

## CONTROL ACTIVO DE RUIDO ACÚSTICO EN CASCOS DE MOTOCICLISMO

Rosa Castañé    Ricardo S. Sánchez Peña\*

Departament d'Enginyeria de Sistemes,

Automàtica i Informàtica Industrial

Sistemes Avançats de Control (UPC)

\*Institució Catalana de Recerca i Estudis Avançats (ICREA)

**Resumen:** Basados en modelos y datos experimentales previos, se presenta un esquema *feedback-feedforward* aplicado al control activo de ruido acústico en cascos de motociclistas. La estructura es la del control de 2 grados de libertad tomando información de una señal proporcional al ruido externo al casco y del ruido efectivo en el oído del motociclista. Se comparan diseños realizados mediante la parametrización de Youla, el control óptimo en  $\mathcal{H}_\infty$  y la síntesis- $\mu$  (diseño por valor singular estructurado). Se realiza un análisis en términos del desempeño, robustez y el orden de los controles resultantes. *Copyright © 2007 CEA-IFAC*

**Palabras clave:** Control activo de ruido, control óptimo en  $\mathcal{H}_\infty$ , parametrización de Youla, valor singular estructurado ( $\mu$ )

### 1. INTRODUCCIÓN

El Control Activo de Ruido (CAR) acústico comienza con los trabajos en (Lueg, 1934) y (Olson y May, 1953) y cuenta con amplios antecedentes y una importante bibliografía (Nelson y Elliot, 1992; Kuo y Morgan, 1995). Esta metodología se ha aplicado tanto a tubos de aire acondicionado, cámaras y habitaciones, ventanas e incluso puede extenderse al control de vibraciones en estructuras (mecánicas, construcciones, aeroespaciales, robótica). Sin embargo, el tema sigue vigente ya que aparecen importantes limitaciones prácticas para su implementación. Entre las aplicaciones está el CAR en cascos de motociclistas, que renueva su interés a partir de las recientes directivas europeas relacionadas con los aspectos laborales del ruido (UE-2003/10/EC, 2003). Estas directivas imponen unos límites en el ruido efectivo que los trabajadores pueden soportar durante su jornada laboral para evitar el NIHL (*Noise Induced Hearing Loss*). Estas normas son inviables en el caso de los motociclistas ocupacionales, e.g. policías, repartidores, deportistas, dadas las dificultades técnicas.

En (Bai y Lee, 1997) se presenta una comparación entre las diferentes estructuras de control: *feed-*

*forward* (FF), *feedback* (FB) e híbrida (FF/FB), cuando se diseñan controladores mediante  $\mathcal{H}_\infty$  para el control activo del ruido acústico en tubos. Más recientemente en (Sánchez Peña *et al.*, 2007), se realiza un estudio exhaustivo de estas 3 estructuras sobre la misma aplicación, resaltando los compromisos entre identificación, diseño y restricciones de implementación. En ambos, se concluye que el controlador híbrido permite conseguir desempeño robusto en un mayor rango de frecuencias y que el control realimentado (FB) en este tipo de aplicaciones sufre especialmente las limitaciones debidas a los ceros de fase no mínima que aparecen debido a los retardos de tiempo (Freudenberg y Looze, 1985; Hong y Bernstein, 1998; Seron, 2005; Freudenberg *et al.*, 2003).

El denominado control híbrido en el área de acústica, está relacionado al clásico controlador de dos grados de libertad. Existen varias estructuras (Vidyasagar, 1985; Skogestad y I.Postlethwaite, 2005; Scorletti y Fromion, 2006; Grimble, 1988; Edmunds, 1994; Vilanova y Serra, 1997), pero originalmente la idea fue utilizar los resultados de Youla (Youla *et al.*, 1976; Desoer *et al.*, 1980; Pernbo, 1981), de modo de diseñar la parte realimentada (FB) y la directa (FF) de forma independiente.

diente, como en (Yaesh y Shaked, 1991; Vidyasagar, 1985; Vilanova y Serra, 1997). En esta última se demuestra, además, que las ecuaciones del sistema en lazo cerrado pueden estar parametrizadas en base a dos sistemas independientes, racionales y estables. En (Kuroiwa y Kimura, 2003) se establece en qué condiciones existe esta independencia entre el diseño de los dos controladores y se aplica al control  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas con retardos temporales. Más recientemente, en (Dehghani *et al.*, 2006) se parte de una estructura separable y se propone un diseño de controladores óptimos en  $\mathcal{H}_\infty$  basado en la parametrización de Youla. Sin embargo, en (Giusto y Paganini, 1999) se establece que en el caso de sistemas con incertidumbre, la separación entre los dos controladores impone una restricción adicional, y no permite independizar su diseño. Aún así, se ha utilizado en artículos como (Hoyle *et al.*, 1991; Limebeer *et al.*, 1994; Walker, 1996) para resolver el problema de seguimiento de referencias, basado en (McFarlane y Glover, 1992). Un trabajo interesante relacionado a la selección de estructuras de control es el de (Devasia, 2002), aunque en el área de controles de tipo *inversion-based*.

De las diferentes estructuras de dos grados de libertad, las de (Skogestad y I.Postlethwaite, 2005; Scorletti y Fromion, 2006) coinciden cuando la referencia se anula y ambas son idénticas a la de (Vidyasagar, 1985) si el controlador FF se define con la estructura equivalente. Esta última es la que se adoptará en el presente trabajo, similar a la estructura en (Toochinda *et al.*, 2002). Allí, se estudia el problema de CAR en tubos mediante controladores de dos entradas y una salida (DEUS). También está basada en la parametrización de Youla, pero permite un diseño unificado del controlador híbrido, de acuerdo a lo expresado en (Giusto y Paganini, 1999).

En lo concerniente a la aplicación, no hay demasiados trabajos realizados, y de hecho la patente es relativamente reciente (Lazzeroni y Carovich, 1997). En (Gan *et al.*, 2005; Kuo *et al.*, 2006; Pääkkönen y P.Kuronen, 1996) se presentan sistemas de control activo de ruido aplicados a auriculares. En (Pääkkönen y P.Kuronen, 1996) se utiliza un controlador FB adaptativo y se tratan algunos aspectos interesantes sobre su implementación. Tradicionalmente, se ha realizado control realimentado (FB) en cascos debido a la simplicidad de medir solamente la señal sonora dentro del casco que llega al oído humano, vs. la mayor dificultad de medir señales externas.

Un resumen de la argumentación presentada es la siguiente.

- Los sistemas realimentados sufren las limitaciones clásicas que les acotan el desempeño.

- Las condiciones impuestas por las recientes directivas europeas relativas al ruido laboral (UE-2003/10/EC, 2003) son difíciles de satisfacer con los sistemas realimentados actuales.
- En la práctica, i.e. en presencia de incertidumbre, los controladores de dos grados de libertad (híbrido) no permiten el diseño independiente del FB y el FF.

De lo anterior resulta fundamental poder realizar mediciones de señales externas (no necesariamente acústicas) proporcionales al ruido exterior, de modo de diseñar controladores híbridos para esta aplicación. Este es el objetivo de este trabajo, donde además se resalta el compromiso entre desempeño/robustez vs. el orden del controlador y la incertidumbre del modelo, de cara a su implementación práctica en un DSP o microcontrolador. En el caso del control activo de ruido acústico en cascos, los retardos de tiempo no son tan acentuados como en el caso del control de ruido en tubos debido a la pequeña distancia entre los sensores y los actuadores, pero las limitaciones típicas de los sistemas FB igual se aplican. El trabajo está basado en los modelos experimentales para el sistema del altavoz obtenidos en (White, 1999). El diseño se realiza mediante tres técnicas que permiten obtener sistemáticamente controladores robustos: parametrización de Youla, control óptimo en  $\mathcal{H}_\infty$  y síntesis- $\mu$ . El objetivo es determinar cual de ellos tiene una mejor relación entre el desempeño logrado y el orden del controlador. Se analiza una estructura general de control orientada a obtener el mejor desempeño robusto posible en un rango (amplio) de bajas frecuencias.

El artículo está organizado de la siguiente forma. En la sección 2 se determinan los componentes del sistema y los modelos de cada uno de ellos. En las secciones 3 y 4 se estudian los requerimientos de la aplicación en los referente a desempeño y robustez, analizando en qué rango de frecuencias es necesario atenuar el ruido. En las secciones 5 y 6, se realiza el diseño de los controladores, los cuales se comparan para determinar el mejor de ellos desde el punto de vista de la implementación. Conclusiones y futuras líneas de trabajo finalizan este trabajo en la sección 7.

## 2. MODELOS

El sistema de control activo de ruido acústico (ver figura 1) está compuesto básicamente por cuatro elementos: (1) El transductor electro-acústico (altavoz), (2) Los micrófonos de error y exterior<sup>1</sup>,

<sup>1</sup> Se asume que la señal medida, no necesariamente acústica, sobre la superficie del casco estará relacionada al ruido externo mediante una función conocida. Esta medición, así como el modelado e identificación experimental de este tipo de señales está siendo desarrollado independientemente.



Figura 1. Colocación de los sensores y el actuador sobre el sistema físico

- (3) la cavidad donde el altavoz está montado y
- (4) la electrónica que define el controlador.

El funcionamiento del sistema es el siguiente: Un sensor mide el ruido en el exterior del casco y un micrófono mide el ruido neto en el oído del motociclista. Ambas informaciones son enviadas al controlador que emite la señal eléctrica correspondiente en el altavoz y éste emitirá el sonido requerido. Se buscará que este sonido cancele al ruido externo después de pasar por la atenuación pasiva del casco. El objetivo es que las dos señales se sumen físicamente antes de llegar al oído del motociclista generando una interferencia destructiva que reducirá la desviación de presión efectiva percibida por el sujeto.

## 2.1 Modelado y análisis del sistema

El modelado del sistema se va a realizar en tres partes. En la primera de ellas, se modelará el casco a partir de datos experimentales resumidos en varios artículos. En la segunda parte, se modelará el sistema físico que va desde la entrada de tensión del altavoz hasta la presión efectiva que oye el motociclista. Finalmente, se modelarán los micrófonos.

**2.1.1. Modelado del casco** Hay diversos estudios relativos a la atenuación pasiva en cascos, algunos ejemplos los encontramos en (Pääkkönen y P.Kuronen, 1996) y (Ivey, 1987). En ellos encontramos las respuestas en frecuencia obtenidas mediante la experimentación. En la figura 2 hay un ejemplo obtenido de (Pääkkönen y P.Kuronen, 1996). En la misma figura, observamos el siguiente hecho que queda constatado en todos los resultados experimentales consultados:

Por el momento y a los fines prácticos, consideraremos que existe un micrófono que toma el ruido exterior.

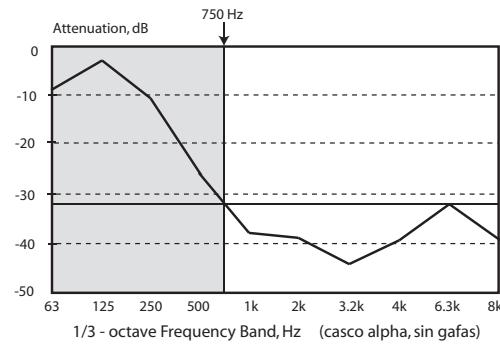


Figura 2. Atenuación pasiva del casco obtenida experimentalmente

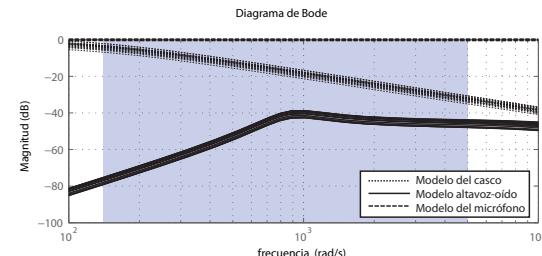


Figura 3. Respuesta en frecuencia del modelo del casco y el modelo del sistema altavoz-oído con un modelo de incertidumbre multiplicativa

**Hecho 1:** A partir de frecuencias de 750Hz la atenuación pasiva del casco supera los 30dB.

Con esta información, el casco ha sido modelado con la siguiente función de transferencia de primer orden cuya respuesta en frecuencia puede observarse en la figura 3.

$$P_{yd}(s) = \frac{0,12}{s + 0,125} \quad (1)$$

**2.1.2. Modelado del altavoz** El modelo que utilizaremos para los altavoces relaciona los parámetros eléctricos, magnéticos y acústicos del sistema con la teoría de circuitos. Este modelo es analizado en (Beranek, 1954) y su validez ha sido validada en trabajos como (White, 1999).

El modelo parte de los componentes eléctricos y mecánicos del altavoz, quedando por ajustar la impedancia acústica entre el altavoz y el oído del motociclista, denominada *Head Related Transfer Function* (HRTF, (Kulkarni y Colburn, 2000)). La determinación de la HRTF es un tema de investigación actual y es debida al acoplamiento entre la impedancia acústica de los altavoces y la impedancia del oído humano que es distinta para cada usuario. Dicho acoplamiento modifica la presión en lazo abierto del sistema y puede provocar problemas de estabilidad. Sobre este aspecto, existen diversos trabajos que permiten identificar los parámetros del modelo de una forma experimental (Colloms, 1982).

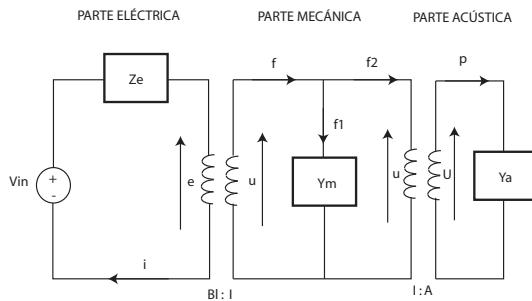


Figura 4. Modelado del sistema altavoz - órgano auditivo

En la figura 4 se presenta el modelo de la impedancia con las distintas magnitudes que intervienen. En el Apéndice se encuentra la definición de cada una de ellas, sus unidades y sus respectivas relaciones de transformación. Notemos que el esquema se divide en tres partes: (1) El modelo de la inductancia eléctrica que es significativa en todo tipo de altavoces, (2) La inductancia mecánica, que modela el sistema del diafragma y (3) La inductancia acústica, que traduce la velocidad del volumen de aire a presión en el oído del motociclista. Las tres impedancias de la misma figura se definen de la forma siguiente:

$$Z_e = L_0 s + R_0 \quad (2)$$

$$Z_m = \frac{Ms^2 + R_{ms}s + K}{s} \quad (3)$$

$$Z_a = C(r) \frac{s}{s + 2\pi b} \quad (4)$$

Aquí  $C(r)$  es la dinámica del micrófono y  $b$  es la frecuencia de curvatura (para un pistón de 1,5"  $\sim 2,8$  KHz), estos valores se pueden computar conociendo  $r$  (la distancia del altavoz al micrófono) y  $r'$  (el radio del altavoz).

$$C(r) = \frac{\rho c}{r} \quad (5)$$

$$b = f_3 = \frac{c}{2\pi r'} \quad (6)$$

Por otro lado, a través del análisis del circuito de la figura 4 podemos establecer las siguientes relaciones:

- Relaciones de malla:

$$V_{in} = Z_e i - e \quad (7)$$

$$u = -Y_m f_1 \quad (8)$$

$$U = -Y_a p \quad (9)$$

Con todas estas relaciones, definimos las siguientes constantes  $D, E$  y  $F$ :

$$D = L_0(Mb + R_{ms} + A^2C) + R_0M$$

$$E = L_0(R_{ms}b + K + A^2Ca) \\ + R_0(Mb + R_{ms} + A^2C) + B\ell^2$$

$$F = L_0Kb + R_0(R_{ms}b + K + A^2Ca)$$

El modelo de la planta queda definido como la relación entre el voltaje de entrada y la presión en el oído.

$$\frac{p(s)}{V_{in}} = \frac{-B\ell ACs^2 - B\ell ACs}{L_0Ms^4 + Ds^3 + Es^2 + Fs + R_0Kb}$$

**2.1.3. Modelado del micrófono** En este esquema existen dos señales de entrada provenientes de dos micrófonos distintos. El primero de ellos está colocado en el exterior del casco y captará el ruido en la superficie del mismo. El segundo micrófono es el micrófono de error y estará colocado en el oído del motociclista.

La respuesta en frecuencia típica de un micrófono de calidad presenta una curva plana en el rango de frecuencias [20, 1000] Hz de magnitud alrededor de los  $\pm 3$ dB. Se observa que estos valores están dentro del rango de aplicación, por lo tanto se define la función de transferencia del micrófono como una ganancia unitaria (ver Fig. 3).

Por otro lado, el rango de respuesta que se establece para los micrófonos se limita al conjunto de frecuencias audibles (20Hz-20KHz), con lo cual queda definido en 20Hz el límite inferior para el análisis.

### 3. RANGO DE APLICACIÓN DEL CONTROL ACTIVO

El oído humano es capaz de detectar variaciones de presión en el aire en un rango que va de 20Hz a 20kHz aproximadamente. En (Jordan, 2004) se apunta que el rango de exposición al ruido de los motociclistas ocupacionales está entre 76 y 111dB aproximadamente, y esta magnitud es debida básicamente a las turbulencias que el viento provoca en el casco. En el mismo artículo, se establece que la fuente de ruido dominante se concentra en la base del casco entre la barbilla y el cuello del motociclista. Asimismo se grafica el nivel de ruido percibido por el motociclista en función de la velocidad media a la que circula y se observa una relación directa que se traduce en el aumento de 2,1 dB de ruido al incrementar 10 Km/h la velocidad media.

**Hecho 2:** El nivel de presión sonora percibido por los motociclistas depende directamente de la velocidad a la que circulan y el rango de exposición está entre 76 y 111dB.

Debe notarse que la naturaleza del sistema es no lineal ya que el ruido percibido por el motociclista varía con la velocidad. En este artículo, se tratará el caso de sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI), considerando las variaciones en los niveles (y posiblemente de frecuencias) de ruido como incertidumbre en el modelado y como parte

de la familia de perturbaciones acotadas externas. Por esta razón es especialmente importante en este caso contar con un diseño robusto. El caso no lineal será estudiado en el futuro.

**El nivel de presión sonora o SPL (Sound Pressure Level)  $L_p$**  es una medida logarítmica de la presión medida cuadráticamente (RMS) de un ruido particular referido a una determinada fuente de ruido de referencia. El SPL se mide en decibelios (dB) y se obtiene de la forma siguiente:

$$L_p = 10 \log_{10} \left[ \frac{p^2}{p_0^2} \right] = 20 \log_{10} \left[ \frac{p}{p_0} \right] \quad (10)$$

Por lo tanto,

$$76,1 \leq 20 \log_{10} \left[ \frac{p}{p_0} \right] \leq 110,6 \quad (11)$$

donde  $p_0$  es la presión de ruido de referencia y  $p$  es la presión de ruido RMS medida. La referencia de presión sonora más utilizada es la del aire  $p_0 = 20\mu\text{Pa}$ .

Esta forma de expresar la presión de ruido es muy útil cuando tratamos con temas de audición, porque el ruido percibido se correlaciona de una manera aproximadamente logarítmica con la presión acústica (Ley de Weber-Fechner (Möser, 2004)). Por otro lado, teniendo en cuenta el Hecho 1 tan solo será necesario realizar control activo en el rango de frecuencias que no es atenuado por el material del casco. El límite de ruido admisible estará determinado por la normativa europea:

**Hecho 3:** La directiva 2003/10/EC del Parlamento Europeo referente a la regulación de ruido en el trabajo, en el artículo 5(1) especifica que el límite de exposición diaria al ruido debe ser SPL  $\leq 87$  dB.

Teniendo en cuenta los hechos 1,2 y 3, llegamos a la conclusión de que los motociclistas ocupacionales no están cumpliendo la directiva citada. Por lo tanto, es necesario atenuar 30 dB en el rango de frecuencias audibles que no haya sido atenuado pasivamente por el casco, para cumplir la normativa europea. De este modo se reduce el riesgo que tienen este tipo de trabajadores a sufrir NIHL, esto es SPL  $\leq 87$  dB,  $\forall \omega \in \mathcal{F}$ . Aquí  $\mathcal{F} = [20, 750] \times 2\pi \text{ rad/s}$ , es el rango de frecuencias de interés.

Para medir la atenuación mínima (AM) obtenida por el sistema de control activo de ruido frente a una señal de perturbación, se resta el nivel de presión sonora en el interior del casco con y sin el sistema de control activo de ruido.

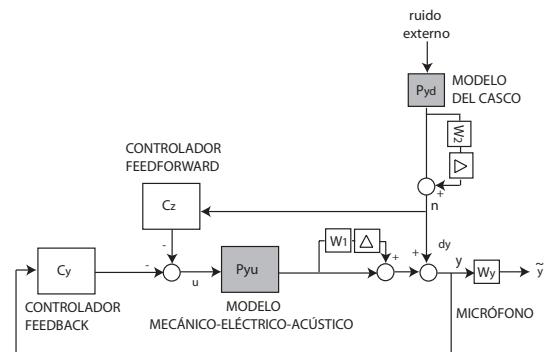


Figura 5. Diagrama de bloques del sistema con el controlador DEUS

$$AM = L_{out,max} - L_{in,max} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &= 20 \log_{10} \left[ \frac{p_{out,max}}{p_0} \right] - 20 \log_{10} \left[ \frac{p_{in,max}}{p_0} \right] \\ &= 20 \log_{10} \left[ \frac{p_{out,max}}{p_{in,max}} \right] \end{aligned}$$

## 4. ANÁLISIS DEL CONTROLADOR

### 4.1 La configuración de control DEUS

Definimos el diagrama de bloques de la figura 5 donde hay un controlador FF y otro FB. Se ha optado por esta estructura a diferencia de la utilizada en (Toochinda *et al.*, 2002), debido a que la naturaleza del sistema del casco permitía simplificarla en varios aspectos. Por otro lado, los controladores de tipo FF generan mayor desempeño en un rango de frecuencias mayor que los controladores FB, aunque son propensos a la inestabilidad. De esta forma, con la combinación de los dos controladores se espera lograr un mayor desempeño en el rango de frecuencias de interés, garantizando estabilidad.

En la figura 5 presentamos el diagrama de bloques del sistema. La variable  $d$  es la medida del ruido exterior cuyo sensor estará colocado en la parte superior del casco. A partir de esta medida, estimaremos el ruido interior del casco a través de la transferencia  $P_{yd}$ . El ruido que oye el motorista está definido por la variable  $y$  y se captará a través de un micrófono situado cerca del órgano auditivo del motociclista.

En el caso de que exista control, la señal  $y$  corresponderá al sonido resultante de la suma física entre el sonido externo y el emitido por el altavoz de cancelación.

La estructura DEUS tiene entradas  $u$  y  $d$  y salida  $y$ . Para el análisis y diseño, se la representa como una Transformación Lineal Fraccional (LFT), indicada en la figura 6.

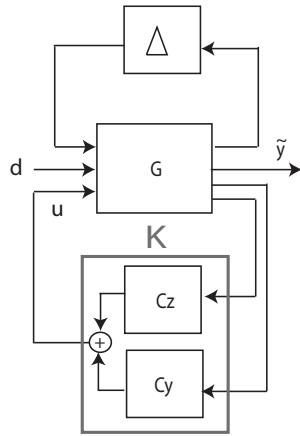


Figura 6. Configuración del sistema con el bloque de incertidumbre y el controlador con 2 grados de libertad

Con el fin de determinar cual es la mejor opción de control para el sistema de control activo de ruido, se han diseñado tres tipos de controladores robustos con las mismas solicitudes de desempeño y robustez. El controlador deberá ser capaz de garantizar la estabilidad y el desempeño frente a incertidumbres dinámicas presentes tanto en el modelo del casco como en el del altavoz.

#### 4.2 Definiciones de Desempeño y Robustez

Observando la figura 5 definiremos el objetivo de control nominal (sin incertidumbre) de la forma siguiente:

**Desempeño Nominal:** Se desea minimizar, en el rango de frecuencia deseado, la energía de la señal de error para todos los ruidos externos acotados también en energía. La señal de error es la resultante de sumar físicamente el ruido externo y el emitido por el altavoz de cancelación, o sea, el ruido efectivo  $y$  en el oído del motociclista. Interesa además, priorizar un cierto rango de frecuencias definido por el peso  $W_y$  con lo cual se minimiza  $\tilde{y} = W_y y$ .

$$\|\tilde{y}(s)\|_2 \leq 1, \quad \forall \|d(s)\|_2 \leq 1 \iff \|M_{33}(s)\|_\infty \leq 1$$

La transferencia  $M_{33}(s)$  está indicada en la figura 7 y conecta la perturbación  $d$  con la salida de desempeño  $\tilde{y}$ . La condición anterior se puede expresar en este caso de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} & \left\| W_y \frac{P_{yd}(1 - C_z P_{yu})}{1 + P_{yu} C_y} \right\|_\infty < 1 \quad (13) \\ & \iff |W_y P_{yd}(1 - C_z P_{yu})| < |1 + P_{yu} C_y|, \quad \forall \omega \\ & \iff |W_y P_{yd}(1 - C_z P_{yu})| < 1 - |P_{yu} C_y|, \quad \forall \omega \\ & \iff |W_y P_{yd}(1 - C_z P_{yu})| + |P_{yu} C_y| < 1, \quad \forall \omega \end{aligned}$$

Notar que el objetivo de desempeño nominal se establece definiendo una función de peso  $W_y(s)$

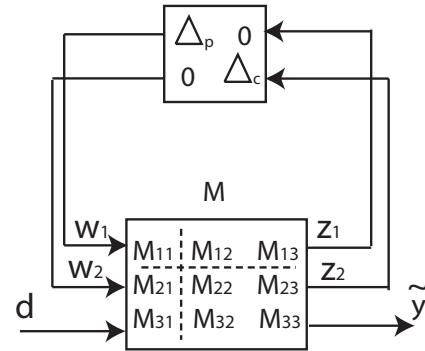


Figura 7. Configuración del sistema a lazo cerrado con el bloque de incertidumbre

adecuada, de manera de concentrar la atenuación en el rango de aplicación deseado  $\mathcal{F}$ . El peso de desempeño se eligió con un pico de resonancia a los 1000 rad/s que adquiere allí un valor de 42 dB (ver figura 9):

$$W_y(s) = \frac{28,5 \times 10^{-5} s^2}{(s^2 + 0,402s + 1,011)^2} \quad (14)$$

Con este peso se pretende conseguir una atenuación máxima, para todas las plantas posibles, en el rango de frecuencias de interés definido como  $\mathcal{F}$ .

En (White, 1999) se establece que a partir de los 1,5 KHz, el modelo que se utiliza para definir la función de transferencia entre el voltaje de entrada del altavoz y la presión efectiva en el oído del motociclista empieza a tener un valor de incertidumbre demasiado grande y, por lo tanto, el modelo deja de ser confiable. Por otro lado, al definir el modelo del altavoz también se hace una simplificación en el rango de frecuencias que interesa y aquí también se comete un error en los parámetros. Estos dos aspectos marcan la variabilidad que se tiene en nuestro modelo respecto a la planta real y, con ellos, se define el objetivo de robustez.

**Estabilidad Robusta:** Se desea estabilidad interna del lazo de control frente a incertidumbres en el modelo del altavoz y del casco, definidas por las funciones de peso  $W_1(s)$  y  $W_2(s)$ . Sin embargo, dado que la incertidumbre en el modelo del casco está fuera del lazo cerrado, no afecta a la estabilidad (interna) robusta del sistema. Asimismo por ser incertidumbre de modelado, tampoco a afecta a su desempeño nominal, aunque sí al desempeño robusto y será evaluado en la próxima subsección.

De la interconexión de la figura 7, la función de transferencia que relaciona los señales  $d$  e  $y$ , viene dada por la LFT entre la planta nominal  $M(s)$  y el bloque de incertidumbre  $\Delta$ . Como se mencionó antes, el bloque  $\Delta_{casco}$  no puede inestabilizar el sistema, por lo cual se redefine la matriz  $M(s)$  de la figura 7 de la siguiente manera:

$$\tilde{M}_{11} = M_{11}, \quad \tilde{M}_{12} = [M_{12} \ M_{13}] \quad (15)$$

$$\tilde{M}_{21} = \begin{bmatrix} M_{21} \\ M_{31} \end{bmatrix}, \quad \tilde{M}_{22} = \begin{bmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \quad (16)$$

De resultados clásicos de sistemas con incertidumbre dinámica global (Sánchez Peña y Sznaier, 1998; Zhou *et al.*, 1996) aplicados a la LFT  $F_u[M(s), \Delta_p]$ , resulta que la inestabilidad sólo puede deberse al bloque  $[I - \tilde{M}_{11}(s)\Delta_p]^{-1}$ . Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que la interconexión de la figura 7 sea robustamente estable, partiendo de un sistema nominalmente estable es:

$$\begin{aligned} \|\tilde{M}_{11}(s)\|_\infty &\leq 1 \\ \iff \left\| W_1 \frac{P_{yu}C_y}{1 + P_{yu}C_y} \right\|_\infty &< 1, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\iff |W_1 P_{yu} C_y| < |1 + P_{yu} C_y|, \quad \forall \omega \quad (18)$$

Asimismo, de la figura 5 se ve que el conjunto de modelos se ha tomado con incertidumbre multiplicativa, i.e.  $\mathcal{G} = \{P_{yu}(s)[1 + W_1(s)\Delta_p], |\Delta_p| < 1\}$ . Por lo tanto, el peso de robustez  $W_1(s)$  debe cubrir en magnitud el error relativo de aproximación entre el modelo nominal y el sistema físico, en todas las frecuencias:

$$\left| \frac{g(j\omega) - P_{yu}(j\omega)}{P_{yu}(j\omega)} \right| \leq |W_1(j\omega)|, \quad \forall \omega, \quad \forall g \in \mathcal{G} \quad (19)$$

Sin embargo, desde el punto de vista práctico sólo debe hacerlo en el rango de las frecuencias que efectivamente aparecerán en el sistema real, como se indica en la figura 8<sup>2</sup>. En esta figura se ha escogido el peso de  $W_1(s)$  de modo que cubra toda la incertidumbre provocada por la aproximación en el rango de frecuencias dónde el modelo tiene sentido ( $[100, 10^5]$  rad/s), lo que resulta en un 10 % de error relativo hasta los 1500Hz, a partir del cual comienza a aumentar hasta llegar a una incertidumbre en el modelo del 100 % a los  $10^5$  rad/s. Esto también indica la máxima frecuencia para la cual el modelo es confiable y por lo tanto se puede lograr desempeño (ver figura 9).

$$W_1(s) = 0,01 \frac{s + 4 \times 1}{s + 5 \times 100} \quad (20)$$

En la figura 5 observamos que también tenemos incertidumbre en la función de transferencia  $P_{yd}$  que representa el modelo del casco. Supondremos que el peso de incertidumbre  $W_2(s)$  presente en este modelo es idéntica a la que se presenta en el modelo eléctrico-mecánico-acústico del altavoz ( $P_{yu}$ ).

<sup>2</sup> En esta figura puede observarse que (19) no se cumple por debajo de 100 rad/s, ya que no está dentro del rango de aplicación de los micrófonos y por arriba de  $10^5$  rad/s, ya que de todas formas allí la incertidumbre es mayor al 100 %.

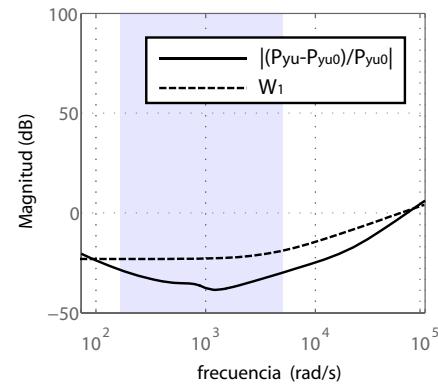


Figura 8. Elección del peso de robustez

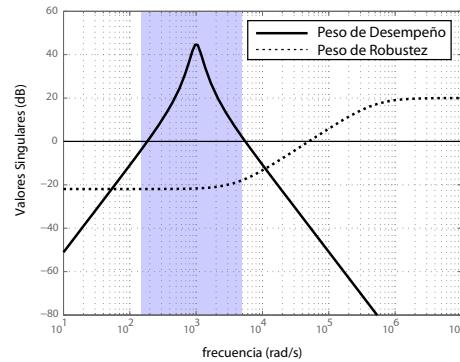


Figura 9. Pesos de desempeño (línea llena) y robustez (línea punteada)

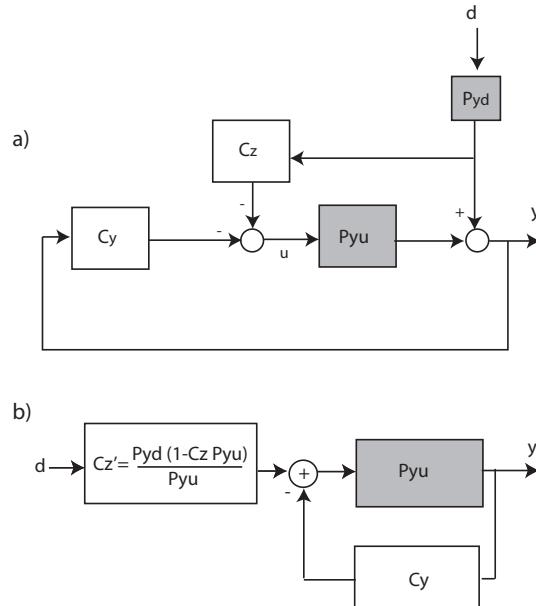


Figura 10. Proceso de simplificación del diagrama de bloques del sistema  $a \rightarrow b$

Con todo lo anterior, se analiza el objetivo último del controlador: el desempeño robusto.

**Desempeño Robusto:** Se desea obtener el desempeño definido anteriormente, cualquiera sea el modelo de la familia  $\mathcal{G}$  que represente a la planta real, bajo la restricción de estabilidad.

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}(s)\|_2 &\leq 1, \forall \|d(s)\|_2 \leq 1, \forall |\Delta_{p(c)}| < 1, \\ \iff \|F_u[M(s), \Delta]\|_\infty &\leq 1, \forall |\Delta_{p(c)}| < 1, \quad (21) \\ \iff \mu_\Delta [M(j\omega)] &< 1, \forall \omega \quad (22) \end{aligned}$$

Este último es un resultado clásico de análisis robusto de sistemas con incertidumbre estructurada aplicado al sistema de la figura 7 (Packard y Doyle, 1993; Sánchez Peña y Sznaier, 1998; Zhou *et al.*, 1996). La estructura de incertidumbre sobre la cual se calcula el valor singular estructurado  $\mu_\Delta(\cdot)$  es:

$$\Delta = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta_p & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_c & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_d \end{bmatrix}, \begin{array}{l} \Delta_i \in \mathbb{C}, \\ |\Delta_i| < 1 \\ i \in \{p, c, d\} \end{array} \right\} \quad (23)$$

dónde  $\Delta_p$  es la incertidumbre en el modelo del sistema altavoz-oído,  $\Delta_c$  es la incertidumbre en el modelo del casco y  $\Delta_d$  se denomina bloque de *desempeño* y relaciona  $d$  con  $\tilde{y}$ .

Para el diseño mediante la parametrización de Youla, es necesario encontrar condiciones necesarias y/o suficientes de desempeño robusto.

El casco se representa por la siguiente familia de modelos:  $\mathcal{H} = \{P_{yd}(s)[1 + W_2(s)\Delta_c], |\Delta_c| < 1\}$ . Por lo tanto la condición de desempeño robusto en (21) puede expresarse como la ecuación (13) pero reemplazando  $P_{yu}$  y  $P_{yd}$  por cualquier elemento de las familias de modelos  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$ , respectivamente. Asumiendo estabilidad robusta, se llega a la siguiente condición suficiente:

$$\begin{aligned} \left| W_y h \frac{1 - g C_z}{1 + g C_y} \right| &< 1, \forall g \in \mathcal{G}, h \in \mathcal{H} \\ \iff \overbrace{|W_y P_{yd}|(1 + |W_2|)}^{f^2} &|1 - g C_z| < |1 + g C_y| \\ \iff f^2 |1 - C_z P_{yu} - C_z P_{yu} W_1 \Delta_p| & \\ < |1 + C_y P_{yu} + C_y P_{yu} W_1 \Delta_p|, \forall |\Delta_p| < 1 & \\ \iff f^2 (|1 - C_z P_{yu}| + |C_z P_{yu} W_1|) & \\ < |1 + C_y P_{yu}| - |C_y P_{yu} W_1| & \\ \iff \frac{f^2 |1 - C_z P_{yu}| + (f^2 |C_z| + |C_y|) |P_{yu} W_1|}{1 + C_y P_{yu}} &< 1 \end{aligned}$$

La segunda ecuación debe cumplirse para todo  $g \in \mathcal{G}$  y todas además para todo  $s = j\omega$ . El paso de la primera a la segunda ecuación puede demostrarse por la existencia de un  $|\Delta_c| < 1$  (dependiente de  $\omega$ ) que maximiza el módulo de  $h \in \mathcal{H}$ . La positividad del segundo miembro de la cuarta ecuación se basa en la condición de estabilidad robusta (18).

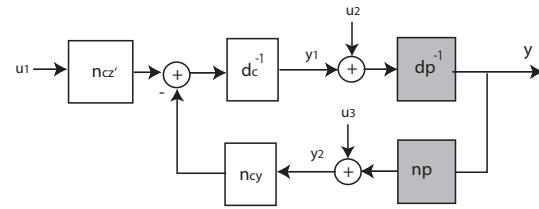


Figura 11. Diagrama de bloques simplificado del sistema

Estabilidad Robusta

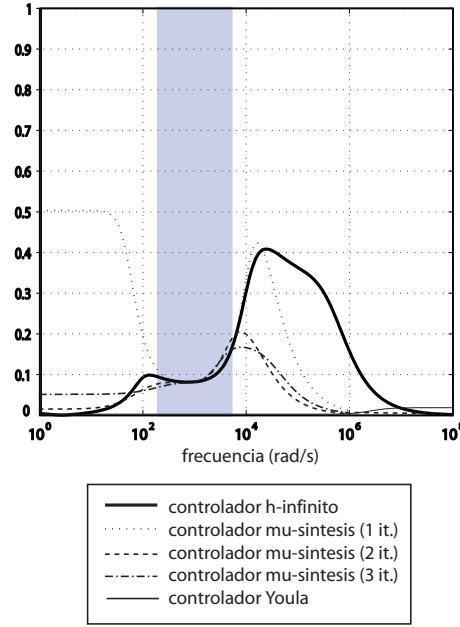


Figura 12. Gráfico del máximo valor singular de la condición de estabilidad robusta.

## 5. DISEÑO DE CONTROLADORES

### 5.1 Diseño por la parametrización de Youla-Kucera (YK)

El controlador de dos grados de libertad basado en la parametrización de YK permite encontrar la representación de todos los controladores que garantizan la estabilidad interna del sistema (Youla *et al.*, 1976; Desoer *et al.*, 1980; Pernebo, 1981; Vidyasagar, 1985) y además proveen desempeño, en función de dos parámetros  $Q(s)$  y  $R(s)$ , cuya única condición es ser estables y propios, i.e.  $Q(s), R(s) \in \mathcal{H}_\infty$ . Sólo será necesario ajustar estos parámetros para obtener el mejor desempeño robusto con el menor orden resultante del controlador.

Debe notarse que el controlador de dos grados de libertad de la figura 10b puede representarse como el diagrama de bloques de la figura 11 con  $(d_c, [n_{cy} \ n_{cz'}])$  coprimos, ya que para cualquier valor de  $C_y$  y  $C_z$  podemos encontrar sus factorizaciones coprimas  $C_y = d_{cy}^{-1} n_{cy}$  y  $C_z = d_{cz'}^{-1} n_{cz'}$  con  $n_{cy}, n_{cz'}, d_{cy}, d_{cz'} \in \mathcal{H}_\infty$ .

Entonces,

$$\begin{bmatrix} An_{cy} & Bn_{cz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XD \\ YF \end{bmatrix} + d_c(XE + YG) = XA + YB$$

e igual a la unidad. En (Vidyasagar, 1985) se demuestra que para la estructura presentada en la figura 10 y tomando  $a$  y  $b$  que satisfagan la ecuación de Diofantos  $an_p + bd_p = 1$ , el conjunto de todos los controladores que estabilizan  $G$  es:

$$\begin{aligned} C'_z &= Q(s)[n - R(s)n_p]^{-1} \\ C_y &= [a + R(s)d_p][n - R(s)n_p]^{-1} \\ &\text{con } Q(s), R(s) \in \mathcal{H}_\infty \end{aligned}$$

Entonces, transformando el diagrama de bloques de la figura 10a en la forma indicada en la figura 10b, se obtiene:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C'_z & C_y \end{bmatrix} = \left[ -\frac{P_{yd}(1 + P_{yu}C_z)}{P_{yu}} \quad C_y \right]$$

Por lo tanto, el conjunto de todos los controladores que estabilizan el modelo nominal es:

$$\begin{aligned} C'_z &= \frac{Q(s)}{b - R(s)n_{P_{yu}}}, \quad C_y = \frac{a + R(s)d_{P_{yu}}}{b - R(s)n_{P_{yu}}} \\ &Q(s), R(s) \in \mathcal{H}_\infty \end{aligned}$$

Si  $P$  es estable, como el caso que se trata en el artículo, puede escogerse:  $n_{P_{yu}} = P_{yu}$  y  $d_{P_{yu}} = 1$ . Entonces,

$$C'_z = \frac{Q(s)}{1 - R(s)P_{yu}}, \quad C_y = \frac{R(s)}{1 - R(s)P_{yu}}$$

El diseño consistirá en seleccionar  $Q(s)$  y  $R(s)$  de manera que se cumplan las especificaciones de robustez y desempeño. Los resultados de este diseño se observan en las figuras 12 y 13. Se observa que el controlador resultante es de orden 9 y tiene un valor de  $\mu$  cercano a 1,6 (el mayor entre los controladores diseñados), en cambio, cumple la condición de estabilidad robusta con un valor pico del máximo valor singular para el bloque  $M_{11}$  que está cercano a 0,02.

## 5.2 Diseño por control óptimo en $\mathcal{H}_\infty$

De la figura 6 resulta el problema siguiente:

$$\min_{K(s) \text{ estabilizantes}} \|F_\ell[G(s), K(s)]\|_\infty \quad (24)$$

que se resuelve por el método de control óptimo en  $\mathcal{H}_\infty$ . Esto da la solución óptima al caso de desempeño nominal entre las dos primeras entradas y dos primeras salidas de  $G(s)$  o de estabilidad robusta considerando un bloque  $\Delta \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  (incertidumbre no estructurada) conectado entre esos

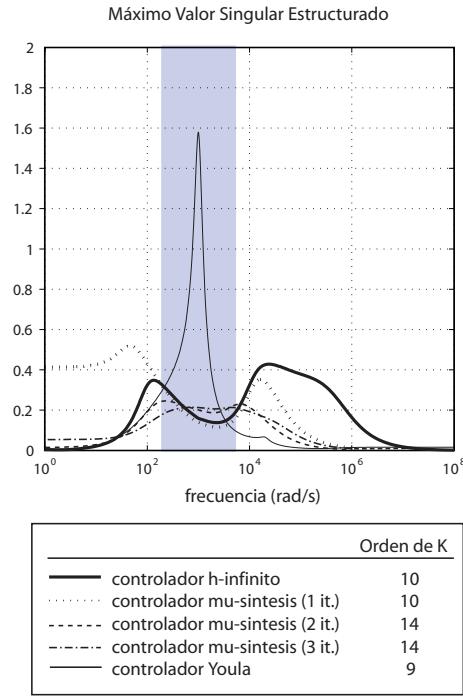


Figura 13. Gráfico del máximo valor singular estructurado para la condición de desempeño robusto.

mismos pares de entradas y salidas. Claramente esto resulta más conservador que el controlador obtenido por síntesis- $\mu$ , dado que en este último caso se considera el bloque de incertidumbre estructurado (23), como es el problema original. Sin embargo, la ventaja en este caso es que el orden del controlador es menor, ya que corresponde a la primera iteración de la síntesis por valores singulares estructurados.<sup>3</sup>

Las funciones de peso utilizadas han sido las que se indican en la figura 9 y los resultados que hemos obtenido con el controlador  $\mathcal{H}_\infty$  se ilustran en las figuras 12 y 13. Vemos que el controlador que se obtiene tiene el orden igual a 10 que es un poco superior al del controlador diseñador por la parametrización de YK pero ofrece un valor de  $\mu$  mucho menor (cercano a 0,43).

## 5.3 Diseño por síntesis- $\mu$

Para la estructura de incertidumbre en (23), el problema de desempeño robusto se resuelve de manera óptima de la siguiente manera:

$$\min_{K(s) \text{ estabilizantes}} \mu_\Delta \{F_\ell[G(s), K(s)]\} \quad (25)$$

que puede calcularse de forma aproximada mediante la iteración D-K (Packard y Doyle, 1993; Sánchez Peña y Sznajer, 1998; Zhou *et al.*, 1996)

<sup>3</sup> Esto ocurre en el caso que la primera iteración se haga con pesos diagonales  $D = D^{-1} = I$ .

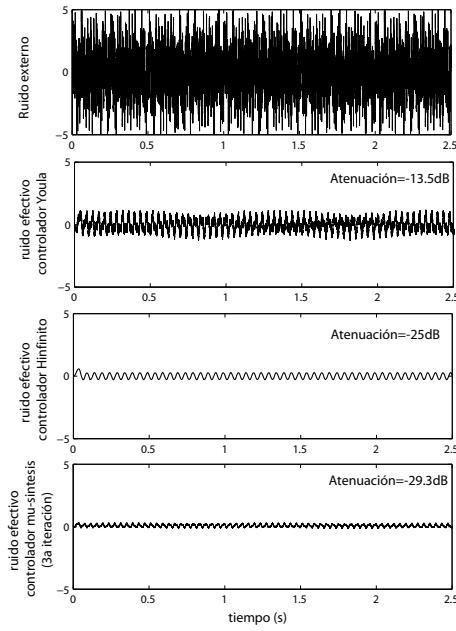


Figura 14. Respuesta temporal del sistema con los distintos controladores diseñados

o de otras formas (Rotea y Iwasaki, 1994; Goh *et al.*, 1994). En este caso el valor de  $\mu_\Delta$  puede obtenerse de manera exacta ya que el número de bloques de incertidumbre compleja (incluido el bloque de desempeño) es menor o igual a tres (Packard y Doyle, 1993).

Los resultados del proceso de síntesis- $\mu$  para las tres primeras iteraciones se ilustran en las figuras 12 y 13. Puede notarse que la primera iteración es similar a la del controlador  $\mathcal{H}_\infty$  sólo en las frecuencias de interés, porque en este caso el bloque  $D$  utilizado es constante, pero no igual a la unidad, i.e.  $D = D^{-1} \neq I$ .

En las figuras citadas se observa que el valor pico del máximo valor singular estructurado descende en cada iteración pero, a la vez, el orden del controlador utilizado para conseguir este valor de desempeño crece. De esta forma, con la primera iteración se consigue un valor de  $\mu$  cercano a 0,5 y con la tercera iteración este valor desciende hasta 0,17. A la vez, el controlador pasa de tener orden 10 a orden 14.

#### 5.4 Comparación de los diseños

En las figuras 12, 13, 14 y 15 puede observarse que la mejor atenuación la proporcionan los controladores realizados por síntesis- $\mu$  en la segunda y tercera iteración. Sin embargo, esta mejora en la respuesta es a costa de un controlador de mayor orden ( $O(K) = 14$ ) que los realizados por la parametrización de Youla ( $O(K) = 9$ ) y control en  $\mathcal{H}_\infty$  ( $O(K) = 10$ ).

Por otro lado, resulta claro que el controlador diseñado por la parametrización de YK no cumple

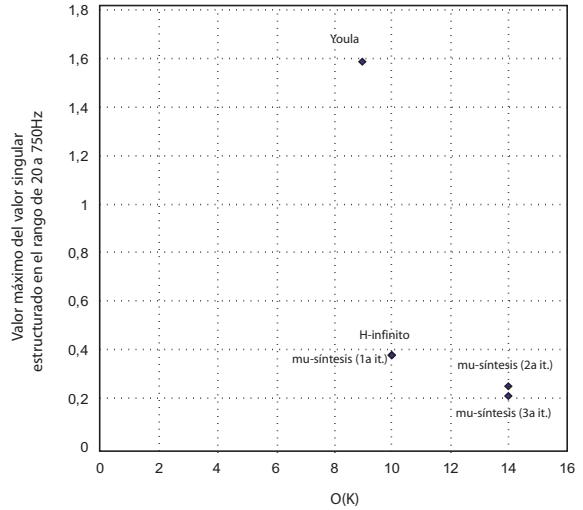


Figura 15. Comparación de la relación  $\mu_\Delta \in \mathcal{D}$  y el orden del controlador.

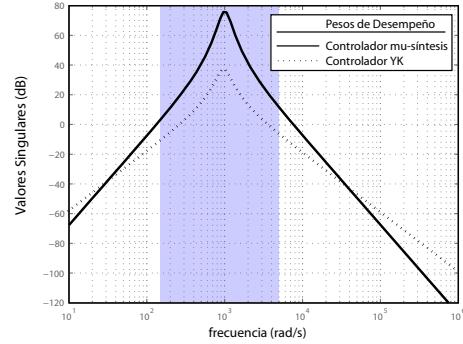


Figura 16. Pesos de Desempeño de los dos controladores óptimos diseñados por Youla y síntesis- $\mu$

las especificaciones de desempeño para el juego de pesos indicado. La solución dada ha sido la mejor que se ha encontrado limitando el orden del controlador a 9. Por supuesto, siempre pueden encontrarse parámetros  $Q(s)$  y  $R(s)$  que copien la solución obtenida por valores singulares estructurados, a costa de aumentar el orden de los parámetros y por ende del controlador. El objetivo de diseñar por YK en este caso es el de encontrar un mejor compromiso desempeño/complejidad en el controlador.

De acuerdo con la información anterior, el controlador diseñado por la tercera iteración de síntesis- $\mu$  ofrece un desempeño notablemente superior al diseño por  $\mathcal{H}_\infty$  a costa de aumentar poco el orden del mismo. Las características de este controlador respecto a los demás diseños pueden apreciarse en la figura 15. La solución propuesta es un controlador de orden 14 con valores de desempeño robusto muy buenos, en el rango de frecuencias de interés. Las AM obtenidas de los controladores de YK,  $\mathcal{H}_\infty$  y síntesis- $\mu$  en este rango de frecuencias resultan de 13,5 dB, 25 dB y 29,3 dB, respectivamente. Éstas fueron medidas de acuerdo a la ecuación (12) de la sección 3.

Sin embargo puede observarse que este diseño que ha servido de comparación entre las diferentes técnicas, todavía no logra la mejor desempeño posible. Por lo tanto, en la próxima sección se realiza un diseño maximizando el desempeño robusto, mediante el procedimiento óptimo (síntesis- $\mu$ ). También se buscará, mediante la técnica de YK, un controlador de menor orden, con el objetivo de encontrar un mejor compromiso desempeño/complejidad.

## 6. MAXIMIZACIÓN DE DESEMPEÑO ROBUSTO

Seguidamente, se ha comprobado cual es el mejor desempeño que se puede conseguir mediante el diseño por síntesis- $\mu$  y buscar mediante un diseño por YK un controlador de menor orden. En la figura 16 se observan los pesos de desempeño con los cuales se obtiene un pico máximo del valor singular estructurado cercano a uno, para cada controlador. En el caso de síntesis- $\mu$  se llega a una atenuación (AM) en todo el rango de frecuencias de 33 dB, con un máximo de 80 dB para aproximadamente  $\omega = 1000$  rad/s, mediante un controlador de orden 12. En el caso de la parametrización de YK se consigue una atenuación en todo el rango de 14 dB, y un máximo de casi 40 dB en la misma frecuencia ( $\omega = 1000$  rad/s), utilizando un controlador de orden 9.

Los gráficos del máximo valor singular estructurado se pueden ver en la figura 17 donde se ilustra que el pico máximo es igual a 1 en ambos casos, obteniendo así el máximo desempeño para toda la familia de modelos.

Finalmente, se ha simulado la respuesta temporal de los dos controladores diseñados con una señal multisenoidal restringida a la banda de frecuencias de interés y con el modelo de incertidumbre del peor caso (computado mediante `wcperf` utilizando (Balas *et al.*, 1995)). El resultado ha sido el de la figura 18. Se observa que en el caso de síntesis- $\mu$  se obtiene una atenuación casi total del ruido externo aplicado al sistema.

## 7. CONCLUSIONES

Basados en la posibilidad de contar con una señal proporcional al ruido exterior en cascos de motociclistas, se ha realizado un estudio preliminar para el diseño de un controlador de dos grados de libertad (FF/FB), para atenuar el ruido acústico en el mismo. Se han obtenido características del sistema basadas en estudios experimentales previos y se ha analizado la relación orden del controlador vs. desempeño, para tres controladores distintos. Los resultados simulados logran atenuaciones de

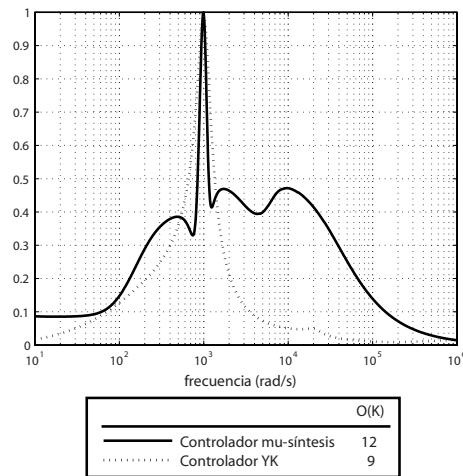


Figura 17. Máximo valor singular estructurado de los dos controladores óptimos diseñados por Youla y síntesis- $\mu$

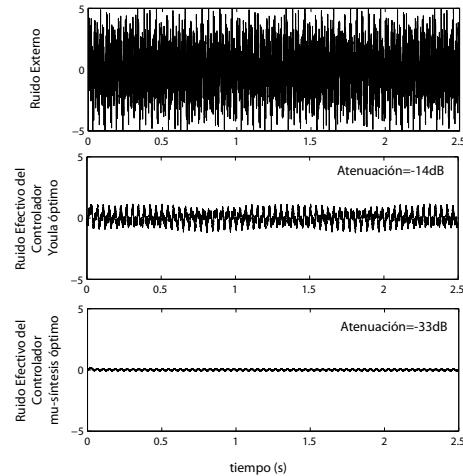


Figura 18. Respuesta temporal de los dos controladores óptimos diseñados por Youla y síntesis- $\mu$

hasta 33 dB mediante un controlador de orden 12 diseñado por síntesis- $\mu$  y de 14 dB mediante otro de orden 9 que utiliza la parametrización de YK. Está claro que utilizando la tecnología de DSPs actual, el diseño mediante valores singulares estructurados es perfectamente realizable.

El proceso de modelización e identificación experimental de las señales externas que permiten utilizar un componente FF en el control en este tipo de aplicaciones, están siendo estudiadas por los autores y serán presentadas en el futuro. El prototipo de laboratorio que se muestra en la foto de la figura 1 y que será utilizado en los experimentos con estas señales y controles, está en etapa de desarrollo.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado con el apoyo de ICREA, la Comissió de Recerca de la Generalitat de Catalunya (Grup de Recerca Consolidat SAC ref. 2005SGR00537) y la financiación del proyecto

DPI2005-04722 del Ministerio de Educación y Ciencia.

## REFERENCIAS

- Bai, M.R. y D.J. Lee (1997). Comparison of active noise control structures in the presence of acoustical feedback by using the  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis technique. *Journal of Sound and Vibration* **206**(4), 453–471.
- Balas, Gary J., John C. Doyle, Keith Glover, Andy Packard y Roy Smith (1995).  *$\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox*. The Mathworks, Inc.
- Beranek, L. L. (1954). *Acoustics*. McGraw Hill. New York.
- Colloms, M. (1982). *High Performance Loudspeakers*. John Wiley and Sons. Chichester, England.
- Dehghani, A., A. Lanzon y B.D.O. Anderson (2006). A two-degree-of-freedom  $\mathcal{H}_\infty$  control design method for robust model matching. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*.
- Desoer, C.A, R. Liu, J. Murray y R. Saeks (1980). Feedback systems design: The fractional representation approach to analysis and synthesis.. *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(11), 1865–71.
- Edmunds, J. M. (1994). Output response tuning of one- and two-degree-of-freedom controllers using an  $h_\infty$  approach. *International Journal of Control*.
- Freudenberg, J.S., C.V. Hollot, R.H. Middleton y V. Toochinda (2003). Fundamental Design Limitations of the General Control Configuration. *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(8), 1355–70.
- Freudenberg, J.S. y D.P. Looze (1985). Right half plane poles and zeros and design tradeoffs in feedback systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **30**(6), 555–565.
- Gan, Woon S., Sohini Mitri y Sen M. Kuo (2005). Adaptive feedback active noise control headset: Implementation, evaluation and its extensions. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*.
- Giusto, A. y F. Paganini (1999). Robust synthesis of feedforward compensators. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Goh, K. C., J. H. Ly, L. Turand y M. G. Safonov (1994).  $\mu/k_m$ -synthesis via bilinear matrix inequalities. In: *1994 Conference on Decision and Control*. pp. 2032–37.
- Grimble, M. J. (1988). Two-degrees of freedom feedback and feedforward optimal control of multivariable stochastic systems. *Automatica*.
- Hong, J. y Dennis Bernstein (1998). Bode integral constraints, colocation, and spillover in active noise and vibration control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*.
- Hoyle, D., R. Hyde y Limebeer D. (1991). On  $\mathcal{H}_\infty$  approach to two degree of freedom design. In: *1991 Conference on Decision and Control*. pp. 1581–1585.
- Ivey, Elizabeth S. (1987). Measuring helmet sound attenuation characteristics using an acoustic minikin. *Journal of Acoustical Society of America* **49**, 373–382.
- Jordan, Chris (2004). Noise induced hearing loss in occupational motorcyclists. *Journal of Environmental Health Research* **3**, 373–382.
- Kulkarni, Abhijit y H. Steven Colburn (2000). Variability in the characterization of the headphones transfer function. *Journal of Acoustical Society of America*.
- Kuo, Sen M., Sohini Mitra y Woon-Seng Gan (2006). Active noise control system for headphones applications. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*.
- Kuo, S.M. y D.R. Morgan (1995). *Active Noise Control Systems: Algorithms and DSP Implementations*. John Wiley and Sons. New York.
- Kuroiwa, Y. y H. Kimura (2003). *Directions in Mathematical System Theory and Optimization*. Chap. On the Separation of Two Degree of Freedom Controller and its application to  $\mathcal{H}_\infty$  Control for Systems with time delay, pp. 183–192. Springer-Verlag.
- Lazzeroni, John J. y Melinda K. Carevich (1997). Noise cancelling microphone for full coverage style helmets. *U.S Patent Office*.
- Limebeer, D.J.N., E.M. Kasenally y J.D. Perkins (1994). On the design of two degree of freedom controllers. *Automatica* **1**(29), 157–168.
- Lueg, P. (1934). *Process of silencing sound oscillations*. U.S. Patent 043,416.
- McFarlane, D.C. y K. Glover (1992). A loop shaping design procedure using  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis.. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Möser, M. (2004). *Engineering Acoustics, an Introduction to noise control*. Springer.
- Nelson, P.A. y S.J. Elliot (1992). *Active Control of Sound*. Academic Press.
- Olson, H.F. y E.G. May (1953). Electronic sound absorber. *Journal of Acoustical Society of America* **25**, 1130–1136.
- Pääkkönen, R. y P.Kuronen (1996). Noise attenuation of helmets and headsets used by finnish air force pilots. *Applied Acoustics* **49**, 373–382.
- Packard, Andy y John Doyle (1993). The complex structured singular value. *Automatica*.
- Pernebo, L. (1981). An algebraic theory for the design of controllers for linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **26**(1), 171–194.

- Rotea, M. A. y T. Iwasaki (1994). An alternative to the D-K iteration?. In: *1994 American Control Conference*. Chicago.
- Sánchez Peña, Ricardo S., Quevedo, Joseba y Puig, Vicenç, Eds.) (2007). *Identification and Control: The gap between Theory and Practice*. Chap. Identification and Control Structure Design in Active (acoustic) Noise Control, pp. 203–244. Springer-Verlag. London.
- Sánchez Peña, Ricardo S. y Mario Sznaier (1998). *Robust Systems Theory and Applications*. John Wiley & Sons, Inc.
- Scorletti, G. y V. Fromion (2006). Further results on the design of robust  $\mathcal{H}_\infty$  feedforward controllers and filters. In: *2006 Conference on Decision and Control*.
- Seron, María Marta (2005). Límites de desempeño y compromisos en sistemas de control. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* **2**(1), 4–18.
- Skogestad, S. y I. Postlethwaite (2005). *Multivariable Feedback Control*. Wiley.
- Toochinda, V., C.V. Hollot y Y. Chait (2002). Disturbance attenuation in a SITO feedback control system. In: *American Control Conference*.
- UE-2003/10/EC (2003). *Directive 2003/10/EC, Noise at Work Regulations*. Official Journal of the European Community.
- Vidyasagar, M. (1985). *Control Systems Synthesis. A factorization Approach*. MIT Press. United States of America.
- Vilanova, R. y I. Serra (1997). Realisation of two-degrees-of-freedom compensators. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*.
- Walker, D.J. (1996). On the structure of a two-degree-of-freedom  $\mathcal{H}_\infty$  loop shaping controller.. *International Journal of Control*.
- White, Andrew D. (1999). *On Loudspeaker Implementation for Feedback Control, Open-air, Active Noise Reduction Headsets*. Master of Science in Mechanical Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia.
- Yaesh, I. y U. Shaked (1991). Two-degree-of-freedom multivariable feedback systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Youla, D.C, J.J. Bongiorno y H.A. Jabr (1976). Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control* **21**(3), 319–338.
- Zhou, K., John C. Doyle y Keith Glover (1996). *Feedback Control Theory*. Prentice-Hall.

## APÉNDICE: NOTACIÓN Y ESPECIFICACIONES DEL ALTAZOZ

Parámetro	Símbolo	Unidades
Voltaje de entrada	$V_{in}$	V
Corriente del altavoz	$I$	A
Fuerzas mecánicas	$f, f_1, f_2$	N
Velocidad del altavoz	$u$	m/s
Velocidad del volumen	$U$	$m^3/s$
Presión acústica	$p$	Pa
Área del diafragma	$A$	$m^2$
Factor de fuerza cono emf	$B\ell$	Wb/m
Resistencia eléctrica	$e$	V
Induc. bobina de voz	$R_0$	$\Omega$
Masa del altavoz	$L_0$	H
Amort. mecánica	$M$	g
Rigidez mecánica	$R_{ms}$	N-s/m
Admitancia mecánica	$K$	$N/m$
Admitancia acústica	$Y_m$	$m/N-s$
Impedancia mecánica	$Y_a$	$m/N-s$
Impedancia acústica	$Z_m$	N-s/m
Impedancia eléctrica	$Z_a$	N-s/m
Impedancia	$Z_e$	$\Omega$

- Relaciones de transformación:

$$\begin{aligned} B\ell &= f/i \\ e &= B\ell \times u \\ A &= U/u \\ f_2 &= pA \end{aligned}$$

Especificaciones del altavoz utilizado:

$$\begin{aligned} \text{Masa del altavoz } m &= 0,4 * 10^{-3} [\text{kg}] \\ \text{Radio del altavoz } r &= (0,75 * 2,54/100) [\text{m}] \\ \text{Rigidez } s &= 300 [\text{N/m}] \\ \text{Resistencia Mecánica } R_m &= 0,001 [\text{Ns/m}] \\ \text{Inductancia de la Bobina de Voz } L_0 &= 0,001 [\text{H}] \\ \text{Resistencia de la Bobina de Voz } R_0 &= 31,3 [\Omega] \\ \text{Longitud del Cable de la Bobina } l &= 2,5 [\text{m}] \\ \text{Campo Magnético } B &= 1 [\text{T}] \\ \text{Frecuencia de curvatura } f_3 &= 2\pi 2800 [\text{Hz}] \\ \text{Area del Diafragma } A &= \pi r^2 [\text{m}^2] \\ \text{Multipl. de la impedancia acústica } c &= 415,03 \end{aligned}$$