma_x^-] - \Delta x_{1d}$$

$$e_{x_1}^+ = e_{x_1} - \gamma_x e_{x_1}^- + \alpha \sigma_x^-$$

donde, considerando  $\sigma_x^-$  a partir de  $\sigma_x$  dada en (16a) se tiene

$$\begin{aligned} e_{x_1}^+ - e_{x_1} + \gamma_x e_{x_1}^- - \alpha \sigma_x^- &= 0 \\ e_{x_1}^+ - e_{x_1} + \gamma_x e_{x_1}^- - \alpha [e_{x_1} - e_{x_1}^- + \gamma_x e_{x_1}^{-2}] &= 0 \\ e_{x_1}^+ - (1 + \alpha) e_{x_1} + (\gamma_x + \alpha) e_{x_1}^- - \alpha \gamma_x e_{x_1}^{-2} &= 0 \\ e_{x_1}^{+3} - (1 + \alpha) e_{x_1}^{+2} + (\gamma_x + \alpha) e_{x_1}^+ - \alpha \gamma_x e_{x_1} &= 0 \end{aligned}$$

donde la elección adecuada de los parámetros  $\alpha$ , y  $\gamma_x$  permiten establecer la estabilidad deseada.

Considerando que  $u_1$  puede reescribirse como se definió en (21), la dinámica del error de seguimiento  $e_{x_2}$  resulta ser,

$$e_{x_2}^+ = e_{x_2} + 2v_{1y} + 2\psi_2 \sin \theta \left[ \frac{w_{1y}}{\psi_2 \sin \theta} \right] - \Delta x_{1d}$$

reemplazando  $w_{1y}$  dada en (18) se tiene,

$$e_{x_2}^+ = e_{x_2} + 2v_{1y} + [\Delta x_{2d} - \gamma_y e_{x_2}^- - 2v_{1y} + \beta \sigma_y^-] - \Delta x_{2d}$$

$$e_{x_2}^+ = e_{x_2} - \gamma_y e_{x_2}^- + \beta \sigma_y^-$$

de donde a partir de (16b) se obtiene

$$\begin{aligned} e_{x_2}^+ - e_{x_2} + \gamma_y e_{x_2}^- - \beta \sigma_y^- &= 0 \\ e_{x_2}^+ - e_{x_2} + \gamma_y e_{x_2}^- - \beta [e_{x_2} - e_{x_2}^- + \gamma_y e_{x_2}^{-2}] &= 0 \\ e_{x_2}^+ - (1 + \beta) e_{x_2} + (\gamma_y + \beta) e_{x_2}^- - \beta \gamma_y e_{x_2}^{-2} &= 0 \\ e_{x_2}^{+3} - (1 + \beta) e_{x_2}^{+2} + (\gamma_y + \beta) e_{x_2}^+ - \beta \gamma_y e_{x_2} &= 0. \end{aligned}$$

En este caso, la elección adecuada de  $\beta$  y  $\gamma_y$  asegura la convergencia deseada.

Finalmente considerando (22) en lazo cerrado con  $e_{x_3}$  dada en (12), se obtiene

$$e_{x_3}^+ = (1 + \delta) e_{x_3} - (\gamma_t + \delta) e_{x_3}^- - \delta \gamma_t e_{x_3}^{-2}$$

por tanto,

$$e_{x_3}^{+3} - (1 + \delta) e_{x_3}^{+2} + (\gamma_t + \delta) e_{x_3}^+ + \delta \gamma_t e_{x_3} = 0.$$

Si se seleccionan los parámetros  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$  y  $\gamma_t$  dentro del intervalo  $(0; 0.25]$ , las raíces de los polinomios característicos de  $e_{x_1}$ ,  $e_{x_2}$ ,  $e_{x_3}$ , se ubican dentro del círculo unitario, garantizando así la convergencia asintótica. Con lo cual se prueba la convergencia de los errores de seguimiento y la estabilidad en lazo cerrado del sistema.

## 4. RESULTADOS EN SIMULACIÓN.

Con el fin de evaluar el desempeño de la estrategia de control propuesta para resolver el problema de seguimiento de trayectorias, se presentan los resultados de uno de los experimentos realizados mediante simulación, donde se consideró como trayectoria deseada un círculo de radio  $r = 3$  y se propuso como periodo de muestreo a  $T = 0.1$  con un retardo de transporte  $\tau = 0.025$ .

Se consideraron las condiciones iniciales,

$$x_1 = 0.2, \quad x_2 = 2.5, \quad x_3 = 0.02$$

$$u_2 = 0, \quad u_1 = 0$$

Los parámetros de control seleccionados para los polinomios característicos de  $e_{x_1}$ ,  $e_{x_2}$ ,  $e_{x_3}$  fueron,

$$\gamma_x = \gamma_y = \gamma_t = 0.24$$

$$\alpha = 0.4 \quad \beta = 0.4 \quad \delta = 0.$$

En la Figura 4 se observa la trayectoria deseada y la trayectoria real seguida por el robot móvil en el plano  $X_1 - X_2$ . Se puede observar como el robot móvil iniciando desde un punto fuera de la trayectoria deseada corrige su posición y se va aproximando hasta alcanzar la trayectoria deseada. Los errores de seguimiento  $e_{x_1} = x_1 - x_{1d}$ ,  $e_{x_2} = x_2 - x_{2d}$  y  $e_{x_3} = x_3 - x_{3d}$  con respecto al tiempo se presentan en la Figura 5, en esta gráfica se observa como éstos convergen asintóticamente a cero, lo que indica que cada estado converge asintóticamente al valor deseado. En la Figura 6 se muestra la evolución de las señales de control  $u_1$  y  $u_2$ , siendo evidente el hecho que se encuentran libres de comutaciones a altas frecuencias. Se observa también que las señales de control no se ven afectadas por el retardo de transporte. En la Figura 7 se presentan las señales virtuales de control  $w_{1x}$  y  $w_{1y}$ . Finalmente en la Figura 8 se muestra el comportamiento de las superficies deslizantes, las cuales convergen asintóticamente a cero.

## 5. CONCLUSIONES.

En este trabajo se presentó una estrategia de control por modos deslizantes en tiempo discreto, para resolver el problema de seguimiento de trayectorias de un robot móvil tipo (2,0) controlado remotamente. El esquema de control se

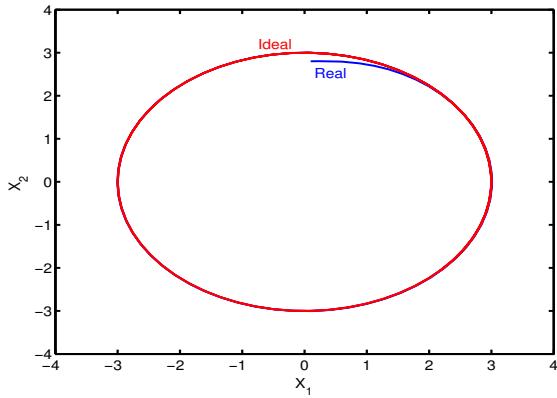


Figura 4. Trayectoria ideal y real del robot móvil tipo  $(2, 0)$

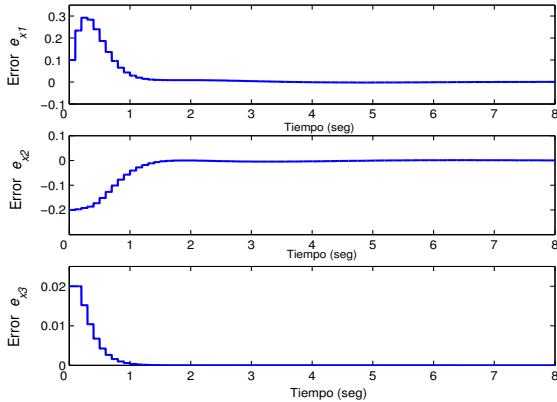


Figura 5. Señales de error de seguimiento para los estados  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ .

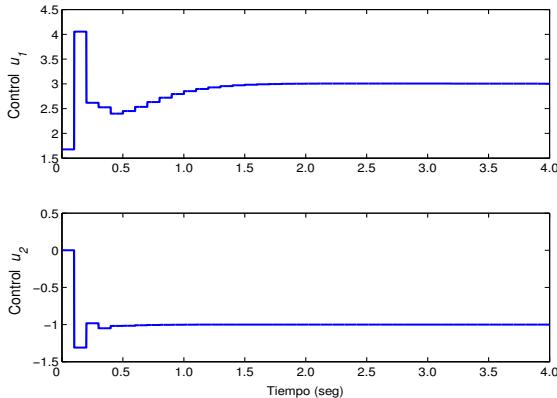


Figura 6. Señales de control  $u_1$  y  $u_2$  aplicadas.

desarrolló a partir de la obtención del modelo discreto exacto incluyendo los efectos del retardo de transporte inducido por una red de comunicación. Debido a los efectos del retardo de transporte sobre el vehículo, la estrategia de control propuesta se realizó en tiempo discreto ya que no es posible la obtención de leyes de control causales a partir del modelo continuo. El desempeño de la estrategia de control se evaluó mediante experimentos en simulación, donde se muestra que las leyes de control propuestas permiten que el robot móvil realice un seguimiento de trayectorias con convergencia asintótica de los errores de

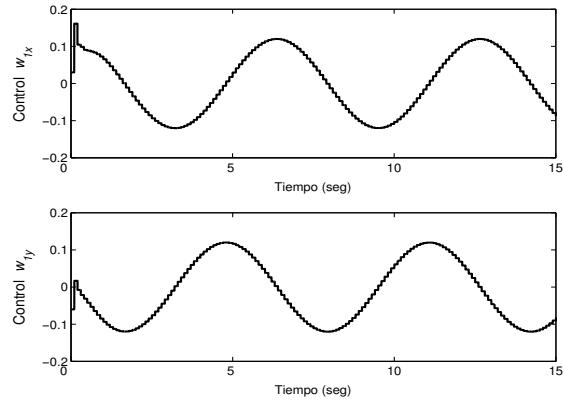


Figura 7. Señales de control virtuales  $w_{1x}$  y  $w_{1y}$

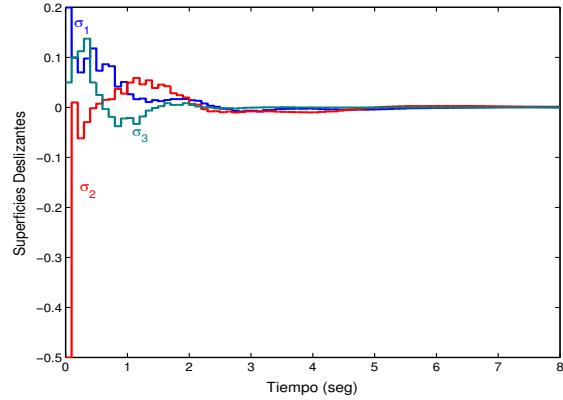


Figura 8. Superficies de deslizamiento

seguimiento. Los resultados de los experimentos en simulación muestran una ventaja del esquema de control utilizado sobre la implementación de los esquemas de control por modos deslizantes clásicos en tiempo continuo, debido a que las señales de control obtenidas se encuentran libres de comutaciones a alta frecuencia.

## REFERENCIAS

- Canudas, C., B. Siciliano, G. Bastin, B. Brogliato, G. Campion, B. D'Andrea-Novel, A. De Luca, W. Khalil, R. Lozano, R. Ortega, C. Samson and P. Tomei (1996). *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag, London.
- Corradini, M. and G. Orlando (2001). Robust tracking control of mobile robots in the presence of uncertainties in the dynamical model. *Journal of Robotic Systems* **18**, 317–323.
- Corradini, M. L., T. Leo and G. Orlando (1999). Robust stabilization of a mobile robot violating the nonholonomic constraint via quasi-sliding modes. In: *Proc. of the American Control Conference*. USA. pp. 3935–3939.
- Corradini, M. L., T. Leo and G. Orlando (2002). Experimental testing of a discrete-time sliding mode controller for trajectory tracking of a wheeled mobile robot in the presence of skidding effects. *Journal of Robotics Systems* **19**(4), 177–188.

- Furuta, K. (1990). Sliding mode control of a discrete system. *System and Control Letters* **14**, 145–152.
- Gao, W., Y. Wang and A. Homaifa (1995). Discrete-time variable structure control systems. *IEEE Trans. Industrial Electronics* **42**, 117–122.
- Guldner, J. and V. Utkin (1995). Sliding mode control for gradient tracking and robot navigation using artificial potential fields. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **11**, 247–254.
- Hale, J. K. (1997). *Theory of functional differential equations*. Springer-Verlag, New York.
- Nino-Suarez, P., E. Aranda-Bricaire and M. Velasco-Villa (2006). Discrete-time sliding mode path-tracking control for a wheeled mobile robot. In: *Proc. of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA, USA. pp. 3052–3057.
- Shim, H. S., J.H. Kim and K. Koh (1995). Variable structure control of nonholonomic wheeled mobile robots. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotic and Automation*. USA. pp. 1694–1699.
- Utkin, V., J. Guldner and J. Shi (1999). *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Taylor Francis, New York.
- Wargui, M., A. Tayebi, M. Tadjine and A. Rachid (1997). On the stability of an autonomous mobile robot subject to network induced delay. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Control Applications*. Hartford, CT. pp. 28–30.
- Wargui, M., M. Tadjine and A. Rachid (1996). Stability of real time control of an autonomous mobile robot. In: *Proc. of the IEEE 5th. International Workshop on Robot and Human Communication*. Tsukuba, Japan. pp. 311–316.
- Yang, J. and J. Kim (1999). Sliding mode motion control of nonholonomic mobile robots. *IEEE Control System* **19**, 15–23.
- Young, K., V. I. Utkin and U. Ozguner (1999). A control engineers guide to sliding mode control. *IEEE Transactions on Systems Technology* **7**, 328–342.