

## LQR ROBUSTO MEDIANTE INCERTIDUMBRE ACOTADA EN LOS DATOS<sup>1</sup>

C. Ramos, M. Martínez, J. Sanchis, J.V. Salcedo

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática  
Universidad Politécnica de Valencia  
Camino de Vera s/n, 46022 - Valencia, España  
e-mail: cramos@isa.upv.es

**Resumen:** En este trabajo se presenta el sintonizado del Regulador Lineal Cuadrático (LQR) mediante la técnica de incertidumbre acotada en los datos o *Bounded Data Uncertainties* (BDU) con el fin de mejorar la robustez del sistema, planteándose como un Min-Max donde se busca la mejor solución en el peor escenario posible. Así se ofrece un nuevo método guiado de ajuste del LQR, considerando los límites de la incertidumbre. La aplicación a sistemas multidimensionales no es trivial, pues presenta la forma de un *Two-Point Boundary Value Problem* (TPBVP), el cual se resuelve iterativamente. *Copyright © 2007 CEA-IFAC.*

**Palabras Clave:** Técnicas Minimax, Regularización, Método de Control LQR, Robustez, Incertidumbre, Ecuaciones Matriciales de Riccati, Problema de Valor Límite, Sistemas Multidimensionales.

### 1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se aborda el sintonizado del LQR mediante la técnica BDU con el fin de dotar de mayor robustez al sistema de control, obteniendo como resultado una ley de control donde se sintoniza el parámetro de penalización del esfuerzo de control de modo guiado y se modifica la ecuación recursiva de Riccati.

La elección de la técnica BDU se justifica por su capacidad de regularizar el problema de mínimos cuadrados (que subyace en la teoría del LQR) de manera guiada a partir de información sobre las cotas de la incertidumbre, frente a otras técnicas clásicas de regularización.

A continuación, se introducen las diferentes técnicas de regularización, conectando posteriormente con la técnica BDU y finalmente su aplicación al LQR.

Una manera típica de plantear un problema de estimación o identificación consiste en considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales, donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es conocida (con  $m \geq n$ ), siendo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  un vector desconocido y salidas medibles  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (1)$$

A partir de la salidas medibles y conociendo  $\mathbf{A}$ , se desea encontrar  $\mathbf{x}$ , pero en los sistemas reales raramente se presenta la igualdad (1) porque nunca se conoce exactamente el valor de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{b}$ .

Así, considerando que el vector  $\mathbf{b}$  contiene medidas ruidosas (o con incertidumbre), no resulta

<sup>1</sup> Financiado parcialmente por los proyectos de investigación del MEC del Gobierno Español FEDER DPI2005-07835 y FEDER DPI2004-8383-C03-02.

cierta la ecuación (1), y se plantea el problema de la forma

$$\mathbf{Ax} \approx \mathbf{b}. \quad (2)$$

Una técnica para manejar el problema anterior consiste en el uso de *Mínimos Cuadrados*, el cual aparece en numerosas teorías de identificación y control (Aguado y Martínez, 2003), como son el filtro de Kalman, control LQR, LQG, GPC, etc.

Su popularidad es debida a que es fácil de plantear y de resolver. Considerando el **contexto de la identificación**, dado el vector  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  que contiene medidas ruidosas o con incertidumbre y considerando el sistema de ecuaciones lineales, sería más adecuado expresarlo como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{b}$  representa la parte conocida y  $\delta\mathbf{b}$  la incertidumbre. Se estima  $\hat{\mathbf{x}}$  resolviendo el sistema de ecuaciones (1), en la mayoría de los casos incompatible

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 \quad (4)$$

denotando  $\|\cdot\|_2$  la norma *euclídea* del vector.

Generalmente  $\delta\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , y por tanto el vector  $\mathbf{b}$  no pertenece al espacio generado por las columnas de  $\mathbf{A}$  consideradas como vectores ( $\mathbf{b} \notin \mathcal{R}(\mathbf{A})$ ), y en ese caso, el problema de mínimos cuadrados busca el vector  $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$  que esté más cerca a  $\mathbf{b}$  en el sentido de la norma euclídea (ver figura 1). Así el método considera que todos los errores e incertidumbre están presentes sólo en el vector  $\mathbf{b}$ , y por tanto  $\mathbf{A}$  se conoce exactamente.

La solución  $\hat{\mathbf{x}}$ , siendo  $\mathbf{A}^+$  la matriz pseudoinversa de  $\mathbf{A}$ , resulta

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}. \quad (5)$$

En la figura 1 se muestra geométricamente la solución  $\hat{\mathbf{x}}$  como la *proyección* de  $\mathbf{b}$  en el espacio generado por las columnas de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ . El vector residuo  $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$  es necesariamente *ortogonal* a la base constituida por las columnas de la matriz de datos  $\mathbf{A}$ , es decir

$$\mathbf{A}^T[\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}] = \mathbf{0}. \quad (6)$$

El principal inconveniente del método de mínimos cuadrados radica en que es *sensible a errores en los datos*. Es decir, un diseño de mínimos cuadrados basado en los datos  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  puede resultar inadecuado cuando los datos '*reales*' no son  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  sino una versión perturbada de éstos,  $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$ , siendo  $\delta\mathbf{A}$  y  $\delta\mathbf{b}$  desconocidos. El problema se

debe a que las perturbaciones o incertidumbre en los datos aparece con mucha frecuencia en los problemas de control y pueden deberse a causas como que los valores nominales de los parámetros del modelo son aproximaciones de los valores reales, y pueden variar debido a las no linealidades del proceso o cambios en el punto de operación, además siempre existen errores en la medición de las variables, y generalmente no se conoce la estructura del proceso en alta frecuencia, y por simplicidad, se utilizan modelos de bajo orden para representar dinámicas complejas, lo que ocasiona errores de modelado, normalmente conocidos como *dinámica no modelada* (Skogestad y Postlethwaite, 1996).

Una variante de este método es el *Mínimos Cuadrados Regularizado*, el cual puede obtener una solución **más robusta** (es decir, menos sensible a errores en los datos) ante el problema descrito anteriormente, y que además pretende combatir el problema de *mal condicionamiento* que aparece en el mínimos cuadrados puro (Golub y van Loan, 1996; Lawson y Hanson, 1995). El mal condicionamiento produce que pequeños cambios en los datos de partida originen grandes cambios en el resultado obtenido (y por tanto una mayor sensibilidad a dichos errores). Considerando el sistema de *ecuaciones normales* (6) que describe la solución mínimos cuadrados

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (7)$$

el problema surge con el término  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , cuyo número de condición puede ser mucho peor que el de  $\mathbf{A}$ , lo cual origina problemas cuando se invierte para calcular la solución. La **regularización** puede ser una solución, que consiste en elegir de antemano un parámetro **positivo**  $\lambda$  (el parámetro de regularización) para que la inversión sea más fácil y más precisa, y elegir  $\hat{\mathbf{x}}$  resolviendo el siguiente índice (donde se usa la norma al cuadrado la cual facilita la derivada del índice)

$$\min_{\mathbf{x}} \left[ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_2^2 \right] \quad (8)$$

siendo la solución

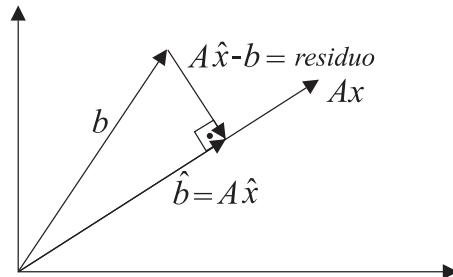


Figura 1. Interpretación geométrica de la solución mínimos cuadrados.

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (9)$$

El inconveniente reside en que se elige  $\lambda$  de un modo intuitivo, y sin ningún procedimiento o técnica que ayude en su diseño. De modo que si es muy grande, se produce una **sobreregularización**, la cual puede originar pérdida de información importante, y si  $\lambda$  resulta pequeño se produce una **subregularización** que puede provocar que la solución no sea robusta, es decir, que sea sensible a errores en los datos.

Existen diferentes técnicas de regresión que hacen uso de la *regularización* (Schubert, 2003), las cuales se podrían agrupar en dos familias, aquéllas que llevan a cabo una **regularización positiva** o llamada simplemente *regularización*, es decir, con  $\lambda > 0$ , tales como las técnicas *mínimos cuadrados contraído* (Stein, 1981), *regresión Ridge* (Hoerl *et al.*, 1986), *regresión Tikhonov* (Ghaoui y Lebret, 1997), *Min-Max* (Chandrasekaran *et al.*, 1998) y el ya citado *mínimos cuadrados regularizado*, y aquéllas que usan la **regularización negativa** o **desregularización**, es decir, con  $\lambda < 0$ , tales como las técnicas *mínimos cuadrados total* (Golub y van Loan, 1980; Golub *et al.*, 1999; Van Huffel y Vandewalle, 1991) y *Min-Min* (Chandrasekaran *et al.*, 1999).

Tradicionalmente, el uso del *mínimos cuadrados* (que no usa la regularización) y *mínimos cuadrados total* está muy extendido en el ámbito de la estimación, pero dichos métodos presentan el problema de ser poco robustos, es decir muy sensibles a los errores en los datos o funcionan mal cuando la matriz  $\mathbf{A}$  está mal condicionada. La *desregularización* del *Min-Min* también presenta el mismo problema. Así pues, en general los métodos que *desregularizan* intentan obtener una solución **más precisa** (con menor residuo), pero **menos robusta**, obteniendo valores de  $\|\hat{\mathbf{x}}\|_2$  mayores. Por otra parte, los métodos que *regularizan* obtienen soluciones **más robustas** pero **menos precisas**, es decir, incorporan un **sesgo** o **residuo adicional**, reduciendo así el valor de  $\|\hat{\mathbf{x}}\|_2$ .

Son destacables otros métodos basados en el criterio del *error hacia atrás* (*backward error*) que pretenden mejorar ambos aspectos, robustez y precisión, pero a costa de manejar índices *no convexos* más complejos (Chandrasekaran *et al.*, 2004).

Es difícil establecer qué técnicas son mejores, pues también depende de la aplicación en particular. Por ejemplo, en la *regresión Tikhonov* hay trabajos para seleccionar  $\lambda$  en (Hansen, 1992; Neubauer y Scherzer, 1998; O'Leary, 2001; Kilmer y O'Leary, 2001), y ese hecho es a la vez el punto fuerte y débil de este método. En el ámbito de la estimación e identificación, tradicionalmente se han usado técnicas de *desregularización* con la

intención de conseguir soluciones precisas, aunque también se han usado de *regularización*. No obstante, desde el punto de vista de control, y sobre todo de **control robusto**, interesarían técnicas de *regularización* que proporcionen soluciones más suaves (menores  $\|\hat{\mathbf{x}}\|_2$ ) y robustas.

El deseo de un método más riguroso matemáticamente para tratar los problemas de robustez, lleva al desarrollo del problema **Min-Max** o **BDU Bounded Data Uncertainties** (Chandrasekaran *et al.*, 1998), también llamado *Robust Least Squares* (Ghaoui y Lebret, 1997). Dicho método se propuso y se resolvió, por una parte, mediante técnicas de la *ecuación secular* en (Chandrasekaran *et al.*, 1998), y por otra parte, mediante técnicas de *Linear Matrix Inequalities* (LMI) en (Ghaoui y Lebret, 1996). Mediante LMIs el tiempo de cálculo es menor, aunque esta ventaja sólo se aprecia cuando aparecen muchas restricciones a tener en cuenta en el problema, ya que en los casos sencillos, en general, la *ecuación secular* es más simple. El método ha sido planteado (Sayed *et al.*, 1998; Subramanian y Sayed, 2003; Watson, 2001) para resolver problemas de identificación, estimación, filtrado, control, ajuste de datos, etc.

La técnica BDU permite al diseñador incorporar explícitamente información a priori sobre el tamaño de las cotas de la incertidumbre en el plantearimiento del problema, y por tanto el parámetro de regularización  $\lambda$  ya no se elige intuitiva o arbitrariamente, como en otras técnicas, sino teniendo en cuenta dicha información. Así pues, se lleva a cabo una **regularización semiautomática** sin intervención del usuario, llamada así porque todavía se debe proporcionar la cota de la incertidumbre que se considera presente en los datos, y no se garantiza que se conozca de manera precisa, siendo este aspecto crítico porque el parámetro de regularización depende del valor de dicha cota.

La técnica BDU ha sido usada principalmente en el ámbito de la estimación de parámetros, y también existen contribuciones en áreas afines como el filtrado y restauración de imágenes (Sayed *et al.*, 1998), pero escasamente desarrollada para control de procesos, destacando en este último caso la adaptación al controlador lineal cuadrático (LQR).

En el problema LQR se usa un parámetro de penalización del esfuerzo de control  $\mathbf{R} = r\mathbf{I}$ , siendo habitualmente una matriz diagonal y constante. En presencia de incertidumbre, se puede establecer una analogía entre el problema LQR y el problema BDU (donde el parámetro de penalización del esfuerzo de control  $r\mathbf{I}$  se sustituye por el parámetro de regularización  $\lambda\mathbf{I}$ ), y por tanto se puede usar BDU para dotar al sistema de mayor robustez.

Como consecuencia de la aplicación del BDU al LQR (llamado LQR-BDU), se modifica la ecuación recursiva de Riccati (Ramos *et al.*, 2004; Ramos *et al.*, 2005).

La principal contribución de este trabajo consiste en la extensión del LQR-BDU a sistemas multidimensionales, lo cual conlleva el desarrollo teórico de la nueva ley de control y de la obtención de la ecuación recursiva de Riccati modificada mediante BDU, que en este caso serán matriciales.

Por otra parte, la aplicación de dicha ley de control no resulta trivial, debido a que el problema presenta la forma de un TPBVP, ya que la ley de control depende del vector de estado del peor caso, y por tanto se usa un procedimiento iterativo para su resolución. Finalmente, se verifican los resultados esperados mediante la aplicación de dicha estrategia de control a dos sistemas multidimensionales.

Con ello, el resto del trabajo se organiza de la siguiente manera, en la sección 2 se presentan los fundamentos de la técnica BDU, la sección 3 muestra el controlador LQR-BDU para sistemas multidimensionales, mientras que en la sección 4 se plantea el problema TPBVP. Posteriormente, en la sección 5 se presentan los resultados de la aplicación del LQR-BDU a un sistema de dos dimensiones y al control del movimiento lateral de un avión, y en la sección 6 se presentan las conclusiones más relevantes del trabajo y las líneas futuras.

## 2. INCERTIDUMBRE ACOTADA EN LOS DATOS

El problema de incertidumbre acotada en los datos, o *Bounded Data Uncertainties*, (BDU) (Chandrasekaran *et al.*, 1997; Chandrasekaran *et al.*, 1998; Sayed *et al.*, 1998; Sayed y Nascimento, 1999; Nascimento y Sayed, 1999) también llamado genéricamente *Min-Max* o *Robust Least Squares* (RLS) (Ghaoui y Lebret, 1997) se propuso y se resolvió, mediante técnicas de la **ecuación secular** en (Chandrasekaran *et al.*, 1998). Dicho problema trata de encontrar una solución  $\hat{\mathbf{x}}$  con las *mejores* prestaciones en el *peor* escenario posible dentro de una región acotada.

Existen diferentes planteamientos matemáticos del problema BDU, pero uno que resulta muy útil en el contexto de la identificación y control es el siguiente

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\begin{subarray}{l} \|\delta\mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta\mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b \end{subarray}} \left[ \|[\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}]\mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}] \|_2^2 + \rho \|\mathbf{x}\|_2^2 \right] \quad (10)$$

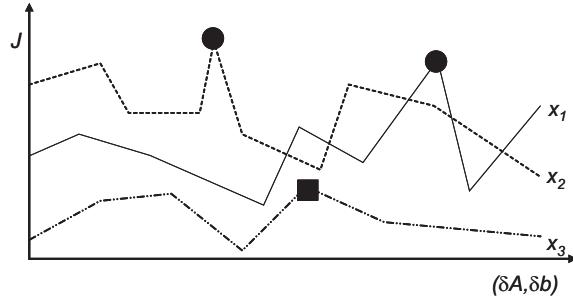


Figura 2. Tres vectores solución, su máximo residuo (*círculos negros*) y la solución cuyo máximo residuo es el menor posible (*cuadro negro*).

donde  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  sería el *modelo nominal* y  $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$  sería el *modelo real perturbado*, el cual no puede ser conocido, pues no se conoce ni  $\delta\mathbf{A}$  ni  $\delta\mathbf{b}$ , aunque sí una cota superior de éstas  $\eta_A$  y  $\eta_b$

$$\|\delta\mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A, \quad (11)$$

$$\|\delta\mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b, \quad (12)$$

y  $\rho$  es el parámetro de penalización de la variable a minimizar  $\mathbf{x}$ . Definiendo el residuo  $J$ , se puede reescribir la ecuación (10) de la siguiente forma

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\begin{subarray}{l} \|\delta\mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta\mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b \end{subarray}} J(\mathbf{x}, \delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{b}), \quad (13)$$

la cual puede ser vista según la *teoría de juegos* como un problema con restricciones donde participan dos jugadores. Por un lado el diseñador, que trata de elegir un valor de  $\mathbf{x}$  que minimice el residuo, y por otro lado los oponentes  $\delta\mathbf{A}$  y  $\delta\mathbf{b}$  que intentan maximizar el residuo. La solución a este problema consiste en buscar el vector  $\hat{\mathbf{x}}$  cuyo máximo residuo  $J$ , siendo  $\|\delta\mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A$  y  $\|\delta\mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b$ , es el menor posible.

Por ejemplo, si se seleccionan los vectores solución  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  y  $\mathbf{x}_3$  y se dibujan sus residuos  $J$  en función de  $\delta\mathbf{A}$  y  $\delta\mathbf{b}$ , se puede observar en la figura 2 cuál es en cada caso el máximo residuo. La solución al problema consiste en encontrar qué  $\mathbf{x}$  produce el mínimo residuo para el peor caso, siendo en el ejemplo de la figura la solución  $\mathbf{x}_3$ .

Para obtener una solución  $\hat{\mathbf{x}}$  distinta de cero, se debe cumplir la condición (Chandrasekaran *et al.*, 1998)

$$\eta_A < \frac{\|\mathbf{A}^T \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}. \quad (14)$$

También en (Chandrasekaran *et al.*, 1998) se demuestra que el problema Min-Max con restricciones establecido en la ecuación (10), es equivalente al siguiente problema de minimización sin restricciones

$$\min_{\mathbf{x}} \left[ [\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \| \mathbf{x} \|_2 + \eta_b]^2 + \rho \| \mathbf{x} \|_2^2 \right]. \quad (15)$$

Se puede comprobar que en ausencia de incertidumbre,  $\delta\mathbf{A} = \mathbf{0}$  y  $\delta\mathbf{b} = \mathbf{0}$  en (10), se obtiene la solución al original problema de mínimos cuadrados regularizado (8)

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \rho \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (16)$$

siendo  $\rho$  el parámetro de regularización *empírico* en ausencia de incertidumbre. Sin embargo, cuando la incertidumbre está presente, se obtiene un nuevo parámetro de regularización  $\lambda$ , que tiene en cuenta más información

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\eta_A \| \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \|_2}{\| \hat{\mathbf{x}} \|_2} \\ &+ \frac{\rho \| \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \|_2}{\| \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \|_2 + \eta_A \| \hat{\mathbf{x}} \|_2 + \eta_b}. \end{aligned} \quad (18)$$

La solución se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones no lineales formado por (17) y (18), siendo (18) la ecuación secular no lineal, la cual depende de  $\lambda$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\rho$ ,  $\eta_A$  y  $\eta_b$ . Definiendo  $F(\lambda)$  como la ecuación secular

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{\eta_A \| \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \|_2}{\| \hat{\mathbf{x}} \|_2} \\ &+ \frac{\rho \| \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \|_2}{\| \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \|_2 + \eta_A \| \hat{\mathbf{x}} \|_2 + \eta_b} - \lambda \end{aligned} \quad (19)$$

existe una única solución  $\hat{\lambda} > 0$  tal que  $F(\hat{\lambda}) = 0$ , la cual se puede obtener, por ejemplo, empleando un método iterativo de localización de raíces tipo bisección para resolver la ecuación no lineal.

### 3. CONTROL ROBUSTO MEDIANTE INCERTIDUMBRE ACOTADA EN LOS DATOS

En el problema LQR (*Linear Quadratic Regulator*) el objetivo principal consiste en regular el estado de un modelo lineal en espacio de estados para que llegue a cero, mientras se penaliza el coste debido al esfuerzo de control, de modo que se busca una secuencia de control  $\{\hat{\mathbf{u}}_i\}$  que resuelva (Ollero, 1991)

$$\min_{\{\mathbf{u}_i\}} \left[ \mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{N+1} + \sum_{i=0}^N [\mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + \mathbf{u}_i^T \mathbf{R} \mathbf{u}_i] \right] \quad (20)$$

siendo  $\mathbf{R} > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$  (matrices definidas positivas) y  $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$  (matriz semidefinida positiva) sobre un intervalo de tiempo  $0 \leq i \leq N$ .

Para el planteamiento del problema se considera el siguiente modelo en espacio de estados multidimensional y con más de una entrada

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{F} \mathbf{x}_i + \mathbf{G} \mathbf{u}_i, \quad (21)$$

donde  $\mathbf{x}_0$  es el estado inicial y  $\{\mathbf{u}_i\}$  indica la secuencia de control de entrada. El problema (20) se puede resolver recursivamente dividiendo la función de coste en dos términos (**programación dinámica**),

$$\min_{\{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N-1}\}} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} [\mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + \mathbf{u}_i^T \mathbf{R} \mathbf{u}_i] + \min_{\mathbf{u}_N} \left[ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{N+1} \\ + \mathbf{x}_N^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_N \\ + \mathbf{u}_N^T \mathbf{R} \mathbf{u}_N \end{array} \right] \right] \quad (22)$$

donde sólo el segundo término, mediante la ecuación en espacio de estados (21) para  $\mathbf{x}_{N+1}$ , depende de  $\mathbf{u}_N$ . Minimizando respecto  $\mathbf{u}_N$ , se obtiene la ley de control por realimentación del estado para el instante  $N$ , y generalizando se obtiene para  $0 \leq i \leq N$ , donde el coste  $\mathbf{P}_i$  se propaga mediante la recursión de Riccati con la condición límite  $\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}$

$$\hat{\mathbf{u}}_i = -\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (23)$$

$$\mathbf{K}_i = [\mathbf{R} + \mathbf{G}^T \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{F}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \mathbf{Q} + \mathbf{K}_i^T \mathbf{R} \mathbf{K}_i \\ &+ [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_i]^T \mathbf{P}_{i+1} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_i], \end{aligned} \quad (25)$$

$$\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}. \quad (26)$$

Para sintonizar el LQR mediante BDU, se debe transformar el problema LQR en un problema BDU, considerando en este caso el siguiente modelo en espacio de estados multidimensional con incertidumbre paramétrica  $\delta\mathbf{F}$  y  $\delta\mathbf{G}$

$$\mathbf{x}_{i+1} = [\mathbf{F} + \delta\mathbf{F}] \mathbf{x}_i + [\mathbf{G} + \delta\mathbf{G}] \mathbf{u}_i, \quad (27)$$

donde  $\mathbf{x}_0$  indica el valor del estado inicial, y  $\{\mathbf{u}_i\}$  indica la secuencia de control. Conociendo un límite de la incertidumbre ( $\|\delta\mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F$ ,  $\|\delta\mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G$ ), se plantea el problema LQR como

$$\min_{\{\mathbf{u}_i\}} \max_{\substack{\|\delta\mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F \\ \|\delta\mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G}} \left[ \sum_{i=0}^N [\mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + \mathbf{u}_i^T \mathbf{R} \mathbf{u}_i] \right] \quad (28)$$

donde  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{P}$  son unas matrices definidas positivas y  $\mathbf{Q}$  una matriz semidefinida positiva.

El problema se puede resolver recursivamente dividiendo la función de coste en dos términos

$$\begin{aligned} & \min_{\{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N-1}\}} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F \\ \|\delta \mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G}} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i \\ + \mathbf{u}_i^T \mathbf{R} \mathbf{u}_i \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. \min_{\mathbf{u}_N} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F \\ \|\delta \mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{N+1} \\ + \mathbf{x}_N^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_N + \mathbf{u}_N^T \mathbf{R} \mathbf{u}_N \end{bmatrix} \right] \quad (29) \end{aligned}$$

donde sólo el segundo término, mediante la ecuación en espacio de estados (27) para  $\mathbf{x}_{N+1}$ , depende de  $\mathbf{u}_N$ . Si se sustituye  $\mathbf{x}_{N+1}$  en el segundo término y se asume que  $\mathbf{Q} = q\mathbf{I}$  y  $\mathbf{R} = r\mathbf{I}$  son matrices constantes diagonales, se obtiene

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}_N} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F \\ \|\delta \mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{N+1} \\ + \mathbf{x}_N^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_N + \mathbf{u}_N^T \mathbf{R} \mathbf{u}_N \end{bmatrix} = \\ & = \min_{\mathbf{u}_N} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F \\ \|\delta \mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G}} \left[ \begin{array}{l} \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{G} + \delta \mathbf{G}] \mathbf{u}_N \right\|_2^2 \\ + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} + \delta \mathbf{F}] \mathbf{x}_N \right\|_2^2 \\ + r \left\| \mathbf{u}_N \right\|_2^2 + q \left\| \mathbf{x}_N \right\|_2^2 \end{array} \right]. \quad (30) \end{aligned}$$

Tras eliminar el término  $q \left\| \mathbf{x}_N \right\|_2^2$  (porque no depende de  $\mathbf{u}_N$  y por tanto no afecta al resultado de la minimización), y mediante unos cambios de variables se plantea dicho término como un problema BDU del tipo (10),

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta \mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} \left[ \begin{array}{l} \left\| [\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}] \mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}] \right\|_2^2 \\ + \rho \left\| \mathbf{x} \right\|_2^2 \end{array} \right] \quad (31)$$

donde se ha sustituido

$$\begin{aligned} \mathbf{A} & \rightarrow \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \mathbf{G}, \\ \delta \mathbf{A} & \rightarrow \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \delta \mathbf{G}, \\ \eta_A & \rightarrow \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G, \\ \mathbf{b} & \rightarrow -\mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F} \mathbf{x}_N, \\ \delta \mathbf{b} & \rightarrow -\mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \delta \mathbf{F} \mathbf{x}_N, \\ \eta_b & \rightarrow \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \mathbf{x}_N \right\|_2, \\ \mathbf{x} & \rightarrow \mathbf{u}_N, \\ \rho & \rightarrow r. \end{aligned} \quad (32)$$

Minimizando (31) para la variable  $\mathbf{x}$ , teniendo en cuenta la solución (17) y (18) del problema BDU (Sayed *et al.*, 1998), y deshaciendo los cambios de variables y sustituyendo  $\lambda \leftarrow \lambda_N$ , se obtiene la ley de control  $\hat{\mathbf{u}}_N$  para el instante  $N$

$$\hat{\mathbf{u}}_N = -\mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N, \quad (33)$$

$$\mathbf{K}_N = [\lambda_N \mathbf{I} + \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{F}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \lambda_N & = \frac{\left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2}{\left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2} \\ & + \frac{r \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2}{\left[ \begin{array}{l} \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \\ + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \\ + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \end{array} \right]}. \quad (35) \end{aligned}$$

Por otra parte, sustituyendo la solución  $\hat{\mathbf{u}}_N$  en el índice de coste (30) y teniendo en cuenta (15) se obtiene el coste  $\mathbf{P}_N$  que penaliza al estado  $\hat{\mathbf{x}}_N$

$$\hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{P}_N \hat{\mathbf{x}}_N = \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}_N + \hat{\mathbf{u}}_N^T \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}_N \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{P}_N \hat{\mathbf{x}}_N & = \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}_N + \hat{\mathbf{u}}_N^T \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}_N \\ & + \left[ \begin{array}{l} \left\| \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_N - \mathbf{b} \right\|_2^2 + \eta_A \left\| \hat{\mathbf{u}}_N \right\|_2^2 + \eta_b \end{array} \right]^2 \end{aligned} \quad (37)$$

es decir

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{P}_N \hat{\mathbf{x}}_N & = \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}_N + \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{K}_N^T \mathbf{R} \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \\ & + \left[ \begin{array}{l} \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2^2 \\ + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2^2 \\ + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2^2 \end{array} \right]^2. \quad (38) \end{aligned}$$

De (38) se obtiene la ecuación recursiva de Riccati modificada mediante BDU

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_N & = \mathbf{Q} + \mathbf{K}_N^T \mathbf{R} \mathbf{K}_N \\ & + [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N]^T \mathbf{P} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \\ & + 2 [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N]^T \mathbf{P} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \\ & \cdot \frac{\left[ \begin{array}{l} \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \\ + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \end{array} \right]}{\left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2} \\ & + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 \left[ \begin{array}{l} \eta_G^2 \mathbf{K}_N^T \mathbf{K}_N + \\ \left[ \eta_F^2 + 2\eta_F\eta_G \frac{\left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2}{\left\| \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2} \right] \mathbf{I} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

tal y como se demuestra en el Anexo. Del mismo modo se obtiene la ley de control para el resto de instantes de tiempo  $0 \leq i \leq N$

$$\hat{\mathbf{u}}_i = -\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (40)$$

$$\mathbf{K}_i = [\lambda_i \mathbf{I} + \mathbf{G}^T \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{F}, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{\left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{GK}_i] \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2}{\|\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i\|_2} \\ &+ \frac{r \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{GK}_i] \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2}{\left[ \begin{array}{l} \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{GK}_i] \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2 \\ + \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \|\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i\|_2 \\ + \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \|\hat{\mathbf{x}}_i\|_2 \end{array} \right]}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \mathbf{Q} + \mathbf{K}_i^T \mathbf{R} \mathbf{K}_i \\ &+ [\mathbf{F} - \mathbf{GK}_i]^T \mathbf{P}_{i+1} [\mathbf{F} - \mathbf{GK}_i] \\ &+ 2 [\mathbf{F} - \mathbf{GK}_i]^T \mathbf{P}_{i+1} [\mathbf{F} - \mathbf{GK}_i] \\ &\cdot \left[ \begin{array}{l} \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \|\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i\|_2 \\ + \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \|\hat{\mathbf{x}}_i\|_2 \end{array} \right] \\ &\cdot \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{GK}_i] \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2 \\ &+ \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 \left[ \begin{array}{l} \eta_G^2 \mathbf{K}_i^T \mathbf{K}_i + \\ \eta_F^2 + 2\eta_F\eta_G \frac{\|\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}_i\|_2} \mathbf{I} \end{array} \right], \end{aligned} \quad (43)$$

$$\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}. \quad (44)$$

Es destacable que si  $\eta_F = \eta_G = 0$  la ley de control de (40) a (44) coincide con la ley de control del LQR, es decir de (23) a (26).

Por otra parte, se observa que el parámetro  $\mathbf{R}$  del LQR, en la ecuación (24), ajustado empíricamente, se sustituye por  $\lambda_i \mathbf{I}$  en la ecuación (41), y además se modifica la ecuación recursiva de Riccati, teniendo en cuenta los límites de la incertidumbre.

#### 4. PROBLEMA DE CONDICIONES DE CONTORNO EN DOS PUNTOS

Analizando el sistema de ecuaciones formado por (17) y (18) se deduce que si  $\mathbf{b}$  y  $\eta_b$  fueran conocidos, se podría resolver dicho sistema mediante la ecuación secular no lineal.

Pero en este caso, para  $i = N$  resulta que  $\mathbf{b}$  y  $\eta_b$  dependen de  $\mathbf{x}_N$  (que no es conocido)

$$\mathbf{b} = -\mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F} \mathbf{x}_N, \quad (45)$$

$$\eta_b = \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \|\mathbf{x}_N\|_2. \quad (46)$$

Lo mismo ocurre con la ley de control para el resto de instantes de tiempo  $0 \leq i \leq N$ , ya que

$$\mathbf{b} = -\mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F} \mathbf{x}_i, \quad (47)$$

$$\eta_b = \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \|\mathbf{x}_i\|_2. \quad (48)$$

Por tanto la ley de control presenta la forma de un problema de condiciones de contorno en dos puntos o TPBVP (*Two-Point Boundary Value Problem*), debido a que las expresiones de  $\mathbf{K}_i$  y  $\mathbf{P}_i$  dependen del vector de estado del peor caso  $\hat{\mathbf{x}}_i$ , es decir  $\mathbf{K}_i(\hat{\mathbf{x}}_i)$  y  $\mathbf{P}_i(\hat{\mathbf{x}}_i)$ , y por tanto se debe obtener la solución iterativamente, mediante el siguiente procedimiento (Nascimento y Sayed, 1999):

1. *Inicialización.* Se eligen unos valores iniciales para las variables  $\mathbf{P}_i$ ,  $i \in [0, N]$  (por ejemplo, mediante la ejecución del controlador LQR multidimensional sin usar BDU). También se eligen valores iniciales para las variables  $\lambda_i$  (cualquier valor positivo).
2. *Iteración hacia adelante.* A partir de  $\mathbf{x}_0$ ,  $\lambda_i$  y  $\mathbf{P}_{i+1}$ , se obtienen las diferentes  $\mathbf{u}_i$  (mediante la ley de control) y  $\mathbf{x}_i$  (mediante la ecuación del modelo).
3. *Iteración hacia atrás.* Dados los valores calculados anteriormente ( $\mathbf{u}_i$  y  $\mathbf{x}_i$ ) y  $\mathbf{P}$  se obtienen nuevas aproximaciones de  $\mathbf{P}_i$  y  $\lambda_i$ , mediante las ecuaciones de la ley de control.
4. *Recursión.* Se repiten los pasos 2 y 3 hasta que la solución converja.

Evidentemente, la solución obtenida debe cumplir la condición (14) y que  $\lambda_i > 0$ .

Por tanto, las ecuaciones de (40) a (44), expresadas en formato matricial, se presentan como un problema TPBVP, debido a que dependen del estado en el peor caso  $\hat{\mathbf{x}}_i$ .

Dicha dependencia no se puede eliminar, debido a que no se pueden cancelar las variables  $\hat{\mathbf{x}}_i$ , ya que aparecen dentro de normas, y ello imposibilita, por una parte, la obtención una ecuación explícita del parámetro  $\lambda_i$  (ya que  $\lambda_i$  depende de  $\mathbf{K}_i$  el cual depende a su vez de  $\lambda_i$ ), y por otra, que en este caso, las expresiones de  $\mathbf{K}_i$  y  $\mathbf{P}_i$  dependen del vector de estado del peor caso  $\hat{\mathbf{x}}_i$ .

En cambio, dicha dependencia desaparecía en los sistemas unidimensionales, ya que en ese caso  $\hat{\mathbf{x}}_i$  es un escalar y por tanto la relación (48) resultaría

$$\eta_b = p_{i+1}^{\frac{1}{2}} \eta_F |x_i| \quad (49)$$

pudiendo cancelar la dependencia de  $k_i$  y  $p_i$  respecto de  $x_i$ , obteniéndose la siguiente ley de control para sistemas unidimensionales (Sayed *et al.*, 1998), donde todas las variables son escalares

$$\hat{u}_i = -k_i \hat{x}_i, \quad (50)$$

$$k_i = \frac{fg p_{i+1}}{\lambda_i + g^2 p_{i+1}}, \quad (51)$$

$$\lambda_i = \frac{\frac{r}{1-\eta_g} - p_{i+1}g^2 \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right]}{1 + \frac{\eta_f}{|f|}}, \quad (52)$$

$$p_i = p_{i+1} f^2 \left[ \frac{\lambda_i + \eta_g p_{i+1} |g|}{\lambda_i + g^2 p_{i+1}} + \frac{\eta_f}{|f|} \right]^2 + \frac{rf^2 g^2 p_{i+1}^2}{[\lambda_i + g^2 p_{i+1}]^2} + q, \quad (53)$$

$$p_{N+1} = p. \quad (54)$$

## 5. EJEMPLOS

A continuación se presentan dos ejemplos que muestran las mejoras que introduce la técnica BDU en el sintonizado del LQR (mejora de la robustez y sintonizado guiado del parámetro de penalización del esfuerzo de control). Como primer ejemplo se ha elegido un sistema de 2 dimensiones, que puede resultar habitual a la hora de modelar ciertos sistemas físicos, y como segundo ejemplo, se ha elegido un *benchmark* para un sistema multidimensional que aparece en (Polyak y Tempo, 2001) que modela el movimiento lateral de un avión, para demostrar que el enfoque realizado es factible para procesos con sentido físico.

### 5.1 Sistema de 2 dimensiones

Este ejemplo muestra cómo el uso de la técnica BDU para el sintonizado del LQR puede mejorar las prestaciones del sistema. Si se considera el siguiente sistema de 2 dimensiones

$$\mathbf{x}_{i+1} = [\mathbf{F} + \delta\mathbf{F}]\mathbf{x}_i + [\mathbf{G} + \delta\mathbf{G}]\mathbf{u}_i \quad (55)$$

donde

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

estando  $\delta\mathbf{F}$  y  $\delta\mathbf{G}$  acotadas por  $\|\delta\mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F$  y  $\|\delta\mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G$ , se sintoniza el LQR-BDU considerando

$$\eta_F = 0.27, \quad \eta_G = 0, \quad (57)$$

y los parámetros del LQR

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \mathbf{I}, \quad (58)$$

siendo  $\mathbf{x}_0 = [10 \ 10]^T$  y  $N = 80$ . En la figura 3 se muestra la respuesta del sistema cuando se supone que la incertidumbre del sistema perturbado es

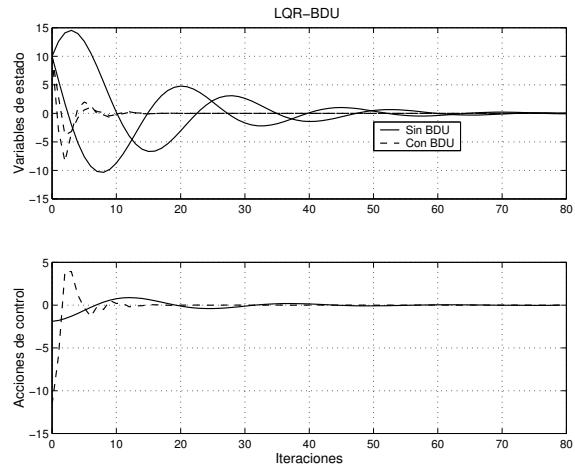


Figura 3. Respuesta del sistema (*variables de estado y acciones de control*) sin BDU (línea continua) y con BDU (línea discontinua).

$$\delta\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.15 \\ 0.05 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \delta\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (59)$$

donde se puede ver que el BDU mejora las prestaciones del sistema.

Si por otra parte, se considera una incertidumbre diferente

$$\eta_F = 0.1, \quad \eta_G = 0.02, \quad (60)$$

y suponiendo en este caso  $\delta\mathbf{G} \neq \mathbf{0}$

$$\delta\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \delta\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -0.02 \\ 0.001 \end{bmatrix}, \quad (61)$$

se muestra la respuesta del sistema en la figura 4, donde se observa que de nuevo el BDU mejora las prestaciones del sistema. En la figura 5 se muestran los 4 elementos de la matriz de peso  $\mathbf{P}_i$  que se obtiene en cada iteración, siendo  $P_{12_i} = P_{21_i}$

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} P_{11_i} & P_{12_i} \\ P_{21_i} & P_{22_i} \end{bmatrix} \quad (62)$$

donde se observa cómo sin BDU los elementos de la matriz convergen a unos valores constantes, mientras que el BDU adapta dichos valores en cada instante teniendo en cuenta la incertidumbre.

Lo mismo ocurre para el parámetro de regularización  $\lambda$ , como se muestra en la figura 6, donde se lleva a cabo una **regularización adaptativa** en lugar de constante.

### 5.2 Control del movimiento lateral de un avión

Este ejemplo presenta el diseño de un controlador para el movimiento lateral de un avión, cuyo modelo en espacio de estados es el siguiente

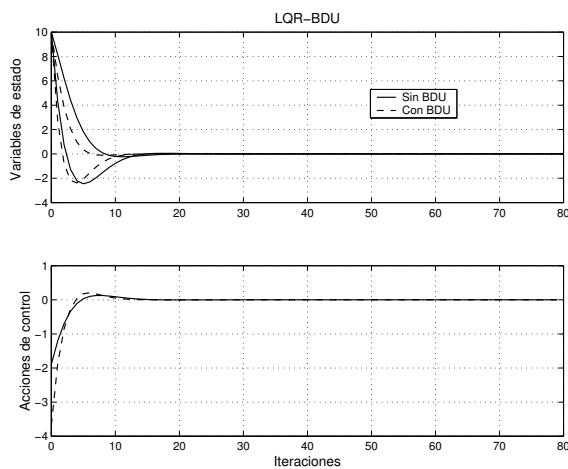


Figura 4. Respuesta del sistema (*variables de estado y acciones de control*) sin BDU (línea continua) y con BDU (línea discontinua).

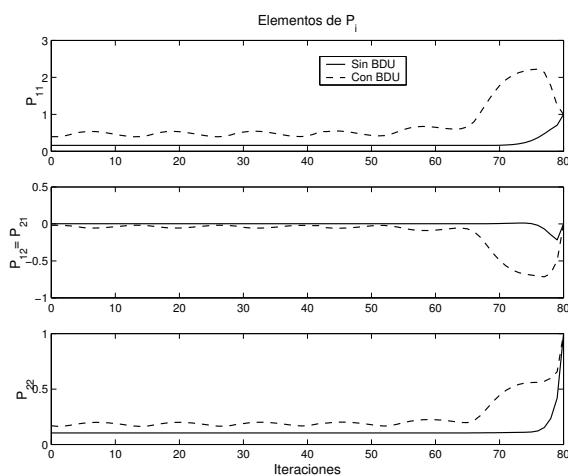


Figura 5. Elementos de  $\mathbf{P}_i$  en cada instante de tiempo, sin BDU (línea continua) y con BDU (línea discontinua).

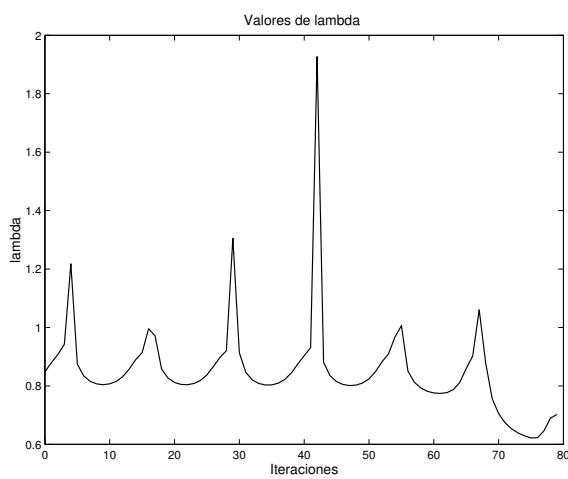


Figura 6. Parámetro de regularización  $\lambda$  en cada instante de tiempo.

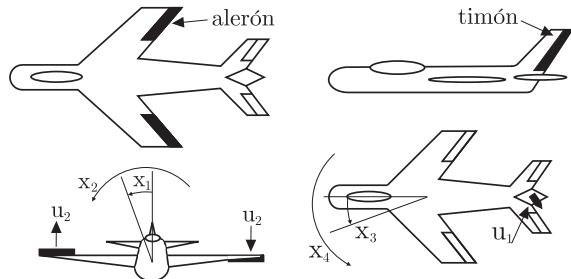


Figura 7. Estados y entradas del modelo del avión: ángulo de ladeo  $x_1$  ( $^{\circ}$ ), velocidad de ladeo  $x_2$  ( $^{\circ}/s$ ), ángulo de deslizamiento lateral  $x_3$  ( $^{\circ}$ ), velocidad de viraje  $x_4$  ( $^{\circ}/s$ ), desviación del timón  $u_1$  ( $^{\circ}$ ) y desviación del alerón  $u_2$  ( $^{\circ}$ ).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}_c \mathbf{u}(t) \quad (63)$$

donde

$$\mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & L_p & L_\beta & L_r \\ g/V & 0 & Y_\beta & -1 \\ N_\beta(g/V) & N_p & N_\beta + N_\beta Y_\beta & N_r - N_\beta \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\mathbf{G}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3.91 \\ 0.035 & 0 \\ -2.53 & 0.31 \end{bmatrix}. \quad (65)$$

El modelo consta de cuatro estados y dos entradas, que se muestran en la figura 7, siendo

- $x_1$ : ángulo de ladeo o *bank angle* (en grados ( $^{\circ}$ )),
- $x_2$ : velocidad de ladeo o *roll rate* ( $^{\circ}/s$ ),
- $x_3$ : ángulo de deslizamiento lateral o *sideslip angle* ( $^{\circ}$ ),
- $x_4$ : velocidad de viraje o *yaw rate* ( $^{\circ}/s$ ),
- $u_1$ : desviación del timón o *rudder deflection* ( $^{\circ}$ ),
- $u_2$ : desviación del alerón o *aileron deflection* ( $^{\circ}$ ).

Se consideran los siguientes valores nominales para los parámetros del avión que aparecen en las matrices de estado

$$\begin{aligned} L_p &= -2.93, & L_\beta &= -4.75, \\ L_r &= 0.78, & g/V &= 0.086, \\ Y_\beta &= -0.11, & N_\beta &= 0, \\ N_p &= -0.042, & N_\beta &= 2.59, \\ N_r &= -0.39. & & \end{aligned}$$

Para un periodo de muestreo  $T = 0.05 s$ . y un retenedor de orden cero ZOH, se obtiene el modelo en espacio de estados discreto utilizando una aproximación de primer orden de la exponencial de la matriz (Aström y Wittenmark, 1997)

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{F}_c T} \approx \mathbf{I} + \mathbf{F}_c T. \quad (66)$$

Con dicha aproximación el modelo discreto resulta

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_i + \mathbf{G}\mathbf{u}_i \quad (67)$$

donde

$$\mathbf{F} = T \begin{bmatrix} \frac{1}{T} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T} + L_p & L_\beta & L_r \\ g/V & 0 & \frac{1}{T} + Y_\beta & -1 \\ N_\beta(g/V) & N_p & N_\beta + N_\dot{\beta} Y_\beta & \frac{1}{T} + N_r - N_\dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$\mathbf{G} = T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3.91 \\ 0.035 & 0 \\ -2.53 & 0.31 \end{bmatrix}. \quad (69)$$

Asumiendo incertidumbre, resulta el modelo

$$\mathbf{x}_{i+1} = [\mathbf{F} + \delta\mathbf{F}]\mathbf{x}_i + [\mathbf{G} + \delta\mathbf{G}]\mathbf{u}_i \quad (70)$$

donde  $\delta\mathbf{F}$  y  $\delta\mathbf{G}$  están limitados con  $\|\delta\mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F$  y  $\|\delta\mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G$ .

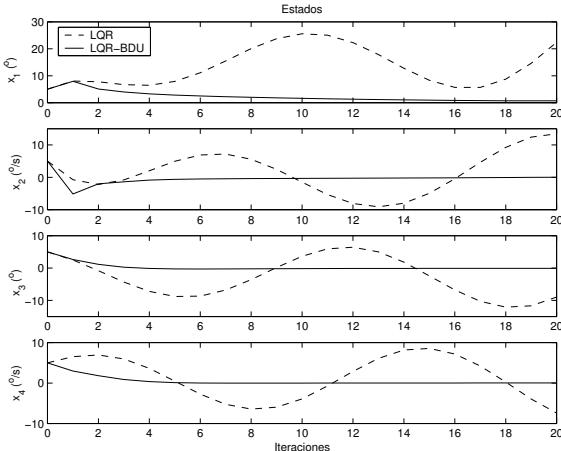


Figura 8. Respuesta del sistema (*variables de estado*) con BDU (*línea continua*) y sin BDU (*línea discontinua*).

Considerando

$$\begin{aligned} \eta_F &= 0.7, \\ \eta_G &= 0, \\ \mathbf{x}_0 &= [5 \ 5 \ 5 \ 5]^T, \\ N &= 20, \end{aligned} \quad (71)$$

y los parámetros del LQR

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} = \mathbf{R} = \mathbf{I}, \quad (72)$$

se obtiene el LQR-BDU multidimensional. La figura 8 muestra la respuesta inestable del sistema (las variables de estado) que se obtiene con el LQR (en línea discontinua) y la respuesta estable que proporciona el LQR-BDU (en línea continua) cuando se considera que la incertidumbre del sistema perturbado es

$$\delta\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0.55 & -0.01 & 0.01 \\ -0.03 & -0.29 & -0.47 & 0.07 \\ 0.01 & 0.02 & -0.01 & -0.47 \\ 0.05 & 0 & 0.26 & -0.02 \end{bmatrix}, \quad (73)$$

$$\delta\mathbf{G} = \mathbf{0}. \quad (74)$$

Como se observa el BDU mejora las prestaciones del sistema en presencia de incertidumbre.

En la figura 9 se muestran las acciones de control, mientras que en la figura 10 se muestra el parámetro de regularización  $\lambda$ , el cual no es constante sino que varía en cada instante de tiempo teniendo en cuenta la incertidumbre.

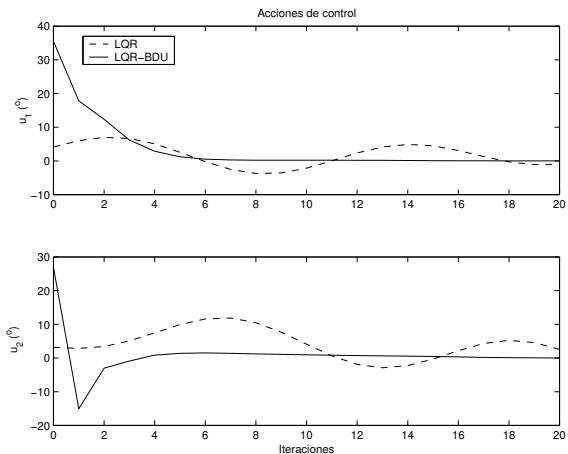


Figura 9. Respuesta del sistema (*acciones de control*) con BDU (*línea continua*) y sin BDU (*línea discontinua*).

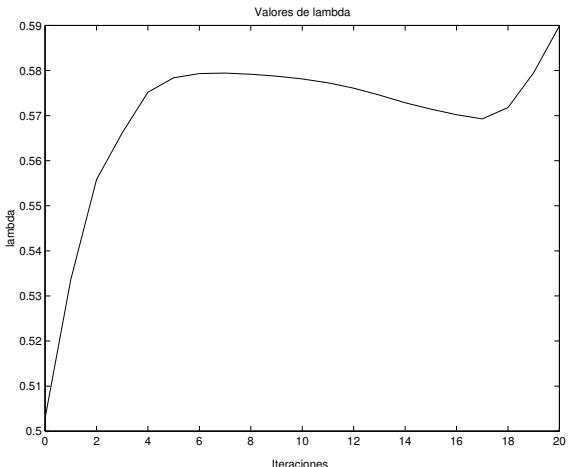


Figura 10. Parámetro de regularización  $\lambda$  en cada instante de tiempo.

## 6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo se ha abordado la aplicación del LQR-BDU a sistemas multidimensionales, lo cual no es trivial, ya que no es posible obtener una ecuación explícita del parámetro  $\lambda$ , con el problema añadido de que en este caso, las expresiones de  $\mathbf{K}_i$  y  $\mathbf{P}_i$  dependen del vector de estado del peor caso  $\hat{\mathbf{x}}_i$ , y por tanto la solución presenta la forma de un problema TPBVP (*two-point boundary value problem*), que se resuelve iterativamente.

La conclusión fundamental sería que la técnica BDU puede mejorar la robustez del LQR para sistemas multidimensionales. Para ello, el parámetro ajustado empíricamente  $\mathbf{R}$  se modifica teniendo en cuenta la cota de la incertidumbre, y la matriz  $\mathbf{P}_i$  también se reajusta mediante la modificación de la ecuación recursiva matricial de Riccati.

La aplicación al LQR, sirve como precursor de la aplicación a **control predictivo**, como trabajo futuro, tanto con modelos en espacio de estado como en entrada-salida (Ramos, 2007), tal como el GPC (*Generalized Predictive Control*), ya que permite controlar procesos inestables, de fase no mínima, sistemas con retardo, etc., aunque en cualquier caso la aplicación es extensible a otros controladores predictivos.

El parámetro de penalización del esfuerzo de control  $\lambda$  presente en control predictivo, también se puede ajustar teniendo en cuenta los límites de la incertidumbre usando la técnica BDU. La aplicación es sencilla ya que los controladores predictivos se pueden expresar en formato de mínimos cuadrados.

Otra línea futura pretende llevar a cabo la aplicación de dicha estrategia de control sobre un sistema real, lo cual requiere el esfuerzo inicial de identificación robusta del proceso, que proporcione un modelo nominal y la información acerca de las cotas de la incertidumbre.

## REFERENCIAS

- Aguado, A. y M. Martínez (2003). *Identificación y Control Adaptativo*. Vol. ISBN: 84-205-3570-2. Prentice Hall (Pearson Educación).
- Aström, K. J. y B. Wittenmark (1997). *Computer Controlled Systems. Theory and Design*. 3rd. ed. ed.. Prentice Hall Information and Systems Sciences Series. Englewood Cliffs.
- Chandrasekaran, S., E. Gomez, Y. Karant y K.E. Schubert (2004). Backward error estimation. *Hawaii International Conference on Computer Science*.
- Chandrasekaran, S., G. H. Golub, M. Gu y A. H. Sayed (1997). Worst-case parameter estimation with bounded model uncertainties. In: *American Control Conference*.
- Chandrasekaran, S., G. H. Golub, M. Gu y A. H. Sayed (1998). Parameter estimation in the presence of bounded data uncertainties. *SIAMAX* **19**(1), 235–252.
- Chandrasekaran, S., G. H. Golub, M. Gu y A. H. Sayed (1999). An efficient algorithm for a bounded errors-in-variables model. *SIAMAX* **20**(4), 839–859.
- Ghaoui, L. E. y H. Lebret (1996). Robust least squares and applications. In: *In Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*.
- Ghaoui, L. E. y H. Lebret (1997). Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *SIAMAX* **18**(4), 1035–1064.
- Golub, G. H., P. C. Hansen y D. P. O’Leary (1999). Tikhonov regularization and total least squares. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **21**, 185–194.
- Golub, G. H. y Ch. F. van Loan (1980). An analysis of the total least squares problem. *SIAMAX* **17**, 883–893.
- Golub, G. H. y Ch. F. van Loan (1996). *Matrix Computations*. 3rd ed. ed.. Johns Hopkins University Press. Baltimore ; London.
- Hansen, P. C. (1992). Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. *SIAM Review* **34**, 561–580.
- Hoerl, R. W., J. H. Schuenemeyer y A. E. Hoerl (1986). A simulation of biased estimation and subset selection regression techniques. *Technometrics* **28**(4), 369–380.
- Kilmer, M. E. y D. P. O’Leary (2001). Choosing regularization parameters in iterative methods for ill-posed problems. *SIAMAX* **22**, 1204–1221.
- Lawson, C. L. y R. J. Hanson (1995). Solving least-squares problems. *SIAM*.
- Nascimento, V. H. y A. H. Sayed (1999). Optimal state regulation for uncertain state-space models. In: *American Control Conference*. Vol. 1. San Diego. pp. 419–424.
- Neubauer, A. y O. Scherzer (1998). Regularization for curve representations: uniform convergence for discontinuous solutions of ill-posed problems. *SIAM J. Appl. Math.* **58**, 1891–1900.
- O’Leary, D. P. (2001). Near-optimal parameters for tikhonov and other regularization methods. *SIAM Journal on scientific computing* **23**(4), 1161–1171.
- Ollero, A. (1991). *Control por computador: descripción interna y diseño óptimo*. p. 374. ISBN 8426708137. Marcombo. Barcelona.
- Polyak, B. T. y R. Tempo (2001). Probabilistic robust design with linear quadratic regulators. *Systems and Control Letters* (43), 343–353.
- Ramos, C. (2007). Control Predictivo basado en Modelos (CPBM) robusto con BDU. PhD thesis. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia.

- Ramos, C., J. Sanchis, M. Martínez y J. M. Herrero (2004). Sintonizado del LQR y control predictivo mediante BDU. In: *XI Congreso Latinoamericano de Control*. La Habana (Cuba).
- Ramos, C., J. Sanchis, M. Martínez y J. M. Herrero (2005). LQR and predictive control tuned via BDU. *Systems Science (ISSN 0137-1223)* **31**(1), 15–25.
- Sayed, A. H., V. H. Nascimento y S. Chandrasekaran (1998). Estimation and control with bounded data uncertainties. In: *Linear Algebra and its Applications*. Vol. 284. Elsevier. pp. 259–306.
- Sayed, A. H. y V. H. Nascimento (1999). Design criteria for uncertain models with structured and unstructured uncertainties. In: *Robustness in Identification and Control*. Vol. 245. Springer Verlag. London. pp. 159–173.
- Schubert, K. E. (2003). A new look at robust estimation and identification. PhD thesis. University of California. Santa Barbara.
- Skogestad, S. y I. Postlethwaite (1996). *Multivariable feedback control. Analysis and Design*. John Wiley and Sons. Chichester.
- Stein, C. (1981). Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *The Annals of Statistics* **9**(6), 1135–1151.
- Subramanian, A. y A. H. Sayed (2003). A robust minimum-variance filter for time varying uncertain discrete-time systems. In: *American Control Conference*. Denver, Colorado. pp. 1885–1889.
- Van Huffel, S. y J. Vandewalle (1991). The total least squares problem: Computational aspects and analysis. *SIAM*.
- Watson, G. A. (2001). Data fitting problems with bounded uncertainties in the data. In: *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*. Vol. 22. pp. 1274–1293.

#### ANEXO: Obtención de la ecuación recursiva de Riccati modificada mediante BDU

Desarrollando el término cuadrático de (38)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{P}_N \hat{\mathbf{x}}_N &= \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}_N + \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{K}_N^T \mathbf{R} \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \\ &\quad + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2^2 \\ &\quad + \left[ \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \right]^2 \quad (75) \\ &\quad + 2 \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \\ &\quad \cdot \left[ \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \right] \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{P}_N \hat{\mathbf{x}}_N &= \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}_N + \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{K}_N^T \mathbf{R} \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \\ &\quad + c_1 + c_2 + c_3 \end{aligned} \quad (76)$$

donde los escalares  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$  se pueden expresar como

$$\begin{aligned} c_1 &= \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2^2 \\ &= \hat{\mathbf{x}}_N^T [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N]^T \mathbf{P} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N, \quad (77) \\ c_2 &= \left[ \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \right]^2 \\ &= \left[ \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \right]^2 \\ &\quad + \left[ \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \right]^2 \\ &\quad + 2 \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \\ &= \hat{\mathbf{x}}_N^T \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 \eta_G^2 \mathbf{K}_N^T \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \\ &\quad + \hat{\mathbf{x}}_N^T \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 \eta_F^2 \mathbf{I} \hat{\mathbf{x}}_N \\ &\quad + \hat{\mathbf{x}}_N^T 2 \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 \eta_G \frac{\left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2}{\left\| \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2} \eta_F \mathbf{I} \hat{\mathbf{x}}_N \\ &= \hat{\mathbf{x}}_N^T \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 \left[ \left[ \eta_G^2 \mathbf{K}_N^T \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N + \eta_F^2 + 2\eta_G \frac{\left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2}{\left\| \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2} \right] \mathbf{I} \right] \hat{\mathbf{x}}_N, \quad (78) \\ c_3 &= 2 \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \\ &\quad \cdot \left[ \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \right] \\ &= \hat{\mathbf{x}}_N^T \frac{[\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N]^T \mathbf{P} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N]}{\left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2} \quad (79) \\ &\quad \cdot \left[ \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \right] \hat{\mathbf{x}}_N, \end{aligned}$$

de donde se extrae la ecuación recursiva de Riccati modificada mediante BDU (39).