

CONTROL NO LINEAL ROBUSTO DE UNA MAQUETA DE HELICÓPTERO CON ROTORES DE VELOCIDAD VARIABLE

Manuel López-Martínez * Manuel G. Ortega *
Carlos Vivas * Francisco R. Rubio *

* Dept. Ingeniería de Sistemas y Automática.
Escuela Técnica Superior de Ingenieros. Universidad de
Sevilla. Camino de los Descubrimientos s/n. 41092-Sevilla.
Correos: {mlm,mortega,cvivas,rubio}@esi.us.es

Resumen: En este artículo se presenta el diseño de un controlador robusto no lineal para un helicóptero de laboratorio. El equipo se caracteriza por tener los ángulos de ataque de las hélices de los rotores fijos y se controla mediante el cambio de velocidad de los rotores a través de dos motores de accionamiento directo. El sistema resultante es multivariable (de 2 entradas y 4 salidas) altamente no lineal y fuertemente acoplado. La aplicación presentada en este artículo considera el diseño de un sistema de control robusto con rechazo de perturbaciones persistentes, basado en linealización por realimentación y dos controladores con estructura PID diseñados a partir de un controlador LQR con efecto integral añadido. La metodología ha sido satisfactoriamente verificada por medio de resultados experimentales. *Copyright © 2007 CEA-IFAC*

Palabras clave: Control robusto, linealización por realimentación, modelado y control no lineal de helicópteros.

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo presenta la síntesis y aplicación de un controlador no lineal para el seguimiento de trayectorias con rechazo de perturbaciones a una maqueta de helicóptero.

En helicópteros convencionales el control de orientación y posición se consigue por medio de cambios apropiados de inclinación de las hélices de los rotores, lo cual se lleva a cabo con los actuadores cíclico y colectivo, mientras que se mantienen constantes las velocidades de los rotores. Este hecho, junto con no-linealidades y acoplamientos intrínsecos, hace a estos sistemas especialmente difíciles de controlar, puesto que los pares y fuerzas necesarios no son directamente aplicados, sino que son transmitidos a través de los efectos aero-

dinámicos de las hélices de los rotores. Sin embargo, estos sistemas han sido extensivamente investigados dando lugar a un número de aplicaciones de control que abarca desde técnicas lineales de control robusto (Walker y Postlethwaite, 1996; Postlethwaite *et al.*, 1999) a otras más recientes no lineales como en (Kung *et al.*, 2002; Avila *et al.*, 2003).

Por el contrario en maquetas de helicóptero de laboratorio, es usual trabajar con ángulos de ataque de pala fijo y motores de velocidad variable, ya que el diseño mecánico del mismo se simplifica y se reducen considerablemente los costes de fabricación. El uso de maquetas o simuladores hardware presentan ventajas cuando se investiga en el campo del control de helicópteros ya que, al tratarse de sistemas no lineales altamente acopla-



Figura 1. Maqueta de helicóptero.

dos, el control es una tarea ardua. Por este motivo, el uso de simuladores aumenta la productividad y reduce el tiempo de desarrollo. Esto, a la vez, permite investigar y aportar en nuevas técnicas de control para helicópteros, al margen de los bien conocidos PID. Los controladores PID desacoplados ya han sido empleados con éxito en helicópteros autónomos a escala en aplicaciones reales, como por ejemplo (Montgomery, 1999; Mejías et al., 2006; Aguirre, 2001).

En cuanto al control de rotores de velocidad variable, esta técnica se ha usado preferentemente en micro helicópteros de un solo rotor, de 4 rotores, de un rotor y doble pala, etc, habiéndose contribuido con importantes trabajos (Bouadballah et al., 2004; Castillo et al., 2007; Altug et al., 2002; Deng et al., 2003). Estas plataformas requieren poco espacio para experimentación y permiten reproducir condiciones parecidas a las de un helicóptero a escala. Éste es el caso del equipo empleado en este artículo (figura 1), donde el control se lleva a cabo exclusivamente por medio de la tensión eléctrica de los motores con ángulo de ataque de pala fijos. Hay que resaltar que esta simplificación mecánica no necesariamente se traslada a una simplificación de la dinámica del sistema a controlar. Por el contrario, los pares y fuerzas necesarios para controlar el sistema son aplicados no sólo a través de efectos aerodinámicos, sino también a través del efecto de acoplamiento que aparece entre la dinámica de los rotores y la del cuerpo de la maqueta, como consecuencia del principio de acción-reacción ori-

ginado en la aceleración y deceleración de los grupos motor-hélice. Estos efectos de acoplamiento tienen implicaciones importantes en el control de la dinámica del sistema. Se puede demostrar que tomando como salidas los ángulos de guiñada y cabeceo, una linealización por realimentación de la dinámica completa da lugar a una dinámica cero inestable (López-Martínez, 2005), por lo que no se puede emplear esta técnica directamente. Este hecho, unido con las incertidumbres de modelado, especialmente en el rango de alta frecuencia, hace que el sistema sea incluso más difícil de controlar que un helicóptero convencional, al menos empleando técnicas básicas de control. Una forma clásica de hacer frente a esta dificultad es hacer uso de algunas hipótesis simplificadoras basadas en la existencia de varias escalas de tiempo como consecuencia de la diferencia de valores de momentos de inercia entre el cuerpo de la maqueta y los grupos motor-hélice. De esta forma se justifica el desacople de las dinámicas del cuerpo del sistema y de los grupos motor-hélice, de tal manera que una linealización parcial del sistema pueda ser aplicada sin dar lugar a una dinámica cero inestable. Con estas hipótesis, el sistema linealizado por realimentación está compuesto por sistemas en cascada realimentados y se le pueden aplicar diversas técnicas de control especialmente diseñadas para estos sistemas.

En este artículo se presenta un controlador diseñado para el seguimiento de trayectorias. El diseño del controlador se ha realizado empleando separación de escalas de tiempo, linealización por realimentación de la dinámica reducida, con lo que la dinámica del cuerpo queda desacoplada y linealizada, siendo equivalente a dos sistemas independientes doble integrador. Estas dinámicas reducidas serán controladas por dos controladores PID cuyos polos serán obtenidos empleando un diseño para regulación mediante controladores LQR con efecto integral.

El artículo está estructurado de la siguiente manera: en el apartado 2 se describe el sistema. En las secciones 3 y 4 se presentan las ecuaciones de movimiento completas y las características estáticas de los rotores. Seguidamente, en la sección 5 se realizan ciertas consideraciones sobre la simplificación del modelo atendiendo a la existencia de varias escalas de tiempo. A continuación, en el apartado 6 se explica la linealización por realimentación llevada a cabo, así como el diseño del controlador externo LQR con efecto integral. En la sección 7 se presentan distintos resultados experimentales. Finalmente, en la sección 8 se muestran las conclusiones más relevantes.

2. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

La maqueta de helicóptero empleada en este artículo, se denomina *Twin Rotor MIMO System* y ha sido fabricada por la empresa *Feedback Instruments Ltd.* Toda la información referente al hardware empleado, sensores, actuadores, tarjeta de adquisición, así como de la implementación de los controladores en tiempo real bajo interfaz externa de *Windows (Real Time Kernel Dynamic Linked Library)*, puede encontrarse en los manuales del equipo (Feedback Instruments Ltd., 1996).

La maqueta está compuesta de un cuerpo que gira a través de dos ejes de rotación libre (figura 1). El sistema está propulsado por dos hélices situadas en planos perpendiculares (Mullhaupt *et al.*, 1997), aunque existen otras maquetas de helicóptero con configuración de hélices en paralelo como la utilizada en (García-Sanz, 2006). Este dispositivo es un sistema multivariable, no lineal y fuertemente acoplado, con grados de libertad en los ángulos de cabeceo y guiñada (denotados por ξ y θ respectivamente) medidos mediante encoders, así como en las posiciones angulares de los rotores principal y de cola (denotados por γ and α respectivamente), donde se emplean tacómetros para medir sus velocidades de giro. La figura 2 muestra esquemáticamente la notación usada en el artículo.

Los dos rotores tienen sus ángulos de ataque de pala fijos. De esta forma, el sistema se controla variando las velocidades angulares de los rotores. De acuerdo con el principio de acción-reacción, esto da lugar a la generación de un par resultante aplicado al cuerpo de la maqueta que lo hace girar en sentido contrario del giro del rotor principal. Por lo tanto, el sistema se ve afectado por dos tipos de fuerzas, las *fuerzas dependientes de velocidad* y las *fuerzas dependientes de aceleración* o fuerzas inerciales.

Las ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas resolviendo la formulación dinámica de Lagrange (Mullhaupt *et al.*, 1997). Para una descripción más detallada del modelado y del procedimiento de identificación se pueden consultar los anexos. Se ha de tener en cuenta que el sistema completo tiene cuatro grados de libertad: los ángulos de guiñada θ y cabeceo ξ ; y las velocidades del rotor principal $\dot{\gamma}$ y de cola $\dot{\alpha}$. Por tanto, al aplicar el método de Lagrange se obtienen cuatro ecuaciones de movimiento: dos actuadas, correspondientes a las ecuaciones de los grupos motor-hélice de cola y principal; y dos no actuadas, correspondientes a los movimiento de guiñada y cabeceo del sistema (véase sección 3). Por tanto, este sistema es subactuado (Fantoni y Lozano, 2002), ya que el número de acciones de control (tensiones de los motores) es menor que el número

de grados de libertad del sistema (ángulos del cuerpo de la maqueta y velocidades de los rotores).

3. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Partiendo de la Lagrangiana, se pueden obtener las cuatro ecuaciones de movimiento siguiendo los procedimientos de mecánica analítica (Danta, 1982; Goldstein, 1987):

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \tau_j \quad (2)$$

$$\tau_j = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{F}_i^p \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i^p}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{F}_i^p \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_i^p}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (3)$$

donde

- \mathcal{L} : Lagrangiana total del sistema.
- \mathcal{T} : Energía cinética total del sistema.
- \mathcal{U} : Energía potencial total del sistema.
- q_j : Cada uno de los cuatro grados de libertad.
- τ_j : Cada uno de los pares generalizados.
- \mathbf{F}_i^p : Cada una de las fuerzas aplicadas en un punto.
- \mathbf{r}_i^p : Posición del punto de aplicación de la fuerza.
- \mathbf{V}_i^p : Velocidad del punto de aplicación de la fuerza.

3.1 Obtención de la Lagrangiana del Sistema

La obtención de la Lagrangiana del sistema se ha llevado a cabo descomponiendo el sistema en cuatro cuerpos (véase figura 2): el brazo de giro, que denominaremos cuerpo 0; el esqueleto principal, que denominaremos cuerpo 2; el grupo motor-hélice grande, que denominaremos cuerpo 3 y el grupo motor-hélice pequeña, que denominaremos cuerpo 4. Hay que aclarar que en la notación empleada, los ejes 1 están reservados para el sistema de referencia inercial.

En primer lugar se han determinado los parámetros físicos de cada uno de los cuerpos: dimensiones, masa y tensores de inercia respecto de sus ejes principales. En segundo lugar, se han obtenido los vectores de posición y velocidades de los centros de gravedad de cada uno de los cuerpos, así como de sus velocidades angulares. Por último para cada uno de los cuerpos se ha calculado su energía cinética y potencial gravitatoria a partir de las expresiones

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_x &= \frac{1}{2} M_x (\mathbf{V}_{x1}^p)^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{x1}^T \cdot \bar{\mathbf{I}}_x \cdot \boldsymbol{\omega}_{x1} + M_x \mathbf{P} \mathbf{G}_x^T \cdot (\mathbf{V}_{x1}^p \wedge \boldsymbol{\omega}_{x1}) \\ \mathcal{U}_x &= M_x g h_x \end{aligned} \quad (4)$$

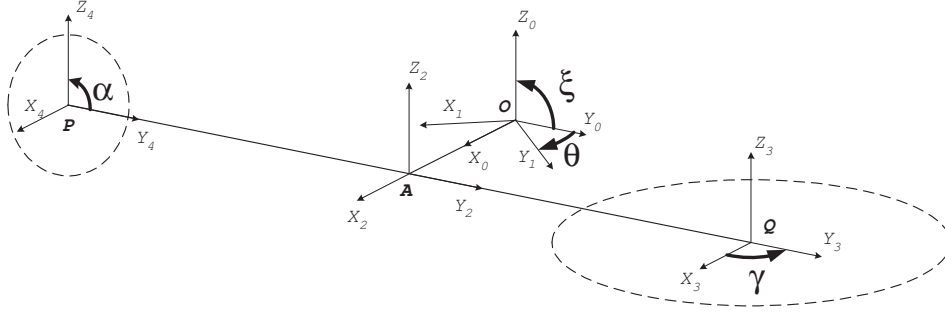


Figura 2. Notación de ángulos del sistema.

Tabla 1. Valores de los parámetros del sistema

Término	valor	unidades
$I_\theta(\xi)$	$-7,1 \cdot 10^{-4} \sin(2\xi) + 1,1 \cdot 10^{-2} + 5,6 \cdot 10^{-2} \cos^2(\xi)$	$kg \cdot m^2$
$I_{\theta\xi}(\xi) = I_{\xi\theta}(\xi)$	$1,6 \cdot 10^{-3} \cos(\xi) + 2,7 \cdot 10^{-5} \sin(\xi)$	$kg \cdot m^2$
I_ξ	$6,7 \cdot 10^{-2}$	$kg \cdot m^2$
I_m	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$kg \cdot m^2$
I_t	$6,3 \cdot 10^{-5}$	$kg \cdot m^2$
$C_{\theta\xi}(\xi)$	$-1,6 \cdot 10^{-3} \sin(\xi) + 2,6 \cdot 10^{-5} \cos(\xi)$	$kg \cdot m^2$
$C_{\xi\theta}(\xi)$	$-7,1 \cdot 10^{-4} + 2,8 \cdot 10^{-2} \sin(2\xi) + 1,4 \cdot 10^{-2} \cos^2(\xi)$	$kg \cdot m^2$
$A_1(\xi)$	$-2,8 \cdot 10^{-3} \cos^2(\xi) + 1,4 \cdot 10^{-3} - 5,6 \cdot 10^{-2} \sin(2\xi)$	$kg \cdot m^2$
$d_{11}(\xi)$	$2,3 \cdot 10^{-5} \sin(2\xi)$	$kg \cdot m^2$
$d_{22}(\xi)$	$2,6 \cdot 10^{-4} \sin(\xi)$	$kg \cdot m^2$
$d_{13}(\xi)$	$-6,9 \cdot 10^{-5} \sin(\xi)$	$kg \cdot m^2$
$G(\xi)$	$1,9 \cdot 10^{-1} \cos(\xi) + 2,8 \cdot 10^{-1} \sin(\xi)$	$N \cdot m$
$K_\theta = K_\xi$	$3 \cdot 10^{-3}$	$kg \cdot m^2/s$
$D_m(\dot{\gamma})$	$2,5 \cdot 10^{-4} \dot{\gamma} \dot{\gamma}$	$N \cdot m$
$L_m(\dot{\gamma})$	$2,5 \cdot 10^{-1} F_m(\dot{\gamma})$	$N \cdot m$
$F_m(\dot{\gamma})$	$a_v \dot{\gamma} \dot{\gamma} + \epsilon_v \dot{\gamma}, \quad a_v = 2,9 \cdot 10^{-4}, \quad \epsilon_v \ll a_v$	N
$B_m(\dot{\gamma})$	$6,8 \cdot 10^{-4} \dot{\gamma}$	$N \cdot m$
$D_t(\dot{\alpha})$	$3,9 \cdot 10^{-5} \dot{\alpha} \dot{\alpha}$	$N \cdot m$
$L_t(\xi, \dot{\alpha}, \dot{\gamma})$	$(-1 \cdot 10^{-2} \sin(\xi) + 2,7 \cdot 10^{-1} \cos(\xi)) F_t(\dot{\alpha}) - 5,5 \cdot 10^{-2} \sin(\xi) F_m(\dot{\gamma})$	$N \cdot m$
$F_t(\dot{\alpha})$	$a_h \dot{\alpha} \dot{\alpha} + \epsilon_h \dot{\alpha}, \quad a_h = 3,3 \cdot 10^{-5}, \quad \epsilon_h \ll a_h$	N
$B_t(\dot{\alpha})$	$4,5 \cdot 10^{-3} \dot{\alpha}$	$N \cdot m$

donde

- x : Cuerpo a analizar, $x = 0, 2, 3, 4$.
- M_x : Masa del cuerpo x .
- \mathbf{V}_{x1}^p : Velocidad lineal del punto p del cuerpo x respecto de los ejes inerciales 1 (véase figura 2).
- $\boldsymbol{\omega}_{x1}$: Velocidad angular del cuerpo x respecto de los ejes inerciales 1.
- \bar{I}_x^p : Tensor de Inercia del cuerpo x respecto del punto p .
- \mathbf{PG}_x : Vector de posición del centro de gravedad G del cuerpo x respecto del punto p .
- g : Aceleración de la gravedad ($9,8m/s^2$).
- h_x : Altura del centro de gravedad del cuerpo x .

Finalmente, se ha obtenido la Lagrangiana total del sistema sumando las Lagrangianas de cada uno de los cuatro cuerpos (véase anexo B), calculando la energía cinética y potencial de cada cuerpo, teniendo en cuenta sus masas y dimensiones, y por tanto sus momentos de inercia respecto de los ejes de giro implicados en los movimientos de los distintos cuerpos. En los anexos se adjunta una descripción de cada uno de los cuerpos, así como los valores de los parámetros físicos.

3.2 Ecuaciones de movimiento

Aplicando las ecuaciones (1), (2) y (3) resulta:

$$I_t (\ddot{\alpha} + \ddot{\xi}) = U_t - (B_t \dot{\alpha} + D_t(\dot{\alpha})) \quad (5)$$

$$I_m (\ddot{\gamma} + \ddot{\theta} \cos(\xi)) = I_m \dot{\theta} \dot{\xi} \sin(\xi) + U_m - (B_m \dot{\gamma} + D_m(\dot{\gamma})) \quad (6)$$

donde (5) y (6) son las ecuaciones de movimiento correspondientes a los grados de libertad de las hélices de cola y principal respectivamente, siendo éstas las variables actuadas. Del mismo modo, (7) y (8) son las ecuaciones de movimiento correspondientes a los grados de libertad de guiñada y cabeceo respectivamente, siendo éstas las variables subactuadas.

$$I_\theta(\xi) \ddot{\theta} + I_{\theta\xi}(\xi) \ddot{\xi} + I_m \cos(\xi) \ddot{\gamma} + C_{\theta\xi}(\xi) \dot{\xi}^2 + A_1(\xi) \dot{\xi} \dot{\theta} + d_{11}(\xi) \dot{\alpha} \dot{\theta} + d_{13}(\xi) \dot{\gamma} \dot{\xi} + K_\theta \dot{\theta} = -D_m(\dot{\gamma}) \cos(\xi) + L_t(\xi, \dot{\alpha}, \dot{\gamma}) \quad (7)$$

$$I_{\xi\theta}(\xi) \ddot{\theta} + I_\xi \ddot{\xi} + I_t \ddot{\alpha} + C_{\xi\theta}(\xi) \dot{\theta}^2 + d_{22}(\xi) \dot{\gamma} \dot{\theta} + G(\xi) + K_\xi \dot{\xi} = -D_t(\dot{\alpha}) + L_m(\dot{\gamma}) \quad (8)$$

La notación empleada es la siguiente:

- θ : Ángulo de guiñada (rad).
- ξ : Ángulo de cabeceo (rad).
- $\dot{\alpha}$: Velocidad angular del rotor de cola (rad/s).
- $\dot{\gamma}$: Velocidad angular del rotor principal (rad/s).
- $I_\xi, I_{\theta\xi}(\xi)$ y $I_\theta(\xi)$: Momentos de inercia del cuerpo de la maqueta.
- I_m y I_t : Momentos de inercia del rotor *principal* y de *cola*, respectivamente.
- $C_{\theta\xi}(\xi), C_{\xi\theta}(\xi)$: Términos Centrífugos.
- $A_1(\xi)$ y $d_{ij}(\xi)$: Términos de Coriolis.
- K_θ y K_ξ : Términos de fricción viscosa del cuerpo.
- $G(\xi)$: Par de gravedad.
- $D_m(\dot{\gamma})$ y $D_t(\dot{\alpha})$: Par de arrastre de la hélice *principal* y de *cola*, respectivamente.
- $L_m(\dot{\gamma})$ y $L_t(\xi, \dot{\alpha}, \dot{\gamma})$: Pares aerodinámicos generados por las hélices *principal* y de *cola*, respectivamente y que dependen de las fuerzas de propulsión del rotor principal $F_m(\dot{\gamma})$ y del rotor de cola $F_t(\dot{\alpha})$.
- B_m y B_t : Términos de fricción viscosa de los grupos motor-hélice *principal* y de *cola*, respectivamente.
- U_m y U_t : Par motor de los grupos motor-hélice *principal* y de *cola*, respectivamente.

De este modelo se puede observar, con sólo analizar la ecuación (5), que el par motor aplicado al motor de cola U_t se invierte en la aceleración de la hélice de cola y la aceleración de cabeceo. Esto dará lugar a que cambios programados de la velocidad del rotor de cola mediante este par, afectarán directamente al ángulo de cabeceo. Del mismo modo, analizando la ecuación (6), se puede observar que cambios programados de la velocidad del rotor principal mediante el par U_m , afectarán al ángulo de guiñada.

En la tabla 1 se presentan los valores de los diferentes parámetros, los cuales han sido identificados mediante diversos experimentos y técnicas de diseño asistido por computador (CAD) (véanse anexos para más información).

4. CARACTERÍSTICAS ESTÁTICAS DE LOS ROTORES

A continuación se presentan las gráficas correspondientes a las características estáticas de los rotores. De estas gráficas se han obtenido F_m (L_m), D_m , B_m , F_t (L_t), D_t y B_t del modelo.

Característica velocidad-propulsión

Nótese que las características de propulsión pueden ser identificadas mediante modelos cuadráticos en velocidad obteniéndose un error cuadrático

medio aceptable. Sin embargo, en la literatura es bastante frecuente encontrar modelos lineales de propulsión, los cuales representan únicamente una aproximación local de las fuerzas de propulsión en torno a un punto de operación. En este artículo se han identificado modelos de propulsión cuadrático-lineales ($a|\omega|\omega + \varepsilon\omega$), ya que capturan el comportamiento estático de los rotores tanto con altas velocidades como con velocidades muy próximas a cero, siendo linealizables en el origen.

Las figuras 3 y 4 representan las características estáticas de los rotores principal y de cola respectivamente. En ellas se muestra como cambian las fuerzas de propulsión conforme la velocidad de los rotores aumenta. Para obtener dichas características se realizaron dos tipos de experimentos: el primero de ellos, midiendo las velocidades de los rotores con tacómetros y estimando las fuerzas de propulsión con las ecuaciones de movimiento (7) y (8) en régimen permanente; y el segundo, midiendo las fuerzas de propulsión con dinamómetros.

Característica velocidad-par motor

Las figuras 5 y 6 representan las características de velocidad y señal de entrada de los motores. De estas características se obtendrán tanto los modelos de fricción viscosa de los motores ($b\omega$), como los modelos de arrastre de las hélices cuadráticos ($a|\omega|\omega$) y lineales ($\tilde{a}\omega$). Para obtener dichos parámetros se han empleado las ecuaciones de movimiento de los rotores (5) y (6) en régimen permanente.

5. SIMPLIFICACIÓN DEL MODELO

En la clase de sistemas que nos ocupa, es usual considerar, como hipótesis de simplificación, que los momentos de inercia de los grupos motor-hélice son despreciables con respecto a los momentos de inercia del cuerpo de la maqueta. Es decir,

$$I_m, I_t \ll I_\xi, I_\theta, I_{\theta\xi}$$

Teniendo en cuenta esto, la dinámica del sistema puede ser separada en dos escalas de tiempo (Reinier *et al.*, 1996; Khalil, 2002), diferenciándose dos dinámicas:

- *Dinámica rápida*, que hace referencia a la dinámica de los actuadores, es decir, de los grupos motor-hélice.
- *Dinámica lenta (Sistema reducido)*, que hace referencia a la dinámica del cuerpo de la maqueta, concretamente a las dinámicas de guiñada y cabeceo.

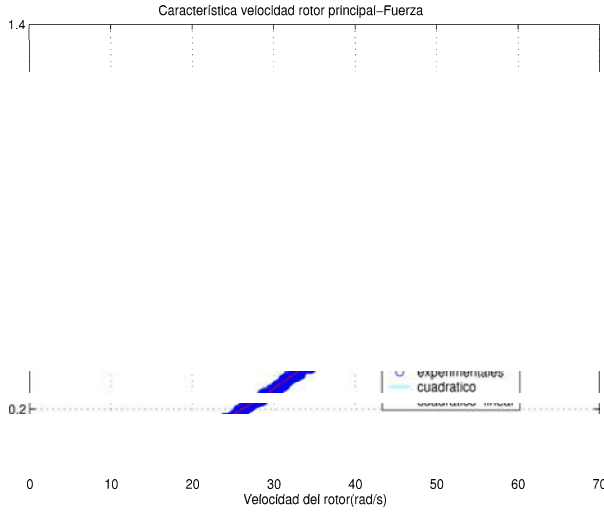


Figura 3. Característica velocidad rotor principal - fuerza de propulsión.

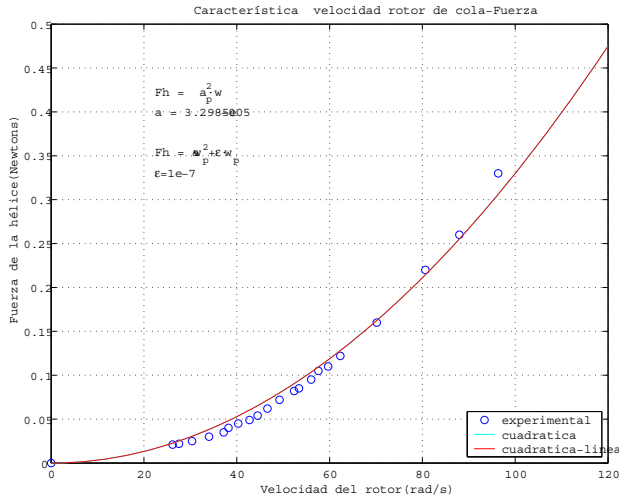


Figura 4. Característica velocidad rotor de cola - fuerza de propulsión.

Además, asumiendo que el controlador del grupo motor-hélice, que se utiliza para regular las velocidades de los motores, es de alta ganancia, se puede entonces considerar que los motores aceleran suavemente, de tal manera que las fuerzas dominante en la dinámica son las debidas a efectos aerodinámicos en vez de a fuerzas inerciales.

Bajo estas hipótesis, la aceleración de los rotores puede despreciarse en la caracterización de la *dinámica lenta*, y consecuentemente las ecuaciones del movimiento del sistema reducido, obtenidas de las ecuaciones (7) y (8), pueden ser aproximadas por la siguiente expresión matricial:

$$\begin{bmatrix} I_\theta(\xi) & I_{\theta\xi}(\xi) \\ I_{\theta\xi}(\xi) & I_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1(\xi)\dot{\xi}\dot{\theta} + C_{\theta\xi}(\xi)\dot{\xi}^2 \\ C_{\xi\theta}(\xi)\dot{\theta}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(\xi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\theta\dot{\theta}} \\ K_{\xi\dot{\xi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11}(\xi)\dot{\alpha}\dot{\theta} + d_{13}(\xi)\dot{\gamma}\dot{\xi} \\ d_{22}(\xi)\dot{\gamma}\dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_\theta \\ \zeta_\xi \end{bmatrix} \quad (9)$$

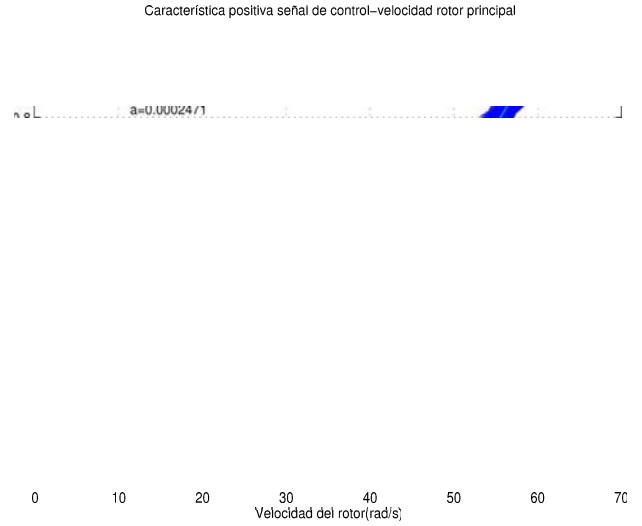


Figura 5. Característica velocidad rotor principal - par motor.

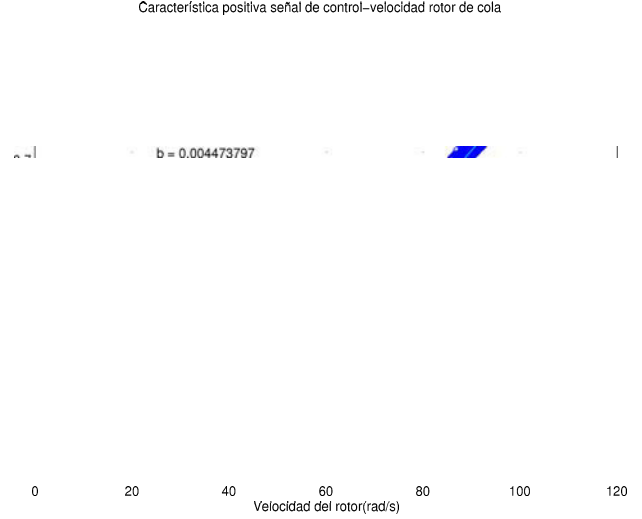


Figura 6. Característica velocidad rotor de cola - par motor.

donde los términos ζ_θ y ζ_ξ , representan los pares de propulsión resultantes aplicados sobre los ejes de movimiento Z_0 y X_2 respectivamente (véase figura 2), y que se han definido como:

$$\begin{aligned} \zeta_\theta &\doteq -D_m(\dot{\gamma}) \cos(\xi) + L_t(\xi, \dot{\alpha}, \dot{\gamma}) \\ \zeta_\xi &\doteq -D_t(\dot{\alpha}) + L_m(\dot{\gamma}) \end{aligned}$$

De este modo el par de propulsión resultante de cabeceo ζ_ξ depende tanto del par de propulsión de la hélice principal, como del par de arrastre de la hélice de cola. Análogamente, el par de propulsión resultante de guiñada ζ_θ depende tanto del par de propulsión de la hélice de cola, como del par de arrastre de la hélice principal.

Por otro lado, puede observarse que el término $\begin{bmatrix} d_{11}\dot{\alpha}\dot{\theta} + d_{13}\dot{\gamma}\dot{\xi} & d_{22}\dot{\gamma}\dot{\theta} \end{bmatrix}^T$ puede ser interpretado como un aumento de fricción viscosa debido al movimiento de los rotores $\begin{bmatrix} K_{\theta\dot{\theta}} & K_{\xi\dot{\xi}} \end{bmatrix}^T$.

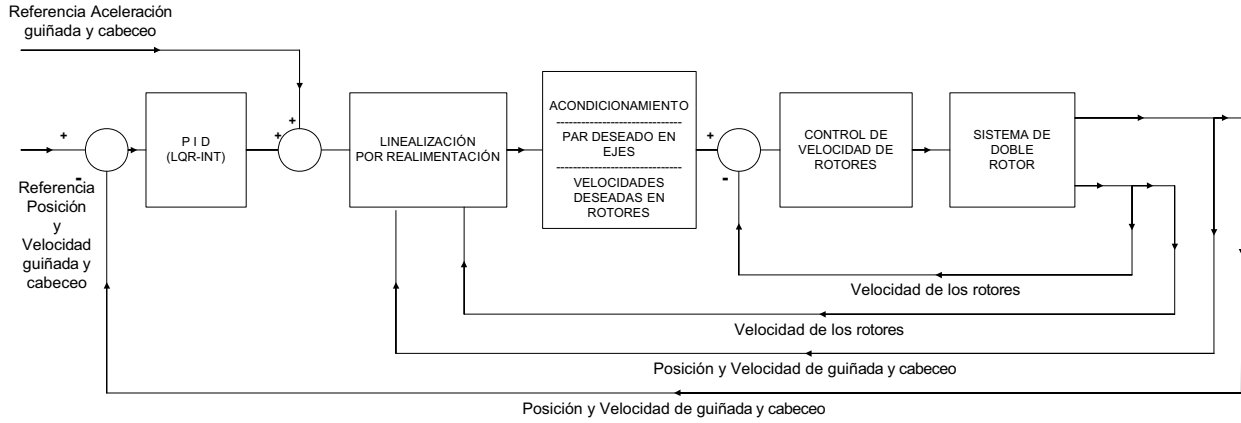


Figura 7. Esquema general de control.

6. LINEALIZACIÓN POR REALIMENTACIÓN

En la figura 7 se muestra un esquema general de la estructura de control real implementada. En ella se observan tres realimentaciones principales: la primera de ellas, correspondiente a la realimentación de las velocidades de los rotores, la cual se emplea para un control en cascada de los mismos; la segunda de ellas, incluyendo además las posiciones y velocidades de guiñada y cabeceo, se usa para una linealización por realimentación; y la tercera de ellas, para el controlador exterior.

Para el diseño del controlador externo, se ha empleado el modelo no lineal del sistema reducido (9), se ha realizado una linealización por realimentación entrada-salida (véase figura 8), obteniéndose que las sumas de los grados relativos del sistema es igual a la dimensión del mismo (dinámica cero trivial (Isidori, 1999)). De esta forma se consigue a la vez un desacoplamiento de las entradas y salidas, así como una linealización del sistema convirtiéndolo en dos dobles integradores desacoplados. Esto se puede ver si se reescriben las ecuaciones del sistema reducido (9) definiendo

$$q = [q_1, q_2]^T = [\theta, \xi]^T \in \mathbb{R}^2, \quad y$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} I_{\theta}(\xi) & I_{\theta\xi}(\xi) \\ I_{\theta\xi}(\xi) & I_{\xi} \end{bmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) \dot{q} = [A_1 \dot{\xi} \dot{\theta} + C_{\theta\xi} \dot{\xi}^2, C_{\xi\theta} \dot{\theta}^2]^T,$$

$$F(\dot{q}) = [d_{11}\omega_t \dot{\theta} + d_{13}\omega_m \dot{\xi} + K_{\theta} \dot{\theta}, d_{22}\omega_m \dot{\theta} + K_{\xi} \dot{\xi}]^T,$$

$$G(q) = [0, G]^T,$$

$$N(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q}) \dot{q} + F(\dot{q}) + G(q),$$

siendo la expresión resultante

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = \tau \quad (10)$$

donde $\tau = [\zeta_{\theta}, \zeta_{\xi}]^T$ son los pares generalizados aplicados sobre las articulaciones (las señales de entrada del sistema). Además, se ha considerado para el desarrollo, que los estados q y \dot{q} son

accesibles. Usando q_r , \dot{q}_r y \ddot{q}_r para denotar la posición articular de referencia, la velocidad y la aceleración, respectivamente, se puede definir el vector de error de seguimiento, x , como

$$x(t) = [\dot{e}(t) \ e(t) \ \int e(t) dt]^T$$

donde $e = q_r - q$. Aplicando el método de linealización por realimentación al sistema (10), se obtiene la siguiente estructura de control

$$\tau = M(q)\nu + N(q, \dot{q}) \quad (11)$$

De esta forma $\ddot{q} = \nu = M^{-1}(\tau - N)$, siendo τ la ley de control linealizante (par calculado (Spong y Vidyasagar, 1989)), y ν la ley de control externa, la cual será diseñada para hacer que la evolución temporal del estado sea exponencial, es decir, la dinámica venga gobernada por la siguiente ecuación diferencial $\dot{x} + kx = 0$, donde k es un vector constante de diseño. Para ello, se tomará

$$\nu = \ddot{q}_r + \bar{\nu}$$

$$\bar{\nu} = k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int_0^t e dt.$$

Así, la ecuación del error resultante viene dada por

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int_0^t e dt = 0.$$

En general, aparecerá un par adicional de perturbación $\omega(t, x)$ sobre el par calculado, debido a los efectos totales de errores de modelado y a las perturbaciones externas. Por ello la ecuación del error se ve afectada, pudiéndose expresar este efecto como

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int_0^t e dt = \omega(t, x). \quad (12)$$

Si la función de perturbación $\omega(t, x)$ se pudiera acotar como $\|\omega(t, x)\| \leq \gamma \|x\|$, es decir, se desvaneciera conforme se fuera acercando al origen

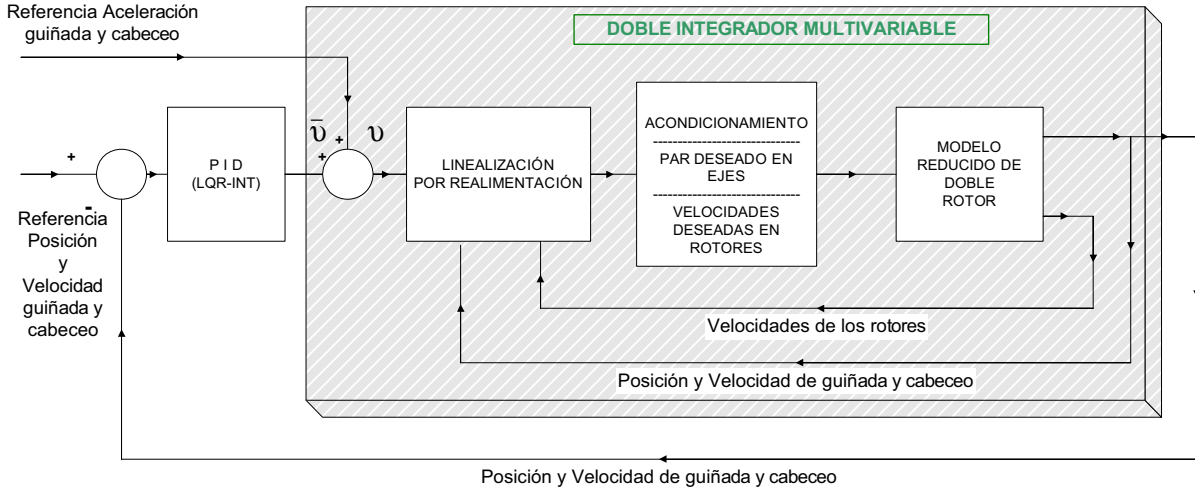


Figura 8. Esquema de control con linealización por realimentación.

$x=0$, entonces, en virtud de que el equilibrio del sistema sin perturbar es globalmente exponencialmente estable, el equilibrio del sistema perturbado sería también globalmente exponencialmente estable (Khalil, 2002).

En el caso de que la función de perturbación no se desvanezca en el origen, sólo se puede asegurar que el sistema evoluciona de forma exponencial hasta cierto instante de tiempo, a partir del cual las trayectorias de $x(t)$ están acotadas en una bola próxima al equilibrio (Khalil, 2002).

Para el caso de una perturbación mantenida y constante $\omega(t, x) = \omega$, se puede deducir de la ecuación del error (12), que en régimen permanente será el término integral el que absorba la perturbación, por lo que el error en posición en régimen permanente será nulo.

se diseñará un controlador LQR para un triple integrador, dando lugar a tres constantes k_i , k_p , k_v , que serán las que fijen los polos en bucle cerrado del sistema, los cuales se obtienen de resolver el polinomio característico $s^3 + k_v s^2 + k_p s + k_i = 0$.

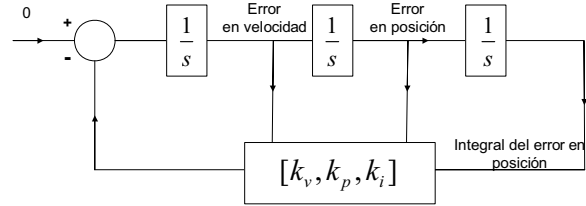


Figura 10. Esquema de controlador con estado accesible.

El sistema lineal de la figura 10 viene caracterizado en el espacio de estados por las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Para la implementación práctica del control por computador, se ha realizado el diseño del controlador LQR en tiempo discreto, empleando un tiempo de muestreo de $T_s = 0,01$ segundos. Para el ajuste del controlador se han tomado como matrices de ponderación, Q para penalizar el estado x , y R para penalizar la señal de control \bar{v} (Rubio y López, 1996). De esta forma se han fijado $Q = C^T C$, con $C = [0, 1, 1]$, $R = 0,1$ para el control de cabeceo, y $R = 10$ para el control de guiñada.

6.1 Cálculo del controlador externo

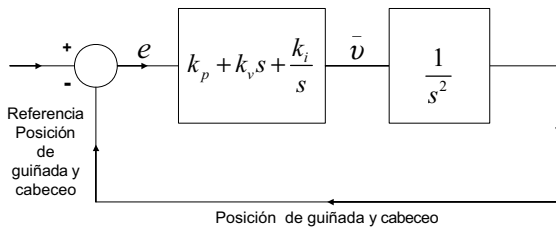


Figura 9. Esquema del controlador externo.

El diseño del controlador externo

$$\bar{v} = k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int_0^t e dt,$$

que tiene estructura de PID lineal (véase figura 9), se realizará diseñando un controlador LQR para un sistema de segundo orden más un integrador adicional (véase figura 10). Es decir, el término integral del PID se ha considerado como parte de un nuevo sistema a controlar. De esta forma,

6.2 Control en cascada

Una vez que se ha calculado el par a aplicar a cada uno de los ejes, se obtienen las velocidades

de referencia para cada uno de los grupos motor-hélice. Para mejorar el comportamiento del sistema completo se ha introducido un control en cascada en los motores, de tal manera que no exista error en régimen permanente entre las velocidades deseadas y las velocidades reales, y que el tiempo característico de los grupos motor-hélice controlados, sean despreciables con respecto a los tiempos característicos de evolución del cuerpo de la maqueta del helicóptero.

Para ganancias suficientemente grandes de estos controladores y teniendo en cuenta que, por añadidura, los momentos de inercia de los grupos motor-hélice son muy pequeños con respecto a los del cuerpo, se consigue el objetivo deseado. Un análisis de estabilidad realizado por medio de la teoría de sistemas singularmente perturbados muestra que para valores suficientemente grandes de las ganancias del controlador, los distintos puntos de equilibrio del espacio de trabajo del sistema completo, considerando toda la dinámica, son localmente exponencialmente estables (López-Martínez, 2005).

7. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En este apartado se van a presentar dos experimentos en los que se va a poner a prueba la capacidad del controlador para el rechazo de perturbaciones. Se han programado referencias que cambian de forma no simultánea en guiñada y cabeceo para comprobar el desacoplamiento conseguido. Las referencias empleadas son polinomios de quinto orden, las cuales tienen la ventaja de tener bien definidas sus dos primeras derivadas respecto al tiempo, es decir, las velocidades y aceleraciones de referencia, para poder ser empleadas en la estructura de control.

Un sistema de este tipo está sometido constantemente a perturbaciones provocadas por las turbulencias del aire generadas por el efecto suelo. Para examinar desde un punto de vista más objetivo la capacidad de rechazo a perturbaciones del mismo, se ha propuesto el siguiente experimento: Se ha introducido un par de perturbación en el eje de guiñada, el cual se puede modelar como un par de torsión, es decir, un par proporcional al ángulo de guiñada girado, $\tau_d = -k_T \theta$. Para introducir dicho par se ha empleado un cable plano para unir las partes móviles que giran en guiñada. Al producirse el giro en guiñada, el cable plano se comporta como un péndulo de torsión, oponiéndose al giro.

En la figura 11 se muestra la respuesta del sistema controlado mediante el controlador propuesto (*LR-PID-LQRi*: Linealización por Realimentación, con PID externo calculado mediante un LQR con efecto Integral), bajo la influencia de

dicho par de torsión. La influencia de este par se observa directamente en el ángulo de guiñada, e indirectamente debido al acoplamiento en el ángulo de cabeceo. Este efecto se aprecia tanto en los primeros instantes (segundos 10 al 20), como en el cambio de trayectoria entre los segundos 30 al 35. Se puede observar como el controlador corrige el efecto de la perturbación llevando el ángulo de guiñada sobre la trayectoria. Otro de los comportamientos característicos de este sistema es el de fase no mínima, observable entre los segundos 5 al 10, y que se puede explicar a partir de las ecuaciones completas del sistema (5)-(6)-(7)-(8). Cuando las velocidades de los rotores son pequeñas, las fuerzas de propulsión son también pequeñas, siendo dominantes las fuerzas de inercia. De esta forma, cuando se aumenta el par motor del rotor principal, se produce un efecto más rápido en el ángulo de guiñada como consecuencia del acoplamiento inercial, que en el ángulo de cabeceo como consecuencia de la fuerza de propulsión del propio rotor. El mismo fenómeno ocurre en el rotor de cola.

Se ha llevado a cabo también un segundo experimento, en el que se ha introducido el modelado de la perturbación dentro del modelo del sistema. Para medir el parámetro k_T se ha empleado un dinamómetro, situado en el centro del rotor, registrando los valores de los pares de torsión resultantes para diversos ángulos de guiñada, obteniéndose un valor medio aproximado de $k_T = 0,008$ Nm/rad.

De esta forma y como muestra la figura 12, la perturbación ha sido compensada parcialmente tanto entre los segundos 10 al 20, como entre los segundos 30 al 35. Sin embargo también hay que decir que la respuesta por el cambio de trayectoria en el ángulo de cabeceo, ha tardado un poco más en ser compensada por el controlador externo \bar{u} , comparada con la de la figura 11. En ambas figuras, se puede observar también como las velocidades de los motores saturan en pendiente para los instantes 50 al 55.

Ambos experimentos han sido diseñados para llevar al equipo al máximo de sus posibilidades, es decir, se ha recorrido prácticamente todo el espacio de trabajo y se han alcanzado los valores máximos de velocidad y aceleración de motores, produciéndose la saturación de los mismos. En estos límites tanto las características de los motores, como los diferentes pares que entran en juego (gravedad, Coriolis y centrífugos), están muy lejos de ser lineales, por lo que el empleo de controladores lineales tipo PID, linealizando en torno a un punto de trabajo, sólo está justificado para controlar el sistema en un rango pequeño del espacio de trabajo, y no para todo el espacio de trabajo, teniéndose que optar por ajustes muy conservadores en los

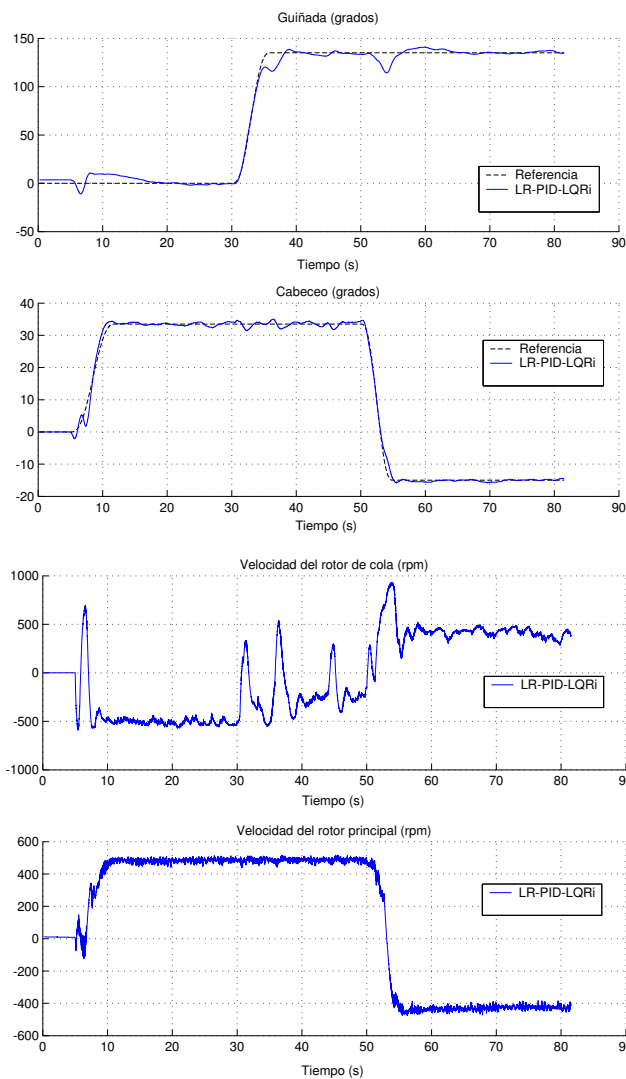


Figura 11. Respuesta del sistema con perturbación sin compensar en par de guiñada.

que los tiempos característicos aumentan considerablemente, obteniéndose unas prestaciones muy inferiores a las del esquema de control planteado en este artículo.

8. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un controlador no lineal para una maqueta de helicóptero con rotores de velocidad variable. El controlador ha sido diseñado teniendo en cuenta la existencia de dos escalas de tiempo, con lo que se ha aplicado una linealización por realimentación de la dinámica lenta del sistema. El controlador externo propuesto, con estructura PID, ha sido diseñado como un LQR (mismos polos en bucle cerrado) para tratar de darle mayor robustez, y se ha introducido un efecto integral para el rechazo de perturbaciones constantes y garantizar error nulo en posición en régimen permanente. El diseño propuesto ha sido

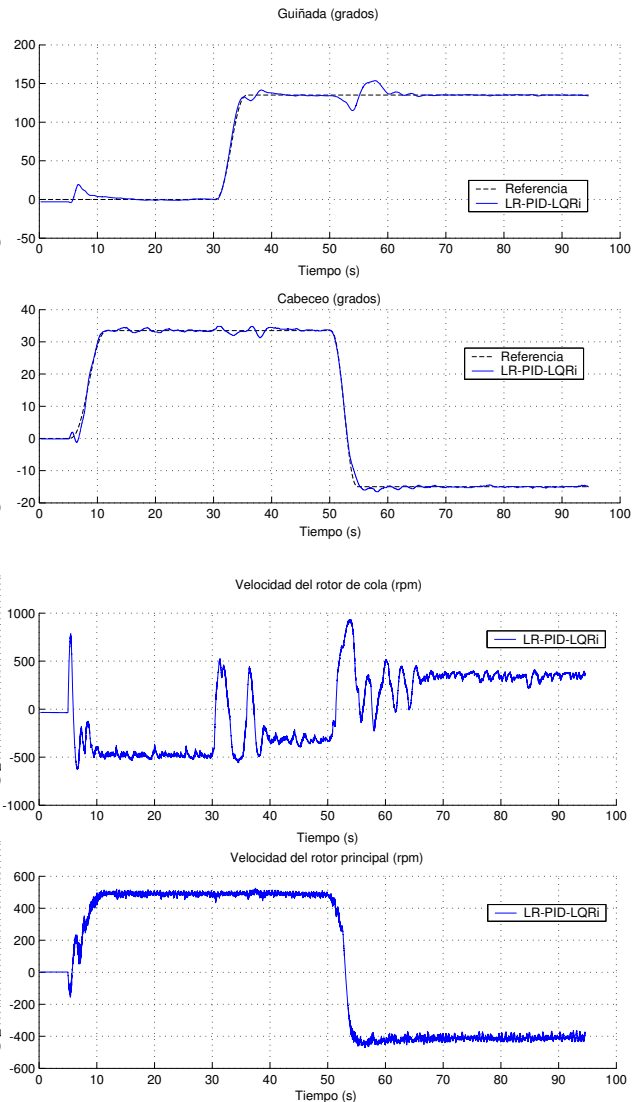


Figura 12. Respuesta del sistema con perturbación compensada en par de guiñada.

probado experimentalmente sobre un equipo de laboratorio.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se ha desarrollado gracias a la financiación del Ministerio de Educación y Ciencia, a través de los proyectos CICYT-FEDER DPI2004-07444-C04-04, DPI2004-01804, DPI2004-06419 y por la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía.

REFERENCIAS

- Aguirre, I. (2001). *Identificación y control de un minihelicóptero en vuelo estacionario*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.
- Altug, E., Ostrowski, J. P., y Mahony, R. (2002). Control of a quadrotor helicopter using visual feedback. *Proc. 2002 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 72-77.

- Avila Vilchis, J.C., B. Brogliato, A. Dzul y R. Lozano (2003). Nonlinear modelling and Control of Helicopters. *Automatica*, **39**, pp. 1583-1596.
- Bouadballah, S., Noth, A., y Siegwart, R. (2004). PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor. In *Proc. 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2451-2456.
- Craig, J.J. (1989). *Introduction to Robotics, Mechanics and Control*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Danta, M.R. (1982). *Cuadernos de Mecánica Dinámica*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.
- Deng, X., Schenato, L. y Sastry, S.S. (2003). Attitude Control for a Micromechanical Flying Insect Including Thorax and Sensor Models. *2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Taipei, Taiwan.
- Fantoni, I. y R. Lozano (2002). *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Springer.
- Castillo, P., García, P., Lozano, R. y Albertos, P. (2007). Modelado y estabilización de un helicóptero de cuatro rotores *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)*, **4** (1), pp. 41-57.
- Feedback Instruments, Ltd.(1996). *Twin Rotor MIMO System: Getting Started, Reference Guide and External Interface to Real Time Kernel*. E. Sussex, TN6 2QR, UK.
- García-Sanz, M., J. Elso y I. Egaña (2006). Control del Ángulo de Cabeceo de un Helicóptero Como Benchmark de Diseño de Controladores. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)*, **3** (2), pp. 111-116.
- Goldstein, H. (1987). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Isidori, A. (1996). *Nonlinear Control Systems*. Springer.
- Khalil, H.K. (2000). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.
- Kung, Chien-Chung, Ciann-Dong Yang, Day-Woei Chiou y Chi-Chung Luo (2002). Non-linear H_∞ helicopter control. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, **4**, pp. 4468-4473.
- López-Martínez, M., J.M. Díaz, M.G. Ortega y F.R. Rubio (2004). Control of a Laboratory Helicopter using Switched 2-step Feedback Linearization. *Proceedings of the American Control Conference (ACC'04)*.
- López-Martínez, M. (2005). *Control No Lineal de Sistemas con Dos Rotores Independientes*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática.
- Mejias, L., Saripalli, S., Sukhatme, G.S. y Campoy, P. (2006). Visual Servoing of an Autonomous Helicopter in Urban Areas Using Feature Tracking, *Journal of Field Robotics*, **23** (3-4), pp.185-199.
- Montgomery, J.F. (1999). *Learning Helicopter Control Through Teaching by Showing*, Phd Thesis, Department of Computer Science, University of Southern California.
- Mullhaupt, Ph., B. Srinivasan, J. Lévine and D. Bonvin (1997). A Toy more difficult to control than the real thing. *Proceedings of the European Control Conference (ECC'97)*, pp. 253-258.
- Ortega, M.G., M. Vargas, C. Vivas y F.R. Rubio (2005). Robustness Improvement of a Nonlinear H_∞ Controller for Robot Manipulators via Saturation Functions. *Journal of Robotic Systems*, **22** (8), pp. 421-437.
- Postlethwaite, I., A. Smerlas, D.J. Walker, A.W. Gubbels, S.W. Baillie, M.E. Strange, J. Howitt (1999). H_∞ control of the NRC Bell 205 fly-by-wire helicopter. *Journal of the American Helicopter Society*, **44** (4).
- Reinier, J., G.J. Balas y W.L. Garrard (1996). Flight Control Design Using Robust Dynamic Inversion and Time-scale Separation, *Automatica*, **32** (11), pp. 1493-1504.
- Rubio, F.R. y M.J. López Sánchez (1996). *Control Adaptativo y Robusto*. Secretariado de publicaciones de la Universidad de Sevilla.
- Spong, M.W. y M. Vidyasagar (1989). *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons. New York.
- Walker, D.J. y I. Postlethwaite (1996). Advanced helicopter flight control using two-degree-of-freedom H_∞ optimization, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **19** (2).

ANEXO A

Para la realización de un modelo físico del sistema, en primer lugar hay que dimensionar correctamente los parámetros que lo definen. Se necesitan como datos iniciales longitudes y masas, para posteriormente, calcular los momentos de inercia del sistema respecto a los ejes que sean de interés. Con dicha información se pasará al cálculo de las ecuaciones de movimiento del sistema, con lo que se obtendrá un modelo matemático del sistema. En este anexo se hará un breve descripción de los métodos que se han seguido para la estimación de parámetros.

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

La obtención de parámetros se ha llevado a cabo de varias formas:

- Vía Experimental
- Vía AutoCad

■ Vía Maplev

Vía Experimental

La gran cantidad de experimentos realizados ha obligado a dedicar todo un apartado para recoger toda la información que posteriormente se ha usado para calcular de forma indirecta otros parámetros. De los experimentos realizados cabe destacar lo siguiente:

- Medición de las masas: Para ello se hizo uso de un peso electrónico cortesía del Dpto. Ingeniería mecánica y de los materiales de la Universidad de Sevilla.
- Medición de las distintas longitudes.
- Estimación de momentos de inercia: Para ello se ha hecho uso de un péndulo de torsión cedido por el Dpto. de Física Aplicada III de la Universidad de Sevilla.
- Medición de las características estáticas de los rotores: Para ello se hizo uso de la tarjeta de adquisición de datos, de los encoders, del Interfaz Gráfico del TRMS en Matlab, y de unos dinamómetros.

Estos experimentos serán tratados con detalle en apartados posteriores.

Vía AutoCad

El sistema ha sido reproducido en Autocad (véase figura 13). A partir del dibujo se puede obtener información de las dimensiones de cada sólido. La utilidad de emplear Autocad es que a partir del dibujo realizado por capas de materiales, es decir, capas de densidad distinta, se puede estimar el peso, los centros de gravedad y los momentos de inercia de cada uno de los sólidos respecto al punto y ejes que se quieran, bien principales de inercia, bien ejes situados en posiciones de simetría geométrica. Esta información será contrastada con los datos obtenidos en el laboratorio al hacer uso de un peso electrónico y de un péndulo de torsión (empleado para la determinación unidireccional de momentos de inercia).

Vía MapleV

Una vez obtenidos los parámetros se ha hecho uso de otra herramienta de cálculo, MapleV, con la que se han obtenido estimaciones de peso y se han calculado las matrices de momentos de inercia totales correspondientes a sólidos de distinta densidad.

OBTENCIÓN DE MOMENTOS DE INERCIA VÍA EXPERIMENTAL

La obtención de momentos de inercia respecto a un eje, se ha llevado a cabo mediante el uso de un péndulo de torsión.

El péndulo de torsión consiste en una espiral arrollada en torno a un eje giratorio, y permite calcular momentos de inercia respecto a ese eje giratorio. El momento τ de la fuerza recuperadora ejercida por un péndulo de torsión cuando sobre él se imponen pequeñas deformaciones de ángulo θ viene dado por

$$\tau = -D\theta \quad (14)$$

donde D es la constante recuperadora del péndulo de torsión. Y en el caso de un eje principal de inercia.

$$\tau = I \cdot \ddot{\theta} \quad (15)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior e integrando se obtiene como solución un movimiento armónico simple de período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{ep}}{D}} \quad (16)$$

Despejando el momento de inercia se obtiene:

$$I = \frac{D}{(2\pi)^2} \cdot T^2$$

Según esta fórmula, basta calcular el período de oscilación del cuerpo en torno al eje del péndulo de torsión para calcular su inercia respecto a este eje.

En primer lugar, hay que calcular la constante D del péndulo de torsión. Para ello se hará uso de una varilla de longitud L y de un dinamómetro. Sabiendo que el par ejercido sobre el péndulo es

$$-\tau = F \cdot L = D \cdot \theta \quad \Rightarrow \quad D = \frac{F \cdot L}{\theta}$$

La siguiente tabla muestra la determinación de D.

Tabla 2. Cálculo de D

L	θ (rad)	F(N)	D	Dmedia
0.281	$\frac{3\pi}{4}$	0.32	0.029	0.026
0.281	$\frac{3\pi}{4}$	0.35	0.025	
0.281	$\frac{3\pi}{4}$	0.39	0.023	
0.29	π	0.26	0.024	

Mediante este método se han estimado los momentos de inercia de los diferentes cuerpos respecto de los ejes de giro principales, obteniéndose la tabla 3.

OBTENCIÓN DE PARÁMETROS FÍSICOS VÍA AUTOCAD Y MAPLEV

A partir de la información obtenida en el laboratorio sobre longitudes, masas y momentos de inercia

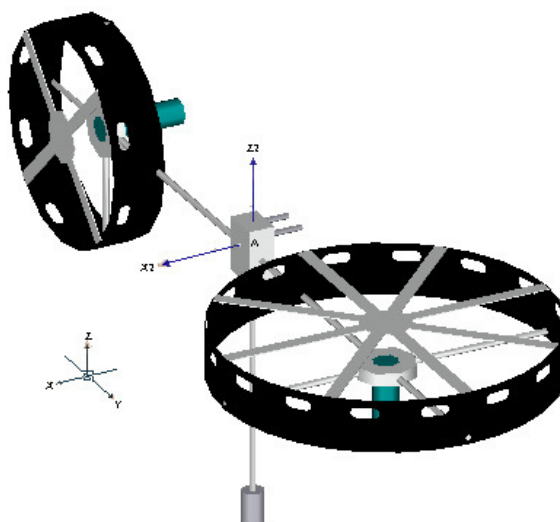


Figura 13. Vista General 3D

Tabla 3. Momentos de inercia

Cuerpo	$T_m(s)$	$I(kg \cdot m^2)$
Sólido 0	0,64	$I_z = 2,7 \cdot 10^{-4}$
Sólido 2	10,48	$I_x = 7,2 \cdot 10^{-2}$
Sólido 2	3,69	$I_y = 9,0 \cdot 10^{-3}$
Sólido 3	0,50	$I_z = 1,6 \cdot 10^{-4}$
Sólido 4	0,31	$I_x = 6,3 \cdot 10^{-5}$

en torno a un eje se determinan las siguientes magnitudes.

1.) Masas, Volúmenes
2.) Centros de Gravedad
3.) Tensores de Inercia

Tabla 4. Volúmenes y pesos

Elemento	Vol.(mm ³)	Peso(grf)
Varilla contrapeso	8295.77	22.75
Cilindro contrapeso	9395.33	67.64
Rejilla de cola	6703.5	18.17
Rejilla principal	16771.5	45.45
Soporte principal	35261.96	95.56
Soporte de cola	29734.50	80.58
Parachoques de cabeceo	2827.43	22.22
Caja de unión	40017.2	108.45
Protector rotor principal	32959.62	105.95
Protector rotor cola	21514.80	69.55
Varilla horizontal	16632.11	45.07
Motor	54474.45	138
Total Sólido 2		957.39

PESO, VOLUMEN

En esta sección se calculan las densidades medias de los distintos cuerpos, atendiendo a las masas obtenidas en el laboratorio y a los volúmenes estimados haciendo uso de AutoCad. A partir de ellas se estimarán los pesos de aquellos objetos que no hayan podido pesarse. Posteriormente, se calculará la masa total del Sólido 2 haciendo uso de estas estimaciones y se comparará con la masa real medida en el laboratorio.

En la tabla 4 se muestran los valores obtenidos.

CENTRO DE GRAVEDAD DEL SÓLIDO 2 VISTO DESDE A

Referido al punto A del cubo, origen del sistema de coordenadas del sólido 2, y que corresponde al punto de intersección entre el eje de rotación X_0 y el eje de la varilla del contrapeso. La figura 13 muestra la situación de los ejes.

Tabla 5. Centro de gravedad sólido 2

Capa	x(mm)	y(mm)	z(mm)
Aluminio mate	2.20	12.38	-11.34
Aluminio pulido	0.01	60.84	-10.00
Acero	-3.59	0	-189.62
Motores	-16.00	-12.50	-26.00
PVC	7.01	42.65	0.56
Sólido 2 (total)	-2.85	12.74	-30.03

La expresión con la que se han calculado los centros de gravedad viene dada por

$$CG = \frac{\sum_{i=1}^n G_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

donde G_i es el centro de gravedad de la capa i y w_i su peso.

Como comprobación experimental, se ha empleando el encoder del equipo, obteniéndose que el cociente (y/z) del centro de gravedad debe ser del orden de $\frac{y}{z} = \tan(23^\circ)$, que es justamente lo que se obtiene.

TENSOR DE INERCIA DEL SÓLIDO 2 VISTO DESDE A

En este punto se calcula el tensor de inercia del sólido 2 total referido al punto A del cubo. Para ello, se han obtenido los tensores de inercia de cada una de las capas de material mediante AutoCad, asignándole a cada una de ellas densidad unidad. AutoCad, expresa el resultado de cada inercia en valores de longitud, por lo que se tendrá que multiplicar por un coeficiente de escala que será precisamente su densidad.

Tensor de Inercia de la Capa de Aluminio Mate referido a A en ejes 2

$$J_{Almate} = \begin{bmatrix} 0,51 \cdot 10^{10} & -0,78 \cdot 10^8 & -0,28 \cdot 10^7 \\ -0,78 \cdot 10^8 & 0,33 \cdot 10^9 & 0,16 \cdot 10^9 \\ -0,28 \cdot 10^7 & 0,16 \cdot 10^9 & 0,50 \cdot 10^{10} \end{bmatrix}$$

Tensor de Inercia de la Capa de Acero referido a A en ejes 2

$$J_{Acero} = \begin{bmatrix} 0,59 \cdot 10^9 & 0 & -482077,39 \\ 0 & 0,59 \cdot 10^9 & 0 \\ -482077,39 & 0 & 0,23 \cdot 10^8 \end{bmatrix}$$

Tensor de Inercia de la Capa de Aluminio Pulido referido a A en ejes 2

$$J_{Alpul} = \begin{bmatrix} 0,19 \cdot 10^{10} & 31855,72 & -1899,12 \\ 31855,72 & 0,11 \cdot 10^9 & -0,14 \cdot 10^8 \\ -1899,12 & -0,14 \cdot 10^8 & 0,20 \cdot 10^{10} \end{bmatrix}$$

Tensor de Inercia de la Capa de Motores referido a A en ejes 2

$$J_{motor} = \begin{bmatrix} 0,48 \cdot 10^{10} & 0,30 \cdot 10^9 & 0,11 \cdot 10^8 \\ 0,30 \cdot 10^9 & 0,13 \cdot 10^9 & -0,27 \cdot 10^9 \\ 0,11 \cdot 10^8 & -0,27 \cdot 10^9 & 0,48 \cdot 10^{10} \end{bmatrix}$$

Tensor de Inercia de la Capa de PVC referido a A en ejes 2

$$J_{pvc} = \begin{bmatrix} 0,43 \cdot 10^{10} & -0,10 \cdot 10^9 & -0,38 \cdot 10^7 \\ -0,10 \cdot 10^9 & 0,52 \cdot 10^9 & 0,12 \cdot 10^9 \\ -0,38 \cdot 10^7 & 0,12 \cdot 10^9 & 0,46 \cdot 10^{10} \end{bmatrix}$$

A continuación se va a calcular el tensor de inercia total. Para ello se tendrán que sumar los distintos tensores multiplicándolos por la densidad de la capa a la que representan.

Tensor de Inercia Total del Sólido 2 referido a A en ejes 2

$$J_{Sólido2} = \begin{bmatrix} 0,62 \cdot 10^{14} & 0,98 \cdot 10^{12} & 0,32 \cdot 10^{11} \\ 0,98 \cdot 10^{12} & 0,82 \cdot 10^{13} & -0,56 \cdot 10^{12} \\ 0,32 \cdot 10^{11} & -0,56 \cdot 10^{12} & 0,58 \cdot 10^{14} \end{bmatrix}$$

Este tensor de inercia está expresado en $Kg \cdot \frac{mm^5}{m^3}$. Para expresarlo en $Kg \cdot m^2$ se multiplica por 10^{-15} , cambiando la notación para evitar confusiones.

Tensor de Inercia del Sólido 2 respecto de A

$$\bar{I}_2^A = \begin{bmatrix} 0,062 & 0,00098 & 0,000032 \\ 0,00098 & 0,0082 & -0,00056 \\ 0,000032 & -0,00056 & 0,058 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$$

Tabla 6. Parámetros del Sólido 0

Dimensiones (mm)	65	30	40
Masa (Kg)	0.26		
M. Inercia $I_z (kg \cdot m^2)$	0.00027		

ANEXO B

RESUMEN DE PARÁMETROS

Sólido 0: Paralelepípedo con giro en Z

Centro de gravedad

$$OG]_0^o := \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} mm$$

Expresado respecto a los ejes 0 con origen en o, ligados al eje libre vertical.

Velocidad angular

$$w_{0I}]_0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} rad/s$$

Sólido 2: Esqueleto Principal

Punto A

$$OA]_0^o := \begin{bmatrix} 0,055 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m$$

Masa

$$M_{2t} := 0,9677 kg$$

Matriz de paso de ejes 0 a ejes 2

$$P_{02} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\xi & s\xi \\ 0 & -s\xi & c\xi \end{bmatrix}$$

Tensor de Inercia del Sólido 2 respecto a A

$$\bar{I}_2^A := \begin{bmatrix} 0,062 & 0,00098 & 0,000032 \\ 0,00098 & 0,0078 & -0,00056 \\ 0,000032 & -0,00056 & 0,058 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$$

Velocidad angular del sólido 2 visto desde 1 y expresado en ejes 0

$$w_{2I}]_0 := \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Velocidad del punto A del sólido 2 visto desde 1 y expresado en ejes 0

$$V_{2I}^A]_0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0,055\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} m$$

Centro de Gravedad del sólido 2, referido a ejes 2 con origen en A

$$AG_{2t}]_2 := \begin{bmatrix} -0,0028 \\ 0,013 \\ -0,030 \end{bmatrix} m$$

Sólido 3: Hélice Principal

Masa

$$M_{h3} := 0,0556 \text{ kg}$$

Centro de Gravedad Q referido a ejes 2 con origen en A .

$$AQ_{h3}|_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0,25 \\ 0,0056 \end{bmatrix} m$$

Matriz de paso de ejes 2 a ejes 3

$$P_{23} := \begin{bmatrix} c\gamma & s\gamma & 0 \\ -s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tensor de Inercia del Sólido 3 respecto a Q

$$\bar{I}_{h3}^Q|_3 := \begin{bmatrix} 0,000018 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00011 & 0 \\ 0 & 0 & 0,00017 \end{bmatrix} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Velocidad angular del sólido 3 visto desde 1 y expresado en ejes 2

$$wh_{31}|_2 := \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ s\xi\dot{\theta} \\ c\xi\dot{\theta} + \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

Sabiendo que el eje $Z3$ es paralelo al $Z2$, y que $Vh_{32}^Q = 0$, entonces:

Velocidad del punto Q del sólido 3 visto desde 1 y expresado en ejes 2

$$Vh_{31}^Q|_2 := Vh_{21}^Q|_2 = V_{21}^A|_2 + w_{21}|_2 \wedge AQ_{h3}|_2$$

Sólido 4: Hélice de Cola

Masa

$$M_{h4} := 0,02649 \text{ kg}$$

Centro de Gravedad P referido a ejes 2 con origen en A

$$AP_{h4}|_2 := \begin{bmatrix} 0,012 \\ -0,275 \\ -0,010 \end{bmatrix} m$$

Matriz de Paso de ejes 2 a ejes 4

$$P_{24} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & s\alpha \\ 0 & -s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}$$

Tensor de Inercia del Sólido 4 respecto a P

$$\bar{I}_{h4}^P := \begin{bmatrix} 0,000063 & 0 & 0 \\ 0 & 0,000011 & 0 \\ 0 & 0 & 0,000034 \end{bmatrix} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Velocidad angular del sólido 4 visto desde 1 y expresado en ejes 0

$$wh_{41}|_0 := \begin{bmatrix} \dot{\alpha} + \dot{\xi} \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Sabiendo que $V_{h42}^P = 0$ y que p coincide con el centro de gravedad de $h4$.

Velocidad del punto p del sólido 4 visto desde 1 y expresado en ejes 2

$$V_{h41}^P|_2 := V_{h21}^P|_2 = V_{21}^A|_2 + w_{21}|_2 \wedge AP_{h4}|_2$$

LAGRANGIANA

Calculando la energía cinética y potencial de cada cuerpo según (4), y sustituyendo los parámetros correspondientes, se ha obtenido la Lagrangiana del sistema completo, resultando:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (4,8 \cdot 10^{-5} \cos^2 \gamma + 5,5 \cdot 10^{-3} + 2,3 \cdot 10^{-5} \cos^2 \alpha \cos^2 \xi \\ & - 4,8 \cdot 10^{-5} \cos^2 \gamma \cos^2 \xi - 5,7 \cdot 10^{-6} \sin 2\xi \sin 2\alpha + 0,028 \cos^2 \xi \\ & - 1,1 \cdot 10^{-5} \cos^2 \alpha - 7,1 \cdot 10^{-4} \sin \xi \cos \xi) \dot{\theta}^2 + \\ & (-9,5 \cdot 10^{-5} \cos \gamma \sin \gamma \sin \xi + 2,7 \cdot 10^{-5} \sin \xi \\ & + 1,6 \cdot 10^{-3} \cos \xi) \dot{\theta} \dot{\xi} + 1,6 \cdot 10^{-4} \cos \xi \dot{\gamma} \dot{\theta} \\ & + (3,4 \cdot 10^{-2} - 4,8 \cdot 10^{-5} \cos \gamma^2) \dot{\xi}^2 + 6,3 \cdot 10^{-5} \dot{\alpha} \dot{\xi} \\ & + 3,2 \cdot 10^{-5} \dot{\alpha}^2 + 8,2 \cdot 10^{-5} \dot{\gamma}^2 + (2,8 \cdot 10^{-1} \cos \xi - 1,9 \cdot 10^{-1} \sin \xi) \end{aligned}$$

donde pueden observarse términos dependientes de ξ que multiplican a términos cuadráticos de velocidades $\dot{\theta}^2$, $\dot{\xi}^2$, $\dot{\alpha}^2$, $\dot{\gamma}^2$ y cruzados $\dot{\theta} \dot{\xi}$, $\dot{\gamma} \dot{\theta}$, $\dot{\alpha} \dot{\xi}$.