

Un modelo unificado de resistencia a flexión y cortante de vigas esbeltas de hormigón armado bajo cargas puntuales y repartidas

A unified shear-flexural strength model for slender reinforced concrete beams under concentrated and distributed loads

Antonio Marí ^{a,*}, Antoni Cladera ^b, Jesús Bairán ^a, Eva Oller ^a y Carlos Ribas ^b

^a Departamento de Ingeniería de la Construcción. Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España

^b Departament de Física. Universitat de les Illes Balears, Palma de Mallorca, España

Recibido el 7 de julio de 2014; aceptado el 6 de noviembre de 2014

Disponible en Internet el 18 de febrero de 2015

Resumen

Se presenta un modelo mecánico para la predicción de la resistencia a cortante-flexión de vigas esbeltas de hormigón armado sometidas a cargas puntuales y/o repartidas. El modelo incorpora las contribuciones a la resistencia a cortante de la cabeza comprimida, del alma fisurada y de las armaduras longitudinales y transversales. Se considera que la rotura tiene lugar en la cabeza comprimida no fisurada de hormigón, sometida a un estado biaxial de tensiones, cuando se alcanza la envolvente de Kupfer, habiendo plastificado las armaduras transversales. Basándose en consideraciones de equilibrio y en una distribución de tensiones en ELU para la cabeza comprimida, se proponen ecuaciones sencillas y directas para dimensionamiento y comprobación. Las predicciones del modelo se han comparado con más de 1300 ensayos a cortante de vigas, obteniéndose muy buenos resultados. El modelo proporciona una explicación física del comportamiento a cortante, lo que junto a su sencillez y precisión, le convierte en una herramienta muy útil para el proyecto basado en prestaciones.

© 2014 Asociación Científico-Técnica del Hormigón Estructural (ACHE). Publicado por Elsevier España, S.L.U. Todos los derechos reservados.

Palabras clave: Modelo mecánico; resistencia a cortante; hormigón armado; carga puntual; carga repartida

Abstract

A mechanical model is presented for shear-flexural strength of slender reinforced concrete beams under concentrated or distributed loads. The model incorporates the shear transferred by the un-cracked concrete head, by the cracked web and by the longitudinal and transverse reinforcements. Failure is assumed to occur at the un-cracked concrete zone, subjected to a biaxial stress state, when the Kupfer failure envelope is reached and the stirrups are yielded. A general procedure and simplified direct design equations are derived taking into account equilibrium and a given stress distribution at ultimate limit states (ULS). The model predictions have been compared with the results of more than 1300 tests performed on simply supported beams, having obtained very good agreement. Because of the simplicity, accuracy, and the physical insight of the problem provided by the model, it may be very useful for rational performance-based design of concrete structures in practice.

© 2014 Asociación Científico-Técnica del Hormigón Estructural (ACHE). Published by Elsevier España, S.L.U. All rights reserved.

Keywords: Mechanical model; shear strength; reinforced concrete; point load; distributed load.

1. INTRODUCCIÓN

* Autor para correspondencia.

Correo electrónico: antonio.mari@upc.edu (A. Marí).

La complejidad del comportamiento frente a esfuerzo cortante es enorme, debido, entre otros aspectos, a la anisotropía generada por la fisuración inclinada, a los distintos mecanismos resistentes que se generan, a la adherencia imperfecta entre

Significado de las variables	
<i>a</i>	luz a cortante
<i>b</i>	anchura de la sección transversal
<i>d</i>	canto útil de la sección transversal
<i>d</i> _{max}	tamaño máximo del árido
<i>f</i> _{cc}	resistencia a compresión uniaxial del hormigón
<i>f</i> _{ck}	resistencia característica a compresión del hormigón ensayado en probeta cilíndrica
<i>f</i> _{cm}	valor medio de la resistencia a compresión del hormigón ensayado en probeta cilíndrica
<i>f</i> _{ct}	resistencia a tracción uniaxial del hormigón
<i>f</i> _{ctm}	valor medio de la resistencia a tracción del hormigón
<i>f</i> _{yw}	límite elástico de la armadura a cortante
<i>h</i>	canto total de la sección transversal
<i>l</i> _{sw}	longitud de la fisura
<i>l</i> _w	longitud a lo largo de la fisura en donde se extienden las tensiones de tracción
<i>n</i>	coeficiente de equivalencia (<i>E</i> _s / <i>E</i> _c)
<i>n</i> _b	número de barras de refuerzo de la armadura longitudinal
<i>s</i>	coordenada longitudinal de la viga medida desde el eje del apoyo
<i>s</i> _{cr}	coordenada de la sección donde se inicia la fisura crítica
<i>s</i> _{mθ}	separación media de las fisuras diagonales
<i>s</i> _t	separación longitudinal de la armadura a cortante
<i>s</i> _u	coordenada longitudinal de la sección crítica a cortante
<i>v</i> _c	cortante adimensional resistido por la cabeza comprimida de hormigón
<i>v</i> _d	cortante adimensional de cálculo
<i>v</i> _l	cortante adimensional resistido por la armadura longitudinal
<i>v</i> _s	cortante adimensional resistido por la armadura transversal
<i>v</i> _u	esfuerzo cortante adimensional que agota una viga
<i>v</i> _{u,0}	esfuerzo cortante adimensional de vigas y losas unidireccionales sin armadura transversal
<i>v</i> _w	cortante adimensional resistido a través de la fisura
<i>w</i>	ancho de fisura
<i>w</i> _{max}	ancho máximo de fisura
<i>x</i>	profundidad del eje neutro
<i>x</i> _w	proyección vertical de <i>l</i> _w
<i>y</i>	coordenada vertical medida desde la fibra superior de la sección transversal de hormigón
<i>z</i>	brazo mecánico de las fuerzas internas
<i>A</i> _s	área de la armadura longitudinal
<i>A</i> _{sw}	área por unidad de longitud de la armadura transversal
<i>C</i>	fuerza de compresión en la cabeza comprimida de la viga
<i>E</i> _c	módulo de elasticidad del hormigón
<i>E</i> _s	módulo de elasticidad del acero
<i>G</i> _c	módulo de deformación a cortante de la cabeza comprimida de hormigón
<i>G</i> _f	energía de fractura del hormigón
<i>I</i> _s	módulo de inercia de una barra de refuerzo longitudinal
<i>K</i> _λ	constante
<i>M</i>	momento flector
<i>M</i> _{cr}	momento flector de fisuración
<i>R</i> _t	factor reductor de la resistencia a tracción por efecto de las compresiones en la dirección perpendicular
<i>S</i>	fuerza de compresión en la biela
<i>T</i>	fuerza de tracción en la armadura longitudinal
<i>V</i>	esfuerzo cortante
<i>V</i> _c	cortante resistido por la cabeza comprimida de hormigón
<i>V</i> _d	esfuerzo cortante de cálculo
<i>V</i> _{exp}	valor experimental del esfuerzo cortante de rotura
<i>V</i> _l	cortante resistido por la armadura longitudinal
<i>V</i> _{pred}	valor predicho del esfuerzo de cortante de rotura
<i>V</i> _s	cortante resistido por la armadura transversal
<i>V</i> _u	resistencia a cortante
<i>V</i> _{u,0}	resistencia a cortante de vigas y losas unidireccionales sin armadura transversal
<i>V</i> _w	cortante resistido a través de la fisura
<i>α</i>	ángulo de inclinación de la armadura transversal o de los tirantes
<i>δ</i> _m	componente vertical de la abertura de la fisura inclinada
<i>δ</i> _v	deslizamiento en la dirección vertical debido a la deformación de cortante de la cabeza comprimida
<i>ϕ</i>	diámetro de la armadura de refuerzo longitudinal
<i>ε</i> _{ct,cr}	deformación del hormigón al inicio de la macrofisuración a tracción
<i>ε</i> _{ct,u}	deformación máxima a tracción correspondiente a tensión residual nula
<i>ε</i> _s	deformación de la armadura longitudinal
<i>ε</i> _{sw}	deformación de la armadura longitudinal perpendicular a la fisura inclinada
<i>ε</i> _{xx}	deformación axial de la armadura longitudinal
<i>ζ</i>	factor de efecto tamaño
<i>γ</i>	distorsión
<i>λ</i>	distancia vertical desde el eje neutro
<i>θ</i>	ángulo de inclinación de la biela
<i>μ</i>	momento flector adimensional (<i>M</i> /(<i>f</i> _{ct} · <i>b</i> · <i>d</i>))
<i>μ</i> _{cr}	momento flector de fisuración adimensional (<i>M</i> _{cr} /(<i>f</i> _{ct} · <i>b</i> · <i>d</i>))
<i>ξ</i>	profundidad adimensional del eje neutro (<i>x</i> / <i>d</i>)
<i>ξ</i> _w	proyección vertical adimensional de <i>l</i> _w (<i>x</i> _w / <i>d</i>)
<i>ρ</i>	cuantía de armadura longitudinal
<i>ρ</i> _w	cuantía de armadura transversal
<i>σ</i> ₁ , <i>σ</i> ₂	tensiones principales

σ_{st}	tensión de tracción en la armadura transversal
σ_x	tensión normal en la dirección longitudinal
$\sigma_{x,max}$	tensión normal máxima en la dirección longitudinal
σ_y	tensión normal en la dirección transversal
σ_w	tensión normal a la fisura inclinada en el alma
τ	tensión tangencial
τ_{max}	tensión tangencial máxima
τ_λ	tensión tangencial para $y = \lambda \cdot x$

hormigón y armaduras y a la fragilidad de la rotura, que conducen, entre otros, al efecto tamaño.

A fin de comprender este comportamiento tan complejo se han realizado numerosas investigaciones experimentales cuyas referencias pueden encontrarse en [1,2]. Por otra parte se han desarrollado modelos numéricos sofisticados para predecir la resistencia a cortante [3–10], si bien su utilización en la ingeniería cotidiana es escasa debido al esfuerzo y coste computacional requeridos. Por ello, en su momento se desarrollaron expresiones semi-empíricas, ajustadas a resultados experimentales, algunas de las cuales fueron incluidas en códigos estructurales como el Eurocódigo 2 (EC2) [11], o el ACI-318-08 [12]. Sin embargo, estas expresiones no cubren algunos casos que se dan en la práctica o no tienen en cuenta la influencia de diversos aspectos, como la forma de la sección [13], debiendo ser adaptadas de forma artificial. Por otra parte se han desarrollado nuevos materiales (hormigones de alta resistencia, auto-compactantes, con fibras, reciclados, armaduras de materiales compuestos...), para los cuales no fueron derivadas tales expresiones. Lo cierto es que al predecir los resultados de ensayos sobre vigas biapoyadas de hormigón convencional, se obtienen dispersiones considerables y valores, en general, muy conservadores. Además, estas formulaciones no proporcionan, en general, información suficiente sobre la física del problema, que permita resolver racionalmente casos no estandarizados. A título de ejemplo se plantean aquí algunas cuestiones que no encuentran una respuesta específica mediante los planteamientos normativos considerados (EHE-08 [14], el EC2 [11] o el Código ACI-318-08 [12]):

- ¿Es igual la contribución del cortante resistido por el hormigón en una viga con armadura transversal que sin ella? ¿Afectan a esta contribución por igual un esfuerzo axil de compresión que otro de tracción?
- ¿Funcionan igual a cortante las zonas de apoyos extremos y las de apoyos intermedios en una viga continua?
- ¿Resiste igual cortante una sección en T que una sección rectangular con igual canto, cuantía de armadura longitudinal y transversal e igual ancho del alma?
- ¿Cómo influye el tipo de carga (concentrada o repartida) en la resistencia a cortante?
- ¿Qué papel juegan la resistencia a tracción o la retracción del hormigón en la respuesta a cortante?
- En piezas pretensadas, ¿qué influencia tiene la excentricidad del pretensado en la resistencia a cortante? ¿Qué canto útil hay

que tomar para el cálculo de V_{cu} o V_{u2} según EHE-08 [14] y el EC2 [11]?

Estas y otras muchas cuestiones ponen de manifiesto la necesidad de disponer de modelos conceptuales que, además de predecir correctamente los resultados experimentales, tengan sentido físico y permitan adaptarse a nuevas situaciones. Ciertamente, existen modelos de este tipo, si bien las expresiones por ellos proporcionadas no son lo suficientemente prácticas de cara al proyecto cotidiano o suficientemente generales. Entre ellos cabe destacar el modelo de Reineck [15], los modelos simplificados basados en la teoría del campo modificado de compresiones [16], en la teoría de la fisura crítica [17], la analogía del ensayo de tracción indirecta [18], las teorías basadas en la resistencia de la cabeza comprimida [19–21], métodos basados en la plasticidad [22] e incluso modelos que incorporan el efecto de la fatiga [23]. Todos estos métodos predicen con razonable aproximación la carga última, a pesar de estar basados en mecanismos resistentes distintos y de utilizar expresiones distintas con parámetros no siempre iguales. Ello sugiere que en función del nivel de carga, la contribución de cada mecanismo resistente puede ser distinta, produciéndose, ante la disminución de capacidad de un mecanismo, redistribuciones súbitas de tensiones hacia el resto.

En este artículo se presenta un modelo de resistencia a cortante-flexión de elementos esbeltes de hormigón armado, basado en la mecánica de las estructuras de hormigón y en la observación experimental del comportamiento de vigas bajo carga creciente hasta rotura. El modelo es válido para vigas biapoyadas, con sección rectangular, sin y con armadura de cortante, sometidas a cargas puntuales y/o repartidas y proporciona expresiones finales muy simples para el diseño y comprobación de estructuras. En este artículo se presentan, así mismo, las posibilidades de extensión del modelo a diferentes situaciones de carga, apoyos, geometría seccional y tipos de hormigón y armaduras, como es el caso, ya estudiado por los autores, de vigas de hormigón armadas con barras de polímeros reforzados con fibras (FRP) [24], vigas con sección en T, vigas continuas, vigas pretensadas, vigas con canto constante o con hormigón reforzado con fibras.

2. PRINCIPIOS DEL MODELO PROPUESTO

2.1. Comportamiento observado y mecanismos resistentes movilizados

En la mayoría de vigas solicitadas a cortante bajo cargas puntuales, en las que la relación a/d es mayor igual a 2,5, siendo a la luz de cortante y d el canto útil, las fisuras de cortante se originan a partir de fisuras de flexión. Estas fisuras nacen en la cara traccionada, perpendiculares al eje de la viga, y al penetrar en el alma se inclinan como consecuencia de la presencia de tensiones tangenciales. Conforme la carga aumenta, el daño se concentra en una fisura (llamada fisura crítica) la cual se desarrolla hasta alcanzar aproximadamente el eje neutro en flexión de la sección fisurada. Esta situación es estable hasta que, con el aumento de la carga, se desarrolla una segunda rama que conecta



Figura 1. Fisura crítica. Con un círculo se señala la segunda rama de la fisura crítica.

el final de la primera rama con el punto de aplicación de la carga. Además, la armadura longitudinal puede sufrir deslizamientos respecto del hormigón, fruto de las fuertes tensiones tangenciales, produciendo fisuras longitudinales cerca de su zona de anclaje (fig. 1).

Se acepta generalmente que la resistencia a cortante de una viga consta de las siguientes contribuciones: 1) la cabeza de compresión, cuya capacidad para transferir tensiones tangenciales aumenta con el nivel de compresión axial; 2) el alma fisurada, a lo largo de cuyas fisuras se resisten tensiones tangenciales por fricción y tensiones residuales de tracción cuyas componentes verticales contribuyen a resistir cortante pero que van disminuyendo conforme la fisura crece en anchura; 3) la

armadura longitudinal, capaz de resistir una cierta cizalladura (efecto pasador), pero cuya capacidad está limitada por la resistencia al empuje al vacío del recubrimiento, siendo mayor para el caso de piezas con armadura transversal; 4) la armadura transversal mediante su contribución directa al equilibrio de fuerzas verticales, pero también al confinar verticalmente la cabeza de compresión y al limitar el ancho de fisuras, aumentando así la resistencia del alma.

De forma simplificada, para vigas sin armadura de cortante se puede suponer que el mecanismo resistente puede asimilarse a una celosía formada por el cordón superior (cabeza de compresión de hormigón), cordón inferior (armadura de tracción), bielas inclinadas de hormigón y tirantes inclinados también de hormigón [25], que pueden cruzar las fisuras hasta cierto nivel de abertura de las mismas, tal como indica la figura 2. Este fenómeno se explica por el carácter tridimensional de la microfisuración, que permite transferencia de tracciones a través de las fisuras, cuyo valor puede aproximarse mediante la mecánica de la fractura, como se verá más adelante.

Estos tirantes, que representan la resultante de las tensiones residuales a través de la fisura y de las tensiones de fricción a lo largo de la misma, contribuyen a resistir el cortante junto con el cordón comprimido, que tiene una cierta inclinación, y se equilibran en su parte inferior con las bielas de hormigón y con la armadura longitudinal. La componente vertical del tirante es igual y opuesta a la de la biela, mientras que la suma de ambas componentes horizontales debe ser equilibrada por el incremento de fuerza en la armadura longitudinal (fig. 2).

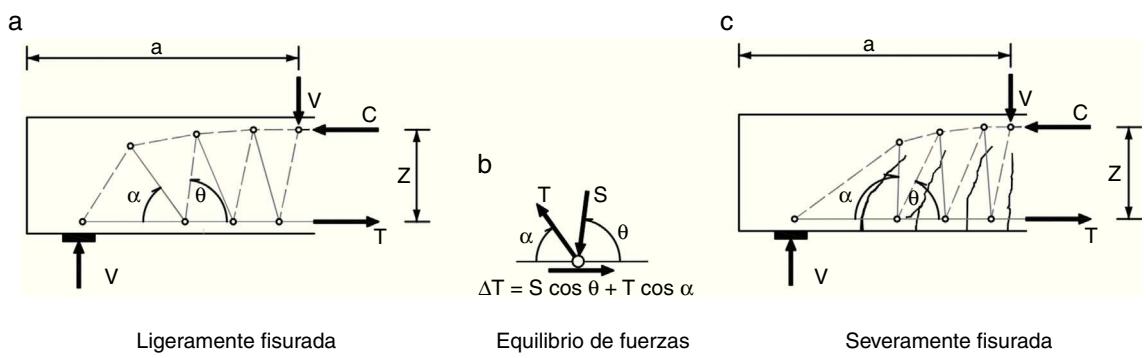


Figura 2. Modelos de bielas y tirantes para cargas moderadas y para cargas elevadas.

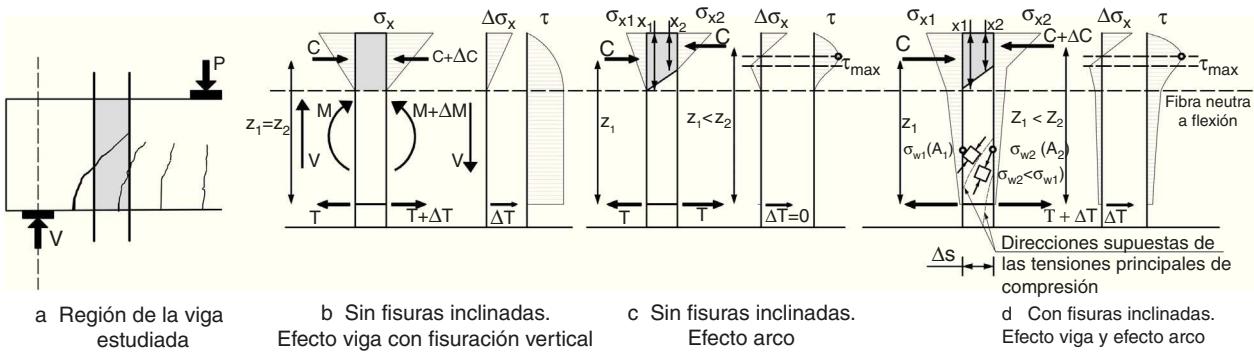


Figura 3. Distribución de tensiones tangenciales en una sección de una viga con fisuración diagonal.

Conforme la carga aumenta, la fisura crítica se va abriendo y va perdiendo capacidad para transferir tensiones residuales y friccionales, especialmente en la zona traccionada de la viga, donde las deformaciones longitudinales son mayores. Por ello, la inclinación de los tirantes de hormigón varía, buscando la zona más cerrada de la fisura, y su fuerza disminuye conforme la fisura se va abriendo, afectando, por equilibrio vertical del nudo inferior, también al valor de la fuerza en la biela, y por equilibrio horizontal al incremento de tracción en la armadura longitudinal ΔT . Ello conduce a la necesidad de que el par comprimido se incline para resistir el cortante que deja de resistir el tirante, produciéndose así un cierto efecto arco. En consecuencia, la distribución de tensiones tangenciales en una sección con fisuración inclinada, será como la esquematizada en la figura 3d, es decir, una combinación de la distribución correspondiente a un mecanismo de viga puro (fig. 3b) y a un mecanismo de arco puro (fig. 3c). Además, el deslizamiento de la armadura longitudinal también podría disminuir el ΔT , potenciando el efecto arco [26].

La figura 4 muestra esquemáticamente una curva carga-desplazamiento de una viga crítica a cortante y la distribución de tensiones tangenciales asociadas a la sección donde termina la primera rama de la fisura crítica. Se observa cómo las tensiones van migrando hacia la cabeza de compresión, conforme aumenta la carga. Este hecho ha sido previamente mostrado teóricamente mediante modelos numéricos [5,8] verificados experimentalmente.

2.2. Hipótesis del modelo

- 1) En rotura, el cortante y el momento son resistidos por la zona de hormigón no fisurada, por los cercos que cosen la fisura diagonal, por las tensiones residuales que atraviesan fisura y por la armadura longitudinal (fig. 5).
- 2) Se consideran las siguientes distribuciones de tensiones en la cabeza comprimida (fig. 6): lineal (σ_x), parabólica (τ) y constante (σ_y) a partir de una cierta profundidad para tener

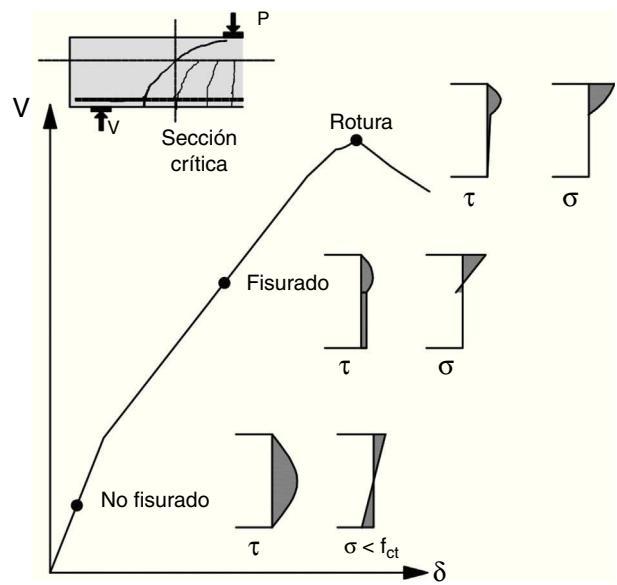


Figura 4. Evolución de tensiones tangenciales en función del nivel de carga.

en cuenta el anclaje de la armadura transversal y su carácter discreto.

- 3) Existe una fisura crítica, donde se concentra el daño, que nace a partir de una fisura de flexión y se inclina en el alma hasta llegar al eje neutro de flexión. Esta fisura tiene una primera rama, estable, cuya proyección horizontal se considera igual a $\beta d = 0,85d$, valor adoptado fruto de la observación experimental.
- 4) La profundidad de la cabeza, x , se considera igual a la profundidad de la fibra neutra en flexión pura, calculada con $f_{ct} = 0$.
- 5) La cabeza de compresión se encuentra sometida a un estado biaxial de tensiones. El fallo se produce cuando las tensiones alcanzan la superficies de rotura de Kupfer [27] (fig. 7).
- 6) Se considera que la armadura longitudinal se encuentra perfectamente anclada y que no hay deslizamiento relativo entre hormigón y acero.

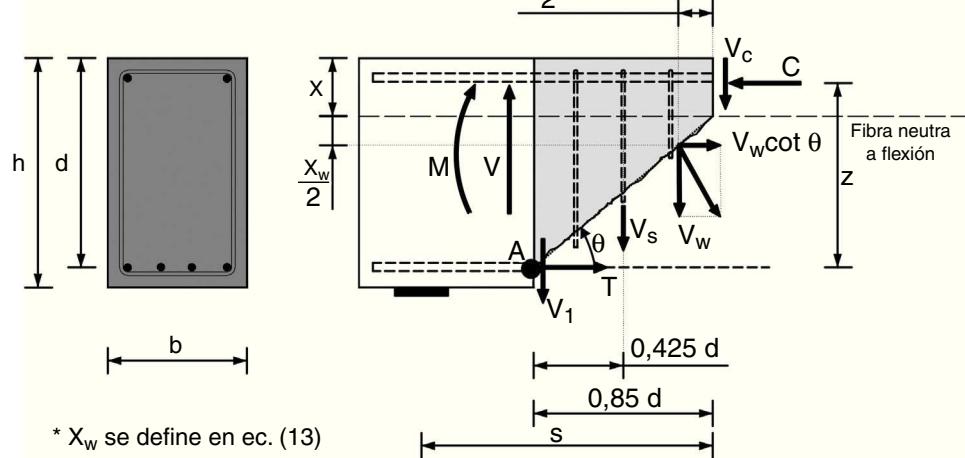


Figura 5. Mecanismos resistentes a cortante y flexión.

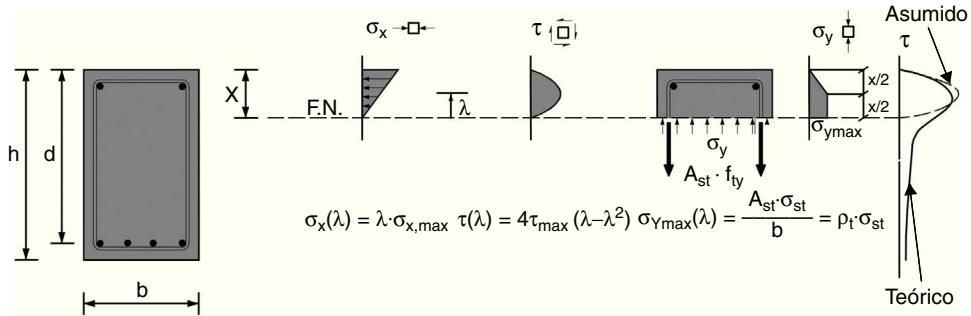


Figura 6. Distribuciones de tensiones en la cabeza de compresión.

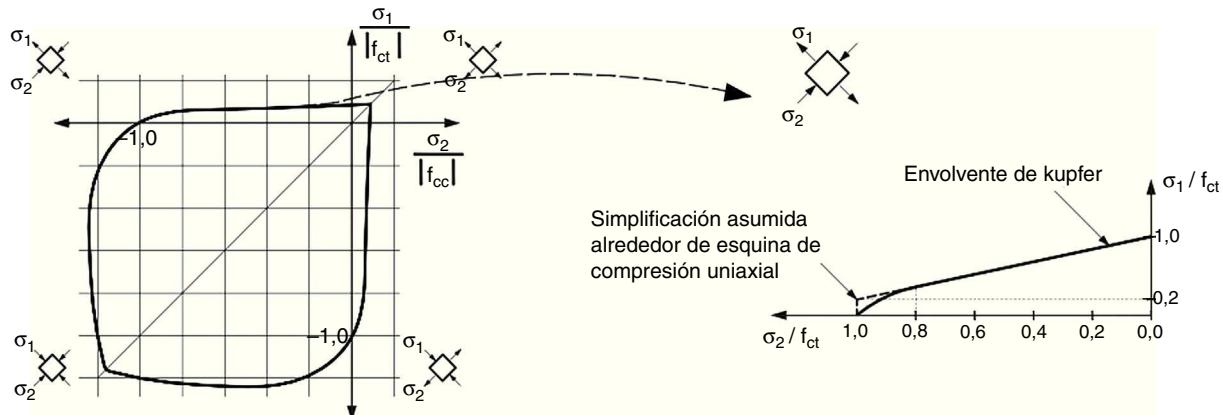


Figura 7. Envolvente de rotura de Kupfer bajo un estado biaxial de tensiones. Adaptado de [27].

- 7) Se considera que la armadura transversal, en ELU, está plástificada.

3. FORMULACIÓN DEL MODELO

3.1. Contribución de la cabeza comprimida a la resistencia a cortante

Las tensiones principales de tracción (σ_1) y de compresión (σ_2) producidas en la cabeza por un estado de tensiones normales (σ_x, σ_y) y tangenciales (τ) son:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (1)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (2)$$

donde la tensión de tracción se considera positiva. La tensión tangencial (τ) en cualquier punto está relacionada con las tensiones normales y principales a través de la ecuación (3), obtenida resolviendo (1) y (2).

$$\tau = \sigma_1 \sqrt{1 - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_1} + \frac{\sigma_x \cdot \sigma_y}{\sigma_1^2}} \quad (3)$$

Si en un cierto punto de la cabeza situado a una distancia del eje neutro $y = \lambda \cdot x$, se conoce el valor de la tensión tangencial

τ_λ , la distribución de tensiones en la cabeza puede calcularse, imponiendo las condiciones $\tau(0) = 0$, $\tau(x) = 0$ y $\tau(\lambda \cdot x) = \tau_\lambda$, obteniéndose:

$$\tau = \frac{\tau_\lambda}{\lambda \cdot (1 - \lambda)} \left(\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \right) \quad (4)$$

Entonces, el cortante resultante en la cabeza se obtiene por integración de las tensiones tangenciales en la misma:

$$V_c = \int_0^x \tau(y) \cdot b \cdot dy = \int_0^x \frac{\tau_\lambda}{\lambda \cdot (1 - \lambda)} \cdot \left(\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \right) \cdot b \cdot dy \\ = \frac{\tau_\lambda \cdot b \cdot x}{6 \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda)} \quad (5)$$

Si τ_λ es la tensión tangencial asociada a un estado de tensiones normales dado por la ecuación (3), ésta puede sustituirse en la ecuación (5), resultando V_c función de las tensiones normales y principales en el punto considerado ($y = \lambda \cdot x$): indica la figura 8, donde se representa el daño para el caso de vigas sin armadura transversal

$$V_c = K_\lambda \cdot b \cdot x \cdot \sigma_1 \sqrt{1 - \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{\sigma_1} + \frac{(\sigma_x \cdot \sigma_y)}{\sigma_1^2}} \quad (6)$$

donde:

$$K_\lambda = \frac{1}{6 \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda)} \quad (7)$$

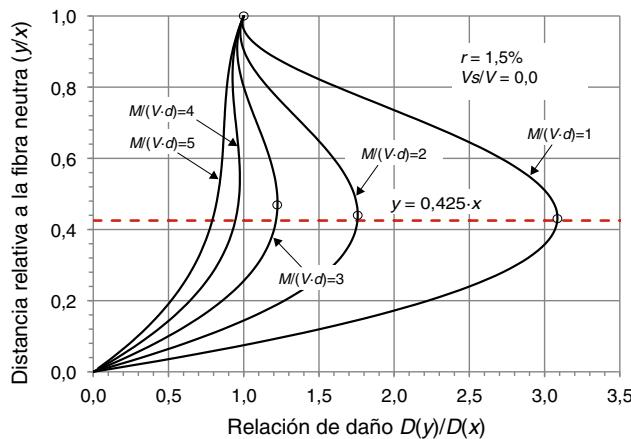


Figura 8. Posición del punto con daño máximo en la cabeza de compresión para el caso de vigas sin armadura transversal.

Y el eje neutro, x , se puede obtener en el caso de vigas de sección rectangular sin armadura comprimida a través de:

$$\xi = \frac{x}{d} = n \cdot \rho \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n \cdot \rho}} \right) \quad (8)$$

donde $n = E_s/E_c$ es el coeficiente de equivalencia entre acero y hormigón y $\rho = A_s/(b \cdot d)$ es la cuantía geométrica de armadura traccionada.

Si el punto considerado tiene un estado tensional que corresponde a la superficie de Kupfer, V_c será el cortante resistido por la cabeza de compresión. La ecuación de la superficie de rotura de Kupfer, en la rama compresión-tracción tiene por expresión:

$$\frac{\sigma_1}{f_{ct}} + 0,8 \frac{\sigma_2}{f_{cc}} = 1 \quad (9)$$

Donde tanto la tensión como la resistencia a compresión se consideran negativas. El término de la izquierda de esta igualdad puede asociarse a un daño, D , que sufre el punto debido a su estado de tensión biaxial. La tensión principal de tracción puede despejarse de la ecuación (9).

$$\sigma_1 = \left(1 - 0,8 \cdot \frac{\sigma_2}{f_{cc}} \right) \cdot f_{ct} = R_t \cdot f_{ct} \quad (10)$$

Donde R_t es un factor reductor de la resistencia a tracción por efecto de las compresiones transversales. Con ello la ecuación (6) puede reescribirse como:

$$V_c = K_\lambda \cdot b \cdot x \cdot R_t f_{ct} \sqrt{1 - \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{R_t f_{ct}} + \frac{(\sigma_x \cdot \sigma_y)}{(R_t f_{ct})^2}} \quad (11)$$

La posición del punto pésimo, donde la combinación de tensiones normales y tangenciales produce el máximo daño en la cabeza, es función de la relación entre el momento $M(s)$ y el cortante $V(s)$ que solicitan la sección situada a una distancia s del apoyo, así como de la cuantía de armadura transversal. Dicho punto, para valores situados entre $s=d$ y $s=3d$, se encuentra entre $y=0,4x$ e $y=0,5x$, como indica la figura 8, donde se representa el daño para el caso de vigas

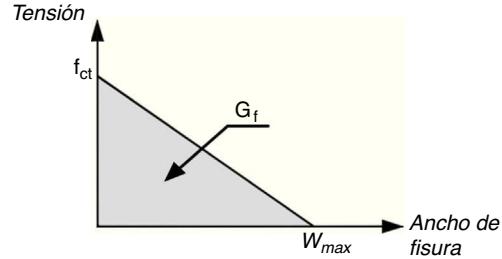


Figura 9. Curva tensión de tracción-ancho de fisura considerada en este trabajo, siendo G_f la energía de fractura.

sin armadura transversal. En el caso de vigas con armadura transversal, la existencia de tensiones verticales reduce la tensión principal de tracción y aumenta algo la de compresión, incrementando ligeramente la altura del punto crítico conforme aumenta la cuantía de armadura transversal, aunque su efecto apenas es perceptible para valores de $M/Vd < 3$. Por tanto, se adoptará en este trabajo el valor $y = 0,425 x$, es decir, $\lambda = 0,425$.

Una vez λ es conocido, también lo es K_λ y por tanto en la ecuación (11) solo hará falta sustituir los valores de las tensiones normales y obtener el factor de reducción R_t para obtener el cortante resistido por la cabeza. Por tanto, es necesario determinar cuál es la sección pésima a lo largo de la viga, de cara a determinar el momento fletor y las tensiones normales que éste genera en la cabeza comprimida, y para verificar que dicha sección se encuentra en el rango de valores de s/d coherentes con el valor adoptado para λ ($1 < s/d < 3$).

3.2. Cortante resistido a lo largo de la fisura

Considérese el trozo de viga situado por encima de la fisura crítica indicado en la figura 5. El cortante resistido a lo largo de la fisura procede de: 1) las tensiones de fricción en la superficie de la misma cuyo valor en cada punto depende de la abertura de la fisura y del deslizamiento entre caras de ésta; y 2) de las tensiones residuales que, por efecto de las irregularidades tridimensionales en la fisura, pueden transmitirse a través de ella, cuyo valor en cada punto disminuye a medida que aumenta el ancho de la fisura (fig. 9). En este trabajo se considerará, de forma simplificada, solo la fuerza residual, cuya dirección se considera perpendicular a la fisura, lo cual es coherente con la teoría del campo perturbado de tensiones [28,29] según la cual, la dirección principal de la tensión residual no puede desviarse más de 15° de la dirección de la fisura, a menos que se forme otra fisura.

A fin de evaluar la fuerza residual se considera un diagrama tensión-deformación bilineal del hormigón con una rama descendente, una vez superada la tensión máxima f_{ct} , cuya deformación máxima, ε_{ctu} , corresponde a tensión residual cero, como indica la figura 10. Considerando la hipótesis de deformación plana de las secciones, se puede relacionar la deformación máxima del hormigón, ε_{ctu} , con la deformación de la armadura longitudinal, ε_s , y ésta última con el ancho de fisura, con lo que se puede relacionar la fuerza residual con la deformación del acero y la energía de fractura del hormigón. Aunque las tensiones residuales a lo largo de la fisura tendrían una distribución triangular, se adopta un valor constante de

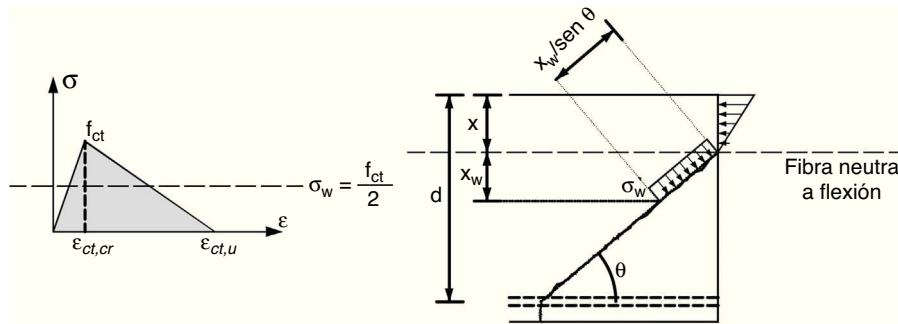


Figura 10. Diagrama tensión-deformación en tracción del hormigón y tensiones residuales en la fisura.

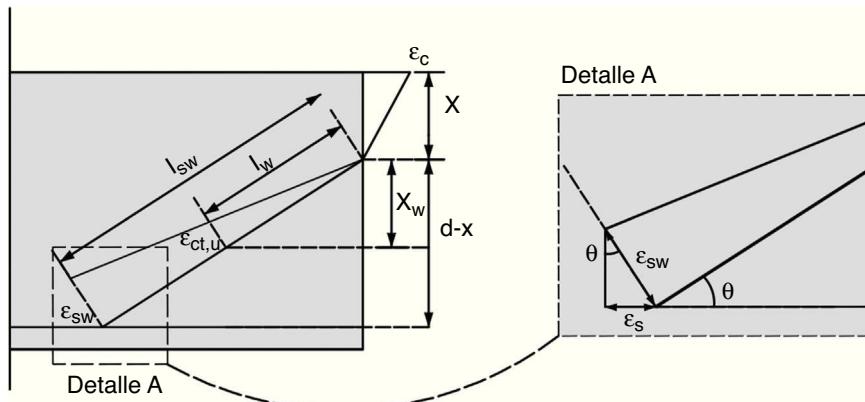


Figura 11. Compatibilidad de deformaciones en la dirección normal a la fisura.

tensión $\sigma_w = f_{ct}/2$ (fig. 10) energéticamente equivalente. Por otra parte, en los cálculos de la fuerza residual se tiene en cuenta que, de acuerdo con las hipótesis del modelo, la proyección horizontal de la fisura es $0,85d$, siendo d el canto útil.

Llamando l_w a la longitud del tramo de fisura que transmite tracciones (fig. 11) y x_w a su proyección vertical (profundidad de la zona traccionada) la fuerza residual resistida es:

$$V_w = \int_0^{l_w} \sigma_w \cdot b \cdot \cos \theta \cdot dl \simeq \sigma_w \cdot b \cdot \cos \theta \cdot \frac{x_w}{\sin \theta} \\ = \sigma_w \cdot b \cdot x_w \cdot \cot \theta \quad (12)$$

x_w se obtiene por compatibilidad de deformaciones en la dirección normal a la fisura (fig. 11), resultando el siguiente valor:

$$x_w = (d - x) \cdot \frac{\epsilon_{ct,u}}{\epsilon_s} \sin^2 \theta \quad (13)$$

Donde ϵ_s es la deformación longitudinal de la armadura de flexión, relacionada a través del $\sin^2 \theta$ con la deformación normal a la fisura, y $\epsilon_{ct,u}$ es la deformación en la dirección normal a la fisura. Substituyendo (13) en (12), y teniendo en cuenta que el valor del ángulo θ es conocido ($\cot \theta = 0,85d/(d-x)$), V_w puede expresarse como:

$$V_w = 0,425 \cdot f_{ct} \cdot b \cdot d \cdot \frac{\epsilon_{ct,u}}{\epsilon_s} \sin^2 \theta \quad (14)$$

La energía de fractura puede expresarse como una función de las deformaciones de fisuración y última del hormigón como

sigue:

$$G_f = \int_0^w \sigma(w) \cdot dw \approx \frac{1}{2} \cdot f_{ct} \cdot w_{\max} \\ \simeq \frac{1}{2} \cdot f_{ct} \cdot (\epsilon_{ct,u} - \epsilon_{ct,cr}) \cdot s_{m\theta} \quad (15)$$

Donde se supone que, en la fase de propagación de la fisura, el ancho máximo de fisura es:

$$w_{\max} = (\epsilon_{ct,u} - \epsilon_{ct,cr}) \cdot s_{m\theta} \quad (16)$$

siendo $s_{m\theta}$ el valor medio de la separación entre fisuras inclinadas, cuyo valor, como indica la figura 12, es mayor que la separación entre fisuras de flexión.

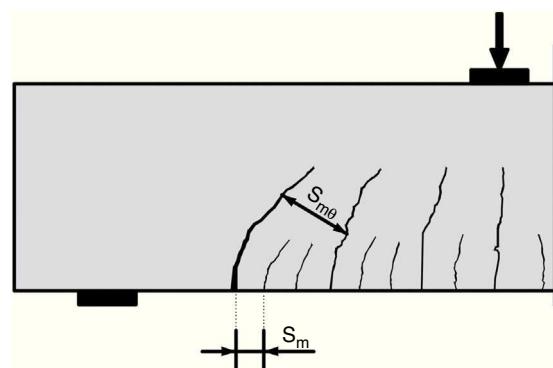


Figura 12. Separación media entre fisuras inclinadas.

Con todo lo anterior, la deformación última del hormigón en tracción, se puede relacionar con la energía de fractura mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ct,u} &= \varepsilon_{ct,cr} + \frac{2 \cdot G_f}{f_{ct} \cdot s_{m\theta}} = \frac{f_{ct}}{E_c} + \frac{2 \cdot G_f}{f_{ct} \cdot s_{m\theta}} \\ &= \frac{f_{ct}}{E_c} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot G_f \cdot E_c}{f_{ct}^2 \cdot s_{m\theta}} \right)\end{aligned}\quad (17)$$

Por tanto, el cortante resistido a través de la fisura, en forma adimensional puede expresarse según:

$$v_w = \frac{V_w}{f_{ct} \cdot b \cdot d} = \frac{0,425}{\varepsilon_s} \cdot \frac{f_{ct}}{E_c} \left(1 + \frac{2 \cdot G_f \cdot E_c}{f_{ct}^2 \cdot s_{m\theta}} \right) \sin^2 \theta\quad (18)$$

La expresión (18) indica que la contribución del alma aumenta con la energía de fractura (y por tanto con la resistencia a compresión del hormigón y el tamaño máximo del árido) y disminuye con la separación media entre fisuras diagonales y con la deformación de la armadura longitudinal ε_s . El valor de la separación media entre fisuras diagonales, $s_{m\theta}$, varía de unos puntos a otros y de la presencia o no de armadura transversal, siendo, en la actualidad, un tema abierto de investigación. Por eso, en este trabajo se adopta el valor $s_{m\theta}=d$ que es conservador, especialmente en el caso de existencia de armaduras transversales. En cuanto a la deformación de la armadura longitudinal ε_s , dado que el momento que actúa en la sección crítica no es conocido «a priori», a fin de obtener una expresión práctica para V_w , se adopta el valor $\varepsilon_s=0,0009$ cuando se produce la rotura por cortante, que es un valor medio obtenido por los autores, tanto en cálculos mediante modelos teóricos [8,10,30,31] como en investigaciones experimentales [32]. Por otra parte se adopta $x/d=0,38$ para la profundidad de la fibra neutra, que corresponde a una cuantía geométrica $\rho=1,5\%$, que es un valor conservador a efectos del cálculo de V_w . La expresión que proporciona el cortante resistido a través de la fisura es:

$$v_w = \frac{V_w}{f_{ct} \cdot b \cdot d} = 167 \cdot \frac{f_{ct}}{E_c} \left(1 + \frac{2 \cdot E_c \cdot G_f}{f_{ct}^2 \cdot d} \right)\quad (19)$$

La energía de fractura depende, entre otros factores, de la relación agua/cemento, del tipo de árido, del tamaño máximo del árido y de las condiciones de curado. El Código Modelo 2010 (CM2010) [33], propone una expresión para G_f que depende solo de la resistencia media a compresión del hormigón. Sin embargo, Wittmann [34] propone una expresión que solo depende del tamaño máximo del árido, d_{max} , y que resulta del orden de un 50% superior a la del CM2010. En este trabajo se propone una expresión que se ajusta al CM2010 para un tamaño máximo del árido de 20 mm, y además aumenta o disminuye según la resistencia del hormigón tal como indica la figura 13. Los valores experimentales de esta figura se han extraído del fib Bulletin 42 [35]. Esta expresión, en la que f_{cm} se expresa en N/mm², d_{max} en mm y G_f en N/mm, es:

$$G_f = 0,028 \cdot f_{cm}^{0,18} \cdot d_{max}^{0,32}\quad (20)$$

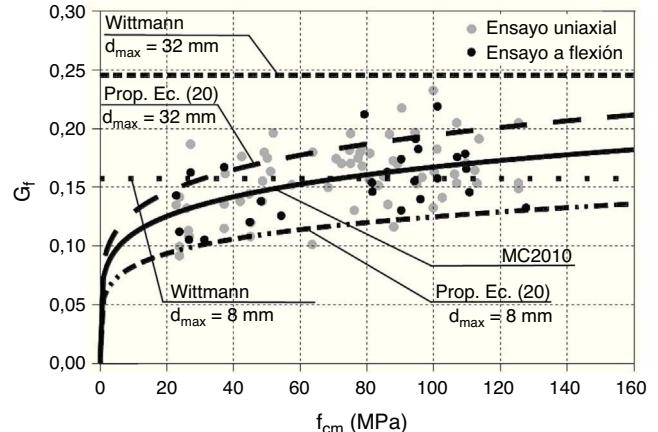


Figura 13. Resultados experimentales de la energía de fractura en función de f_{cm} , adaptada de [35].

3.3. Contribución de la armadura longitudinal a la resistencia a cortante

Como consecuencia del deslizamiento y de la abertura de la fisura inclinada, se produce un movimiento relativo vertical entre ambas caras de la fisura, que, consecuentemente, produce una cizalladura en la armadura longitudinal. Las barras longitudinales ejercen un empuje hacia fuera del hormigón del recubrimiento que está del lado de la fisura más próximo al apoyo. En caso de que no haya estribos, ese empuje solo está equilibrado por la resistencia a tracción del hormigón del recubrimiento, que es muy reducida y, en consecuencia, dicho recubrimiento se desprende para valores del esfuerzo cortante relativamente pequeños. Por ello, en este artículo se desprecia el efecto pasador de la armadura cuando no hay estribos.

En el caso de existencia de armadura transversal, la armadura longitudinal se apoya en los cercos y es capaz de resistir el efecto de un desplazamiento vertical relativo entre los mismos. En este trabajo se considera, para simplificar los cálculos, que la armadura longitudinal está empotrada en los dos cercos adyacentes al punto donde nace la fisura crítica, cuya separación se conoce (fig. 14).

El desplazamiento vertical se considera igual a la suma de dos componentes, tal como indica la figura 14: 1) la componente vertical de la abertura de la fisura inclinada (aspecto puramente geométrico, cuyo valor es nulo en flexión pura, cuando la fisura es vertical); y 2) la deformación de cortante de la cabeza, sometida a su cortante V_c , en una longitud igual a la proyección horizontal de la fisura.

Evaluando mediante procedimientos usuales ambas deformaciones (la de flexión en sección fisurada y la de cortante en la cabeza comprimida de forma elástica) y tras algunas simplificaciones, y considerando $G_c = E_c/2,2$, se obtiene la siguiente expresión para la deformación total:

$$\delta = \delta_m + \delta_v = 0,72 \cdot d \cdot \frac{\varepsilon_{sx}}{1 - \xi} \times \left(1 + 3,1 \cdot \frac{V_c \cdot d}{M} \cdot n \cdot \rho \cdot \left(1 - \frac{\xi}{3} \right) \right)\quad (21)$$

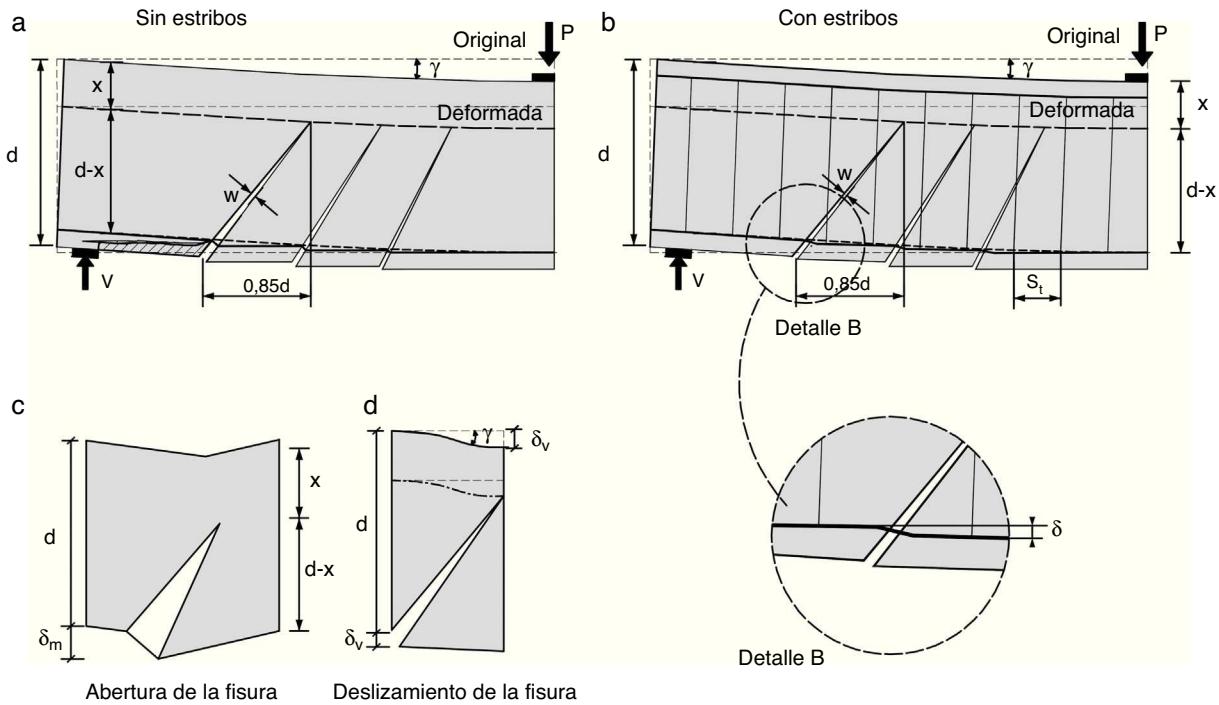


Figura 14. Efecto pasador en la armadura longitudinal.

El valor de la fuerza cortante vendrá dado, por tanto, por el valor del desplazamiento vertical y por la rigidez de esta estructura ficticia que es la barra de armadura longitudinal biempotrada entre cercos. Con estas premisas, y tras las operaciones pertinentes, se obtiene:

$$\begin{aligned} v_l &= \frac{V_l}{f_{ct} b d} = \frac{12 \cdot E_s \cdot n_b \cdot I_s \cdot \delta}{f_{ct} b d s_t^3} \\ &\approx 0,64 \cdot \frac{E_s}{f_{ct}} \cdot \rho \cdot \frac{\phi^2 \cdot d}{s_t^3} \cdot \frac{\varepsilon_{sx}}{1 - \xi} \end{aligned} \quad (22)$$

Donde E_s es el módulo elástico del acero, I_s es el momento de inercia de la barra, cuyo diámetro es ϕ , s_t es la separación entre cercos y $\xi = x/d$. Sin embargo, esta expresión es poco operativa y, por tanto, dado que la contribución V_l es muy reducida (menor del 5% del cortante resistido en casos usuales), se adoptan una serie de valores medios que corresponden a casos usuales, como son: $\varepsilon_s = 0,0009$, $\phi/s_t = 0,15$, $d/s_t = 2$ y $E_c/f_{ct} = 10000$, resultando la siguiente expresión simplificada:

$$v_l = \frac{V_l}{f_{ct} \cdot b \cdot d} \approx 0,23 \cdot \frac{n \cdot \rho}{1 - \xi} \approx 0,25 \cdot \xi - 0,05 \quad (23)$$

En donde debe ser $\xi = x/d > 0,2$, lo que ocurre para cuantías geométricas superiores a $\rho = 0,0036$, es decir superiores a la mínima.

3.4. Contribución de la armadura transversal a la resistencia a cortante

En este modelo se considera que la armadura transversal está plastificada cuando se produce la rotura por cortante ($\sigma_{st} = f_{yw}$).

Entonces, la contribución directa de esta armadura a la resistencia a cortante es (ver fig. 5):

$$v_s = \frac{V_s}{f_{ct} \cdot b \cdot d} = \frac{0,85 \cdot d \cdot A_{sw} \cdot f_{yw}}{f_{ct} \cdot b \cdot d} = 0,85 \cdot \rho_w \cdot \frac{f_{yw}}{f_{ct}} \quad (24)$$

Donde A_{sw} y ρ_w son el área por unidad de longitud y la cuantía geométrica de armadura transversal, respectivamente, y f_{yw} es la resistencia del acero. Por otra parte, las tensiones verticales de confinamiento introducidas sobre el hormigón por la armadura transversal, obtenidas del equilibrio de fuerzas verticales en un corte horizontal en cualquier sección (fig. 6), son:

$$\sigma_y = \frac{A_{sw} \cdot f_{yw}}{f_{ct} \cdot b} = \frac{V_s}{0,85 \cdot f_{ct} \cdot b \cdot d} = \frac{v_s}{0,85} \quad (25)$$

3.5. Posición de la sección crítica a lo largo de la viga

En el presente modelo, la resistencia a cortante proporcionada por la cabeza comprimida, V_c , aumenta conforme la cabeza está más comprimida ya que la tensión tangencial máxima que se puede resistir aumenta con σ_x , tal como se expresa en la ecuación (6). Con estas hipótesis, la sección que menos resiste a cortante será la situada donde acaba la primera rama de la fisura crítica. Ello es así porque secciones más próximas a la carga, que tienen la misma profundidad de la zona no fisurada, están sometidas a mayor compresión en la cabeza y, por tanto, resisten más cortante. Por otra parte, secciones más próximas al apoyo tienen una profundidad de la cabeza no fisurada mayor y también resisten, por tanto, más cortante.

Para obtener la posición de la sección crítica es necesario determinar el punto donde nace la fisura (fig. 15). Conforme se

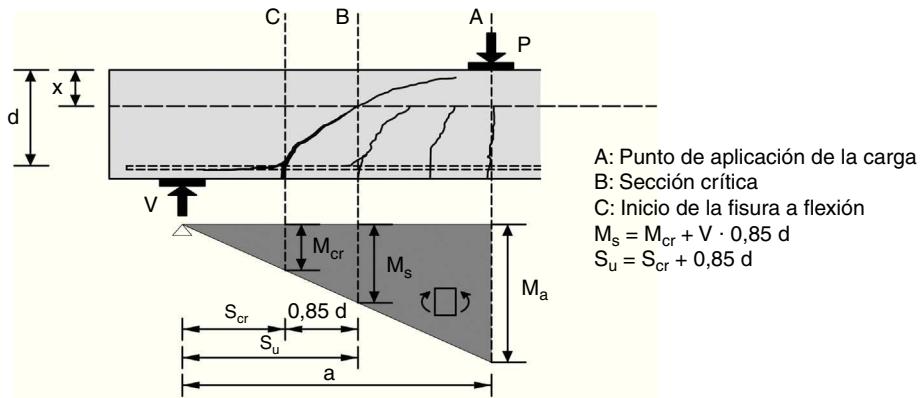


Figura 15. Posición de la sección crítica en la viga.

va cargando la pieza, se van formando fisuras desde el punto de máximo momento hacia el punto de momento nulo, separadas en función de las tensiones de adherencia y la resistencia a tracción del hormigón. Por tanto, la fisura más próxima al apoyo no puede estar a una distancia menor que la separación media entre fisuras (es decir, la longitud necesaria para que se pueda formar otra fisura). Por otra parte, la fisura crítica no puede estar a una distancia del apoyo menor que $s_{cr} = M_{cr}/V_u$, donde el momento no superaría al momento de fisuración.

4. EXPRESIÓN DE LA RESISTENCIA A CORTANTE-FLEXIÓN DE VIGAS SOMETIDAS A CARGAS PUNTUALES

Considérese la porción de viga entre las secciones donde se inicia y finaliza la primera rama de la fisura crítica por encima de ésta, como indica la figura 5. La resistencia a cortante se obtiene planteando el equilibrio entre los esfuerzos (V, M) y las resultantes de las tensiones internas en la cabeza (C, V_c), en la fisura (V_w) en la armadura longitudinal (V_l) y en las armaduras transversales (V_s).

$$C = T + V_w \cdot \tan \theta \quad (26)$$

$$V = V_c + V_w + V_l + V_s \quad (27)$$

$$\begin{aligned} C \cdot z &= M + V_c \cdot 0,85 \cdot d \\ &+ \frac{V_w \cdot (0,85 \cdot d - 0,5 \cdot x_w \cdot \cot \theta)}{\cos^2 \theta} \\ &+ 0,5 \cdot V_s \cdot 0,85 \cdot d \end{aligned} \quad (28)$$

$$v_c = \frac{V_c}{f_{ct} \cdot b \cdot d}$$

$$= R_t \cdot K_\lambda \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \frac{\lambda \cdot (0,4 + 1,7 \cdot v_c + 2 \cdot v_w \cdot \frac{(0,85 - \xi \cdot \cot \theta)}{\cos^2 \theta} + v_s \cdot 0,85)}{\xi \cdot (1 - \frac{\xi}{3}) \cdot R_t}} \left(\frac{v_s}{0,85 \cdot R_t} - 1 \right) - \frac{v_s}{0,85 \cdot R_t} \quad (32)$$

La tensión normal σ_x en el punto crítico ($y = \lambda \cdot x$) de la cabeza de compresión se puede expresar en función de los esfuerzos, como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2 \cdot \lambda \cdot M}{b \cdot x \cdot (d - \frac{x}{3})} \\ &= \frac{2 \cdot \lambda \cdot (M + V_c \cdot 0,85 \cdot d + \frac{V_w \cdot (0,85 \cdot d - 0,5 \cdot x_w \cdot \cot \theta)}{\cos^2 \theta} + 0,425 \cdot V_s \cdot d)}{b \cdot x \cdot (d - \frac{x}{3})} \end{aligned} \quad (29)$$

O, en términos adimensionales:

$$\frac{\sigma_x}{f_{ct}} = \frac{\lambda \cdot (2 \cdot \mu + 1,7 \cdot v_c + 2 \cdot v_w \cdot \frac{(0,85 - \xi_w \cdot \cot \theta)}{\cos^2 \theta} + v_s \cdot 0,85)}{\xi \cdot (1 - \frac{\xi}{3})} \quad (30)$$

donde $\xi_w = x_w/d$, x_w es la profundidad relativa de la zona donde existen tensiones residuales en la fisura, dada por la ecuación (13), v_w es el cortante adimensional resistido en la fisura, dado por la ecuación (19) y μ es el momento adimensional que actúa en la sección donde nace la fisura, $\mu = M/(f_{ct} \cdot b \cdot d^2)$. Se considera, de forma conservadora, que ese momento es el momento de fisuración, $\mu_{cr}=0,2$, aproximadamente, para secciones rectangulares.

La tensión tangencial en el punto crítico de la cabeza de compresión ($\lambda = 0,425$) vale:

$$\tau_\lambda = \frac{6 \cdot V_c}{b \cdot x} \cdot (\lambda - \lambda^2) = \frac{1,47 \cdot V_c}{b \cdot x} \quad (31)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (25) y (30), y sustituyéndolas en la ecuación (6), el cortante resistido por la cabeza, puede expresarse por:

Donde R_t es el factor reductor de la resistencia a tracción por efecto de las compresiones en la dirección perpendicular, de acuerdo con el criterio de rotura adoptado, dado por la ecuación

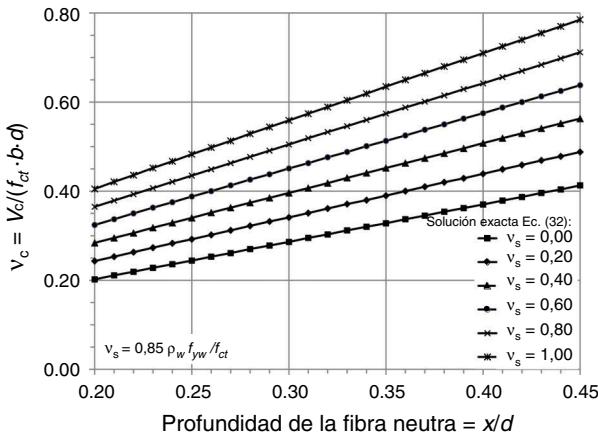


Figura 16. Cortante adimensional resistido por la cabeza en función de x/d .

(10). Dado que R_t depende de las tensiones principales y éstas del cortante V_c , la ecuación (32) debe resolverse iterativamente. Para ello se considera un valor inicial $R_t=1$, obteniéndose en pocas iteraciones la convergencia.

La figura 16 muestra la solución de la ecuación (32), expresando gráficamente el valor del cortante v_c adimensional en función de la profundidad relativa de la fibra neutra x/d , para distintos valores de la contribución de la armadura transversal.

Se observa que existe una relación marcadamente lineal entre v_c y x/d , de forma que a mayor x/d (y por tanto, mayor cuantía de armadura longitudinal), más cortante resiste la cabeza. Igualmente se observa que a mayor cuantía de armadura transversal (y por tanto mayor v_s) también resiste más cortante la cabeza. Este hecho, observado ya experimentalmente por varios autores [36,37] tiene su explicación en varios fenómenos, como son: a) el confinamiento del hormigón proporcionado por la armadura transversal que genera tensiones normales verticales; b) el hecho de que al contribuir directamente la armadura transversal a resistir más cortante (V_s), también se resiste más flexión y, por tanto, hay más compresión en la cabeza, lo cual es favorable. Matemáticamente este aspecto queda reflejado en la ecuación de equilibrio de momentos, en la que participa la armadura transversal. Esta dependencia lineal entre v_c y x/d también fue obtenida por Zararis y Papadakis [18] y por Tureyen y Frosch [20].

El cortante adimensional resistido por la cabeza debe ser afectado por el efecto tamaño debido al carácter frágil de la rotura de la cabeza. A tal fin, se utiliza la expresión semi-empírica propuesta por Zararis y Papadakis [18] para el factor de tamaño:

$$\zeta = 1,2 - 0,2a = 1,2 - 0,2\frac{a}{d} \geq 0,65 \quad (33)$$

con a y d en metros. Esta expresión fue derivada [18] considerando la cabeza comprimida en la zona situada entre la carga y el final de la primera rama de la fisura crítica como un cilindro sometido a un ensayo de tracción indirecta, cuyo resultado depende del diámetro y, por tanto, en cierta forma de la luz de cortante, a .

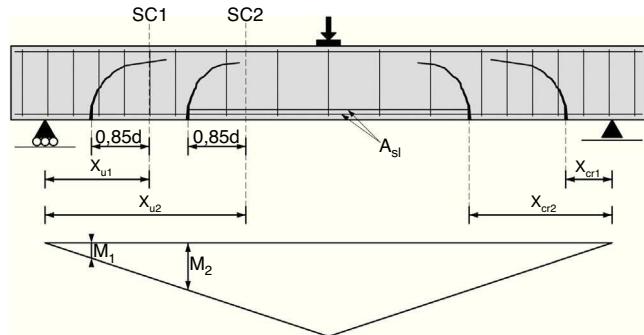


Figura 17. Sección crítica en un punto intermedio de la viga.

4.1. Ecuaciones simplificadas para el cálculo a cortante

Las rectas de la figura 16, incluyendo el factor de tamaño, pueden aproximarse por:

$$v_c = \zeta \left[(0,88 + 0,70 \cdot v_s) \cdot \frac{x}{d} + 0,02 \right] \quad (34)$$

El cortante total resistido vendrá dado por:

$$V_u = V_c + V_w + V_l + V_s = f_{ct} \cdot b \cdot d \cdot (v_c + v_w + v_l + v_s) \quad (35)$$

donde v_c , v_w , v_l y v_s vienen dados, respectivamente, por las expresiones (34), (19), (23) y (24). Haciendo $v_s=0$ y $v_l=0$ en las expresiones (34) y (35) se obtienen las siguientes expresiones para el cortante resistido en vigas sin armadura de cortante, $V_{u,0}$:

$$V_{u,0} = f_{ct} \cdot b \cdot d \cdot (v_c + v_w); v_{u,0} = \frac{V_{u,0}}{f_{ct} \cdot b \cdot d} = v_c + v_w \quad (36)$$

El modelo proporciona el punto donde se inicia la fisura crítica, $s_{cr} = V_u/M_{cr}$, la posición de la sección crítica $s_u = s_{cr} + 0,85 \cdot d$ y el momento M concomitante con el cortante último en dicha sección $M = V_u \cdot s_u$, siendo V_u el cortante último resistido predicho por el modelo presentado, ya sea para vigas con o sin cercos (equivalente a $V_{u,0}$ en este último caso). Por tanto, también se pueden obtener las tensiones normales, tangenciales y principales en la cabeza en la sección crítica en el instante de la rotura, dadas por las ecuaciones (25), (30), (32), (1) y (2), respectivamente.

Cuando la geometría de la sección o las armaduras longitudinales o transversales cambian a lo largo de la viga (fig. 17), también el momento que actúa en la sección crítica cambia.

Ello se tiene en cuenta en la ecuación (32) sustituyendo el término 0,4 por 2μ , siendo $\mu = M/(f_{ct} \cdot b \cdot d^2)$ el momento que actúa en la base de la fisura crítica. La expresión lineal (34) que relaciona el cortante adimensional resistido por la cabeza, v_c , con la profundidad relativa de la fibra neutra x/d , puede generalizarse así:

$$v_c = \zeta \cdot \left((0,88 + 0,70 \cdot v_s) \cdot \frac{x}{d} + 0,02 \right) (0,94 + 0,3 \cdot \mu) \quad (37)$$

Para el caso $\mu = 0,20$ las expresiones (34) y (37) son idénticas.

4.2. Dimensionamiento de las armaduras transversales

Cuando el cortante de cálculo excede el cortante resistido por la viga sin armadura transversal, $V_{u,o}$, el valor de la armadura necesaria puede obtenerse de forma explícita, sin necesidad de iteraciones, despejando v_s de la ecuación (35), sustituyendo v_c , por la expresión (34) haciendo en la misma $v_s = 0$ e igualando el cortante resistido al cortante de cálculo para obtener la armadura estrictamente necesaria:

$$\begin{aligned} \text{Si } v_d > v_{u,0}; v_s &= \frac{v_d - (v_{u,0} + v_l)}{1 + 0,70 \cdot \zeta \cdot \frac{x}{d}} \\ &= \frac{v_d - \zeta \cdot (0,88 \cdot \frac{x}{d} + 0,02) - v_w - v_l}{1 + 0,70 \cdot \zeta \cdot \frac{x}{d}} \end{aligned} \quad (38)$$

Donde v_d es el cortante adimensional de cálculo, $v_d = V_d/(f_{ct}bd)$, que es un dato del problema.

5. COMPARACIÓN CON RESULTADOS EXPERIMENTALES: CARGA PUNTUAL

Se ha utilizado la base de datos proporcionada por Collins et al. [1] para vigas sin armadura de cortante, en la cual constan 1849 ensayos de vigas de hormigón armado simplemente apoyadas. De ellas, se han utilizado 892 en este trabajo, que corresponden a aquellos casos en los que consta que la rotura se produjo por cortante, cuya relación a/d era mayor que 2,5 y que fueron ensayadas bajo una o dos cargas puntuales. Para elementos con armadura transversal se han fundido dos bases de datos publicadas previamente [38,39] dando lugar a una nueva base de datos de 239 resultados experimentales de vigas esbeltas simplemente apoyadas con rotura a cortante. El rango de valores de los parámetros de proyecto más importantes se presenta en la tabla 1.

Se han utilizado, además, las formulaciones de la resistencia a cortante existentes en el EC2 [11], ACI 318-08 [12] y CM2010 [33] para comparar sus resultados con los del modelo propuesto y con los experimentales. Se han eliminado de las formulaciones originales todos los coeficientes de seguridad.

Para elementos sin cercos, el EC2 [11] propone una formulación semiempírica, sin embargo, para vigas con cercos propone

Tabla 1

Rango de valores de las variables de proyecto en las bases de datos

Variable	892 vigas con cercos		239 vigas sin cercos	
	Min	Max	Min	Max
b (mm)	21	3000	76	457
d (mm)	41	2000	95	1890
f_c (MPa)	6	127	13	125
ρ_l (%)	0,1	6,6	0,5	7,0
$\rho_w = A_{sw}f_{yw}/b$ (MPa)	-	-	0,1	8,1
a/d	2,5	8,5	2,4	5,1
V_u (kN)	2	1295	14	2239

una fórmula basada en la analogía de la celosía, con ángulo variable, sin ninguna contribución del hormigón. En cuanto al Código ACI 318-08 [12], la contribución del hormigón, también de carácter empírico, se ha considerado a través de su ecuación 11-5 tanto para piezas con y sin armadura transversal. Por otra parte, la contribución de los cercos en este código está basada en una celosía con un ángulo de inclinación de 45°. La formulación a cortante del Código Modelo 2010 [33] está basada en tres niveles de aproximación, de menor a mayor complejidad. En este artículo se presentan los resultados de los cálculos realizados con los niveles II y III, eligiendo, en cada caso, el que proporcionaba menor dispersión con respecto a los resultados experimentales. Por esta razón, para elementos sin estribos, se ha adoptado el nivel II, mientras que para elementos con estribos se ha adoptado el nivel III. Ambos son métodos derivados directamente de la teoría del campo modificado de compresiones [3], la cual considera que la contribución del hormigón procede del rozamiento, o engranamiento de áridos, entre caras de fisuras.

La resistencia a tracción del hormigón, fundamental en el modelo propuesto, y el módulo de deformación longitudinal se han evaluado a partir del EC2 [11]. Se ha distinguido entre hormigones convencionales ($f_c < 50$ MPa) y de alta resistencia, pero limitando su valor a 60 MPa para hormigones sin cercos, pues parece ser que a partir de ese valor se produce la fractura de los áridos y la contribución del hormigón al cortante no aumenta más con la resistencia a compresión [36,40].

La Tabla 2 muestra la comparación entre los resultados de los ensayos y las predicciones de los distintos códigos. Puede observarse que las predicciones realizadas con el modelo propuesto se ajustan mejor, en media y dispersión, a los resultados

Tabla 2

Verificación de diferentes formulaciones a cortante con los resultados experimentales

V_{exp}/V_{pred}	892 vigas sin estribos				239 vigas con estribos			
	EC-2	ACI 318-08	CM2010 Nivel II	Propuesta	EC-2	ACI 318-08	CM2010 Nivel III	Propuesta
Media	1,07	1,28	1,20	1,04	1,72	1,25	1,21	1,06
Mediana	1,03	1,27	1,16	1,01	1,61	1,24	1,20	1,05
Desv. estándar	0,226	0,346	0,223	0,186	0,638	0,262	0,225	0,173
COV (%)	21,12	27,11	18,61	17,93	37,13	21,04	18,58	16,35
Mínimo	0,66	0,38	0,74	0,66	0,62	0,65	0,75	0,69
$(V_{exp}/V_{pred})_{5\%}$	0,79	0,71	0,91	0,79	0,97	0,85	0,92	0,83
Máximo	2,26	2,40	2,28	1,78	5,53	2,34	2,20	1,78
$(V_{exp}/V_{pred})_{95\%}$	1,53	1,90	1,62	1,39	2,77	1,65	1,60	1,34

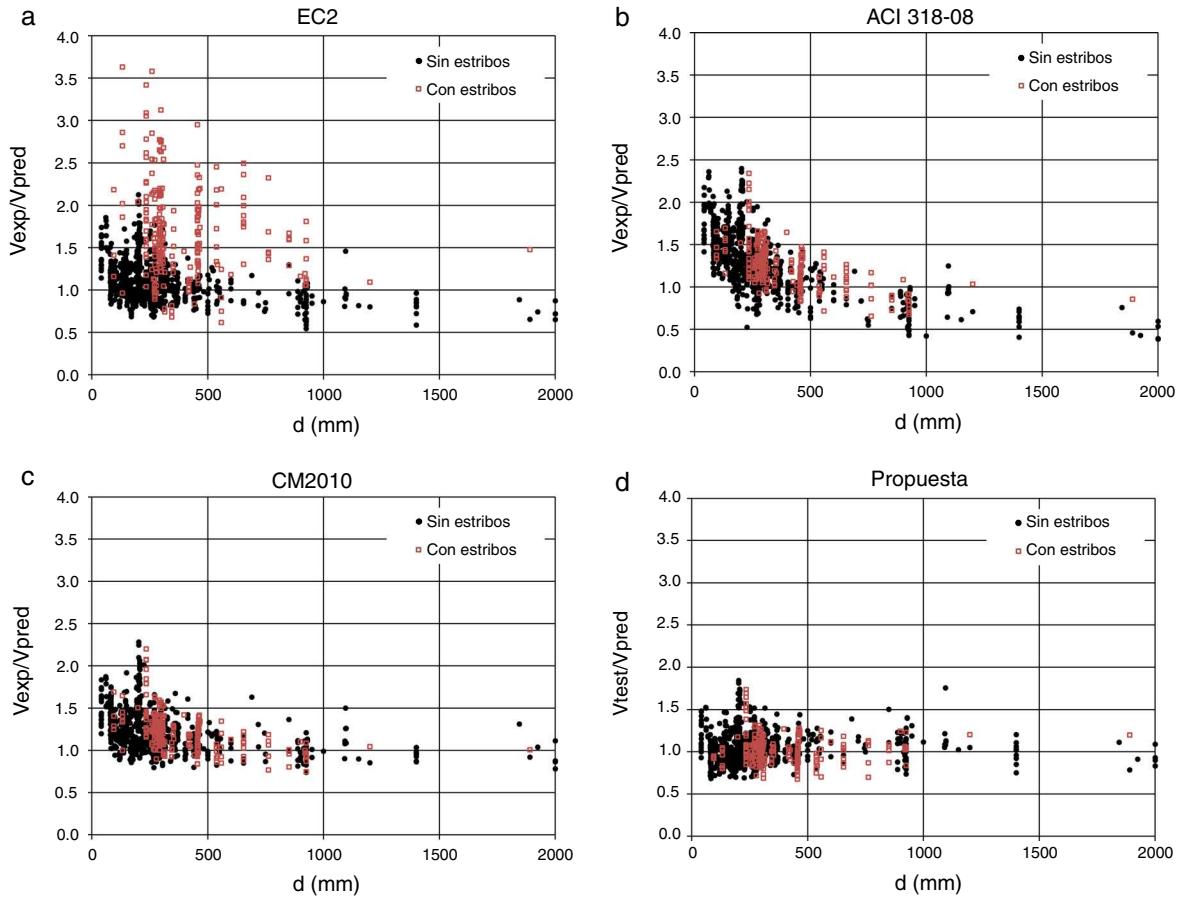


Figura 18. Correlación entre resultados experimentales y predicciones en función del canto.

experimentales que el resto de métodos, a pesar de la sencillez de sus expresiones finales. Es preciso señalar que se han utilizado las expresiones simplificadas para calcular según el modelo propuesto, es decir, la ecuación (35) para el cálculo de V_u , y las ecuaciones (19), (23), (24) y (34) para el cálculo de las contribuciones adimensionales v_w , v_l , v_s y v_c , respectivamente.

La comparación de los resultados de los diversos modelos con los experimentales se presenta también en forma gráfica, en función del canto de la pieza (fig. 18) y de la cuantía de armadura transversal (fig. 19). Se observa que conforme aumenta el canto útil del elemento, el valor medio de la razón entre los resultados experimentales y las predicciones teóricas, V_{exp}/V_{pred} , decrece para el EC2 [11] y para el CM2010 [33], mientras que permanece estable para el método propuesto. Cuando aumenta la cuantía de armadura transversal, la razón V_{exp}/V_{pred} decrece para la formulación del EC2 (de 1,95 para $\rho_w \leq 0,70$ MPa, a 0,97 para vigas fuertemente armadas, $\rho_w \geq 1,50$ MPa), mientras que la formulación propuesta es mucho más estable.

6. VIGAS SOMETIDAS A CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA

En el caso de vigas sometidas a carga uniformemente repartida, el modelo puede aplicarse teniendo en cuenta que la ley de esfuerzos cortantes disminuye con la distancia al apoyo. Por ello, la fisura crítica estará incluso más próxima al apoyo que bajo carga puntual, como se indica en la figura 20, donde se muestran resultados de los ensayos de Stuttgart [41]. El efecto de la carga repartida se puede considerar incluyendo dicha carga en las ecuaciones de equilibrio de la porción de viga afectada por la fisura crítica:

$$C = T + V_w \cdot \tan \theta \quad (39)$$

$$V = V_c + V_w + V_l + V_s + q \cdot 0,85d \quad (40)$$

$$\begin{aligned} C \cdot z = M + V_c \cdot 0,85d + \lambda_w V_w + 0,5 \cdot V_s \cdot 0,85d \\ + 0,5q(0,85d)^2 \end{aligned} \quad (41)$$

$$v_c = R_t \cdot K_\lambda \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \frac{2\lambda (0,2 + \beta v_c + v_w \cdot \lambda_w + 0,5 \cdot 0,85v_s + 0,5\eta \cdot 0,85^2)}{\xi \cdot (1 - \frac{\xi}{3}) \cdot R_t}} \left(\frac{v_s}{0,85R_t} - 1 \right) - \frac{v_s}{\beta R_t} \quad (42)$$

La resistencia adimensional a cortante de la cabeza viene dada por la ecuación general, (42), en la cual el término que

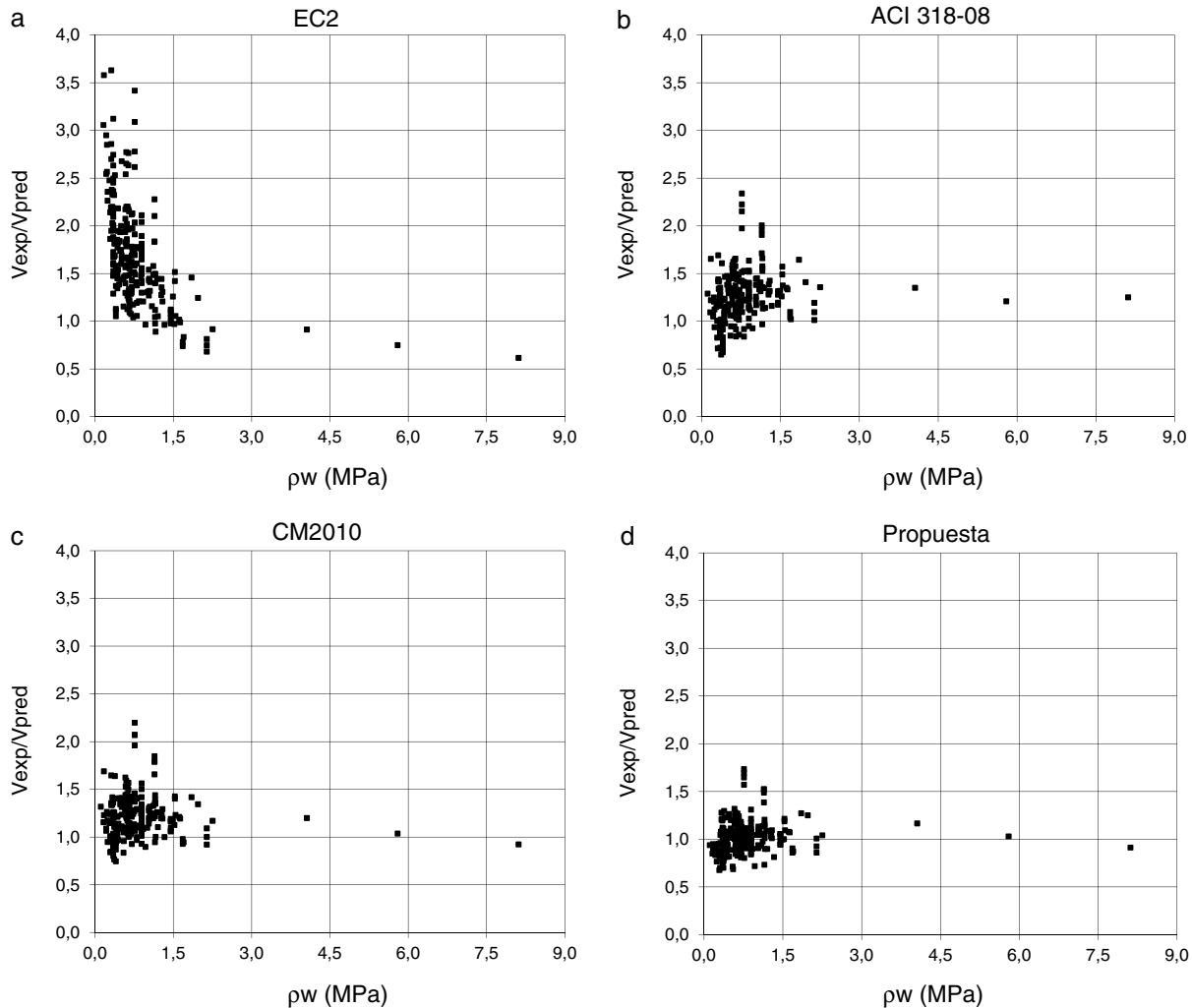


Figura 19. Correlación entre resultados experimentales y predicciones en función de ρ_w .

incluye la carga repartida es despreciable, por lo que el valor del cortante V_c puede considerarse el mismo que bajo cargas puntuales. Sin embargo, el cortante último calculado corresponde a la sección crítica, por lo que la reacción en el apoyo deberá obtenerse a partir de ese cortante, sumándole la resultante de la carga repartida entre esa sección y el apoyo.

En cuanto a la luz de cortante, a , para vigas con carga repartida, parámetro a utilizar en el cálculo del efecto tamaño, según la expresión (33), se considera $a = L/4$, siendo L la luz de cálculo de la viga biapoyada o la luz entre puntos de momento nulo.

Se ha verificado esta formulación con una base de datos de 49 vigas sometidas a cargas repartidas [1]. Lo que se compara

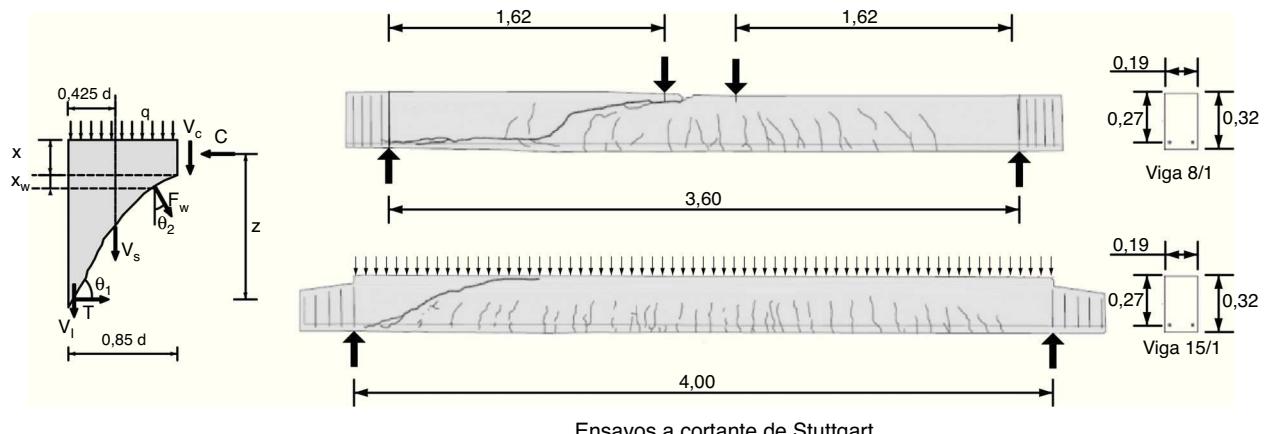


Figura 20. Viga sometida a carga repartida. Esfuerzos y fisuración.

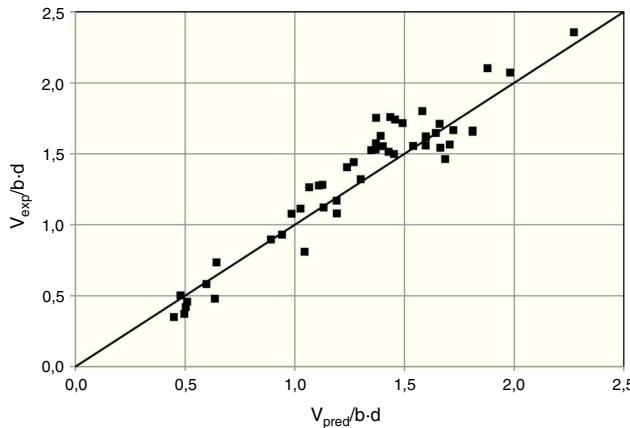


Figura 21. Resultados experimentales vs. teóricos en vigas con carga repartida.

son los valores de la carga última o de la reacción obtenidas, ya que el esfuerzo cortante no es constante a lo largo de la viga, por lo cual al cortante último obtenido se le ha sumado el valor $\Delta R = q_u \cdot d$. La media del cociente entre carga experimental y teórica ha sido 1,03 y el coeficiente de variación 12,25%, que son valores muy aceptables (fig. 21).

7. EXTENSIÓN DEL MODELO A OTROS CASOS DE ESTRUCTURAS USUALES

El modelo puede ser extendido a piezas con sección en T, piezas con canto variable, elementos parcialmente pretensados, vigas o columnas sometidas a axiles moderados de compresión o de tracción, a elementos armados con barras de FRP, a vigas de hormigón con fibras, a vigas continuas y a otros casos usuales en las estructuras reales. Se trata de adecuar las hipótesis de partida, las ecuaciones de equilibrio o los parámetros que intervienen en la formulación, a cada caso en concreto. Es posible incluso llegar a expresiones generales que sean válidas, como caso particular, a las expresiones obtenidas en este trabajo.

Así, en el caso de las secciones en T habrá que tener en cuenta que, caso de penetrar la fisura en la cabeza, ésta tendrá dos ramas con inclinaciones diferentes. Además, el momento de fisuración y la distancia del centro de gravedad a la fibra más traccionada aumentan respecto del de una viga rectangular del mismo canto y ancho igual al del alma, lo que podrá variar la posición de la sección crítica respecto de una viga de sección rectangular. Por otra parte, la profundidad de la fibra neutra deberá calcularse según la fisura penetre o no en la cabeza. En cualquier caso, según el presente modelo la contribución de la cabeza a la resistencia a cortante puede ser muy importante según la geometría de la sección, en contra de lo que predicen las normativas actuales. Este aspecto fue detectado por Placas y Regan [42] y ha sido recientemente predicho teóricamente por Celada et al. [30] y verificado experimentalmente en Pujol et al. [31] y Ribas y Cladera [43].

En el caso de piezas parcialmente pretensadas, será necesario incluir el esfuerzo axil, su inclinación y su excentricidad en las ecuaciones de equilibrio, lo que afectará a las tensiones de compresión de la cabeza y al valor de la profundidad del eje

neutro, x/d , lo que afectará a V_c . El pretensado (o esfuerzo axil) y su excentricidad darán lugar a un cambio del momento de fisuración, y por tanto la distancia de la fisura crítica al apoyo x_{cr} , así como a un cambio de la inclinación de la fisura, ($\beta > 0,85$), que deberán ser tenidos en cuenta. Por otra parte, el ancho de fisuras será menor y ello conducirá a una mayor contribución del alma. Este aspecto deberá incluirse al calcular o estimar la deformación ε_s que consta en la expresión (18) que proporciona V_w .

En caso de un esfuerzo axil de tracción, deberá calcularse la profundidad de la fibra neutra (que será menor que en flexión simple) introduciendo el esfuerzo axil de tracción en el cálculo seccional y deberá incluirse tal esfuerzo en las ecuaciones de equilibrio.

En vigas armadas con FRP, deberá tenerse en cuenta el bajo módulo de deformación de estos materiales, que afectará a la profundidad de la fibra neutra y al ancho de fisura, reduciéndose tanto V_c como V_w . En caso de que haya armaduras transversales de FRP, deberá considerarse que los cercos no plastificarán cuando la pieza rompa a cortante, no pudiendo considerar, por tanto, la tensión de rotura máxima en todos los cercos que cruzan la fisura, debiéndose considerar una hipótesis sobre la distribución de tensiones en los cercos a lo largo de la fisura inclinada.

El modelo también puede adaptarse a vigas reforzadas externa o internamente con FRP u otros materiales, como las aleaciones con memoria de forma, con grandes aplicaciones en refuerzo estructural o para la creación de rótulas plásticas, incluyendo en la formulación las propiedades adecuadas de estos refuerzos [44,45].

8. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Considérese una viga biapoyada cargada puntualmente en su centro de luz, cuya geometría y armado se indican en la figura 22. La resistencia a compresión del hormigón es de 35 MPa, el tamaño máximo del árido es igual a 20 mm y todas las armaduras son B500S. La carga máxima mayorada que tiene que resistir la viga biapoyada es de 550 kN. Previamente a la resolución de este ejemplo es preciso señalar que en estos momentos se está llevando a cabo una calibración de los coeficientes de seguridad que son necesarios aplicar al modelo, por lo que el dimensionado de la armadura se llevará a cabo sin utilizar coeficientes de seguridad y mediante la utilización de los valores medios de las resistencias del hormigón.

Las propiedades mecánicas que son necesarias conocer para la aplicación del modelo son la resistencia a tracción, el módulo secante del hormigón y la energía de fractura (ec. 20). Los dos primeros valores se obtienen según la formulación del EC2:

$$\begin{aligned} G_f &= 0,028 \cdot f_{cm}^{0,18} \cdot d_{max}^{0,32} = 0,028 \cdot 35^{0,18} \cdot 20^{0,32} \\ &= 0,138 \text{ N/mm} \end{aligned}$$

$$f_{ct.m} = 0,30 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,30 \sqrt[3]{35^2} = 3,21 \text{ MPa}$$

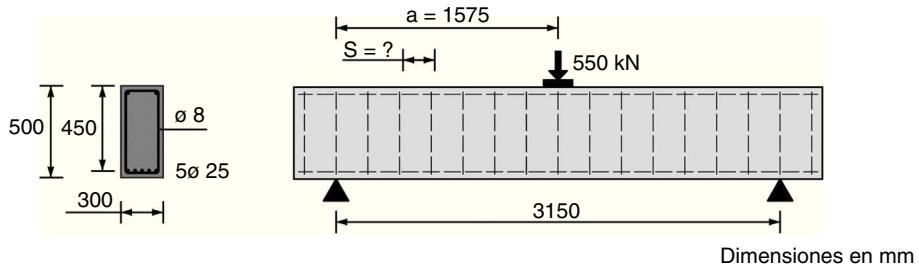


Figura 22. Geometría de la viga para el ejemplo de aplicación.

$$E_c = 22000 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{0.3} = 22000 \left(\frac{35}{10} \right)^{0.3} = 32036 MPa$$

El cortante adimensional de cálculo que debe soportar la viga es igual a:

$$v_d = \frac{V_d}{f_{ct,m} b \cdot d} = \frac{275000}{3,21 \cdot 300 \cdot 450} = 0,635$$

Por medio de las ecuaciones (19), (34) y (36) se puede obtener la contribución del cortante resistido a través de la fisura, la contribución de la cabeza comprimida y el cortante total resistido por esta viga sin armadura a cortante. Resulta:

$$\begin{aligned} v_w &= 167 \frac{f_{ct,m}}{E_c} \left(1 + \frac{2 \cdot E_c \cdot G_f}{f_{ct}^2 \cdot d} \right) \\ &= 167 \frac{3,21}{32036} \left(1 + \frac{2 \cdot 32036 \cdot 0,138}{3,21^2 \cdot 450} \right) = 0,049 \end{aligned}$$

$$\frac{x}{d} = \frac{E_s}{E_c} \rho \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\frac{E_s}{E_c} \rho}} \right) = 0,376$$

$$\zeta = 1,2 - 0,2 \frac{a}{d} = 1,2 - 0,2 \cdot 3,5 \cdot 0,45 = 0,885 \geq 0,65$$

$$\begin{aligned} v_c &= \zeta \left[(0,88 + 0,70 \cdot v_s) \cdot \frac{x}{d} + 0,02 \right] \\ &= 0,885 [(0,88 + 0,70 \cdot 0) \cdot 0,376 + 0,02] = 0,311 \end{aligned}$$

$$v_{u,0} = v_c + v_w = 0,311 + 0,049 = 0,36$$

$$\begin{aligned} V_{u,0} &= f_{ct} \cdot b \cdot d \cdot (v_c + v_w) \\ &= 3,21 \cdot 300 \cdot 450 \cdot (0,311 + 0,049) = 156 \text{ kN} \end{aligned}$$

Como el cortante solicitación es mayor al cortante resistido por la viga sin cercos es preciso añadir armadura de cortante. La ecuación (38) proporciona directamente la cuantía de armado a disponer. Previamente, mediante la ecuación (23) se estima la contribución a cortante de la armadura longitudinal (efecto pasador) y también es necesario obtener el esfuerzo cortante de cálculo de forma adimensional:

$$v_l \simeq 0,25 \cdot \xi - 0,05 = 0,25 \cdot 0,376 - 0,05 = 0,044$$

$$v_s = \frac{v_d - (v_{u,0} + v_l)}{1 + 0,70 \cdot \zeta \cdot \frac{x}{d}} = \frac{0,635 - (0,36 + 0,044)}{1 + 0,70 \cdot 0,885 \cdot 0,376} = 0,188$$

A partir de la cuantía adimensional de la armadura a cortante se puede obtener qué armadura a cortante se debe disponer mediante la ecuación (24):

$$\begin{aligned} v_s &= 0,188 = \frac{0,85 \cdot d \cdot A_{sw} f_{yw}}{f_{ct} b \cdot d} \\ &= \frac{0,85 \cdot 450 \cdot A_{sw} 500}{3,21 \cdot 300 \cdot 450} \rightarrow A_{sw} = 0,426 \text{ mm}^2/\text{mm} \end{aligned}$$

Por tanto, según el resultado exacto del cálculo sería necesario disponer 1 cerco $\phi 8$ cada 236 mm. A modo de comparación, realizando los mismos cálculos según el EC2 [11], también sin utilizar coeficientes de seguridad, sería necesario disponer 1 cerco $\phi 8$ cada 185 mm.

El momento de fisuración considerando la armadura traccionada es igual a $M_{cr} = 49,87 \text{ kNm}$ (valor adimensional $\mu = 0,255$). Considerando un valor V_u exactamente igual a V_d , es decir, disponiendo la cuantía exacta resultante, el momento de fisuración se alcanzaría a una distancia del apoyo $s_{cr} = M_{cr}/V_u = 49,87/275 = 0,18 \text{ m}$, es decir, $0,4 \cdot d$. La distancia de la sección crítica al apoyo es igual a $s_u = s_{cr} + 0,85 \cdot d = 0,18 + 0,85 \cdot 0,45 = 0,56 \text{ m}$ ($1,24 \cdot d$), y el momento M concomitante con el cortante último en dicha sección $M = V_u \cdot s_u = 275 \cdot 0,56 = 154 \text{ kNm}$. La primera rama de la fisura crítica forma un ángulo medio con el eje longitudinal de la viga de $36,3^\circ$ ($\cot \theta = 0,85/(1-0,376) = 1,36$).

La tensión normal en la sección crítica ($s_u = 0,56 \text{ m}$), en el punto donde teóricamente se inicia el daño, situado a una distancia del eje neutro $y = 0,425x = 72 \text{ mm}$ se obtiene de la expresión (30):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= - \frac{\lambda \cdot \left(2 \cdot \mu + 1,7 \cdot v_c + 2 \cdot v_w \cdot \frac{(0,85 - \xi_w \cdot \cot \theta)}{\cos^2 \theta} + v_s \cdot 0,85 \right)}{\xi \cdot (1 - \frac{\xi}{3})} \\ &= -1,791 \rightarrow \sigma_x = -5,75 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Donde los valores de todos los parámetros que intervienen en esta expresión se han obtenido previamente, excepto la profundidad de la zona de la fisura que transmite tracciones, cuyo valor se obtiene a continuación mediante las Ecs. (13) y (17). El valor de la deformación en la armadura, ε_s , se toma igual a

0,0009, tal y como se ha comentado en el apartado 3.2.

$$\begin{aligned}\xi_w &= \frac{x_w}{d} = \left(1 - \frac{x}{d}\right) \cdot \frac{\varepsilon_{ct,u}}{\varepsilon_s} \sin^2 \theta \\ &= \left(1 - \frac{169}{450}\right) \cdot \frac{0,0002934}{0,0009} 0,592^2 \\ &= 0,0713 \varepsilon_{ct,u} = \frac{f_{ct}}{E_c} \left(1 + \frac{2E_c G_f}{f_{ct}^2 d}\right) = 0,0002934\end{aligned}$$

La tensión vertical en el hormigón en la cabeza vale, a partir de la Ec. (25):

$$\sigma_y = -\frac{A_{sw} f_{yw}}{b} = -0,71 N/mm^2$$

La tensión tangencial en el punto crítico τ_λ se deduce de la expresión (5) que presenta el equilibrio de cortantes en la cabeza, como sigue:

$$\begin{aligned}V_c &= \int_0^x \tau(y) \cdot b \cdot dy = \frac{\tau_\lambda \cdot b \cdot x}{6 \cdot \lambda \cdot (1-\lambda)} \rightarrow \tau_\lambda = \frac{6 \cdot V_c \lambda (1-\lambda)}{b \cdot x} \\ &= 3,893 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Donde V_c debe ser calculado teniendo en cuenta la influencia de la armadura transversal, de acuerdo con la Ec. (34):

$$V_c = f_{ct} b d \zeta \left[(0,88 + 0,70 \cdot v_s) \cdot \frac{x}{d} + 0,02 \right] = 153405 \text{ N}$$

Entonces, las tensiones principales se pueden calcular según las Ecs. (1) y (2):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = 2,59 Pa \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = -8,84 MPa\end{aligned}$$

Se observa que se verifica el criterio de rotura de Kupfer (Ec. 9):

$$\frac{\sigma_1}{f_{ct}} + 0,8 \frac{\sigma_2}{f_{cc}} = \frac{2,59}{3,21} + 0,8 \frac{-8,84}{-35} = 1,009$$

Donde tanto la tensión como la resistencia a compresión se consideran negativas.

9. CONSIDERACIONES FINALES Y CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo mecánico de cálculo a cortante que incluye la contribución de la cabeza comprimida, el cortante transmitido a través de la fisura, el resistido por las armaduras transversales, si existen y, en tal caso, el efecto pasador de las armaduras longitudinales. Las conclusiones concretas que pueden extraerse son las siguientes:

- En piezas sin armadura transversal, el cortante debe ser resistido por un conjunto de bielas de hormigón y tirantes también de hormigón, que atraviesan las fisuras en su parte más cerrada.
- El aumento de la carga, y por ello del ancho de fisura debilita el valor del tirante y cambia su inclinación, obligando a inclinarse la compresión en la cabeza para resistir el cortante que no resiste el tirante, creando un cierto efecto arco.
- La distribución de tensiones tangenciales en la cabeza puede considerarse, de forma simplificada, parabólica con un máximo en un punto interior de ella, fruto del comportamiento intermedio entre los mecanismos de viga y de arco.
- La presencia de armadura transversal incrementa la capacidad de la cabeza comprimida para resistir tensiones tangenciales, debido a las tensiones verticales de confinamiento que introduce y al hecho de que, al aumentar el cortante resistido, aumenta también el momento flector y por tanto la compresión en la cabeza.
- Las expresiones propuestas proporcionan información cualitativa y cuantitativa sobre los parámetros que gobiernan el comportamiento estructural, lo cual es muy útil de cara a proyecto y evaluación de estructuras existentes. Por otra parte, el método es válido para dimensionamiento y comprobación directos, sin necesidad de iteraciones.
- La resistencia de la cabeza resulta ser lineal con la profundidad relativa de la fibra neutra en flexión, x/d , la cual depende de la cuantía geométrica de armadura longitudinal y del coeficiente de equivalencia E_s/E_c .
- El carácter mecánico del modelo permite adaptarlo a numerosos casos, como vigas sometidas a carga repartida, vigas continuas, secciones en T, piezas parcialmente pretensadas o solicitadas por axiles moderados, o piezas armadas con FRP para las cuales se ha explicado cuáles son los aspectos que deben modificarse para ser incluidos en el modelo.
- En secciones en T, la contribución de la cabeza a la resistencia a cortante puede ser muy relevante, a diferencia de lo considerado por los códigos vigentes.
- El modelo descrito ajusta muy bien los resultados experimentales para todos los casos estudiados y arroja mejores predicciones que las norma EC2 [11], ACI 318-08 [12] y Código Modelo 2010 [33]. Ello es muy relevante, dada la sencillez de las expresiones derivadas, evitando sobredimensionamientos injustificados. Además, en caso de utilizar la propuesta para la evaluación de estructuras existentes, se podrían evitar refuerzos estructurales innecesarios ya que la resistencia real de la estructura podría ser mayor a la reflejada por la normativa vigente.

Agradecimientos

Este trabajo se está desarrollando en el seno de los proyectos de investigación BIA2012-36848 y BIA2012-31432, ambos financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO) y por el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Referencias

- [1] M.P. Collins, E.C. Bentz, E.G. Sherwood, Where is shear reinforcement required, Review of research results and design procedures, *ACI Struct J* 105 (2008) 590–600.
- [2] K. Reineck, D.A. Kuchma, K.S. Kim, S. Marx, Shear database for reinforced concrete members without shear reinforcement, *ACI Struct J* 100 (2003) 240–249.
- [3] F.J. Vecchio, M.P. Collins, The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear, *ACI J.* 83 (1986) 219–231.
- [4] M. Petrangeli, P.E. Pinto, V. Ciampi, Fiber element for cyclic bending and shear of RC structures, I: Theory, *J Eng Mech* 125 (1999) 994–1001.
- [5] J.M. Bairán, A.R. Marí, Coupled model for the non-linear analysis of anisotropic sections subjected to general 3D loading, Part 1: Theoretical formulation, *Comput Struct* 84 (2006) 2254–2263.
- [6] P. Ceresa, L. Petrini, R. Pinho, Flexure-shear fiber beam-column elements for modeling frame structures under seismic loading - State of the art, *J Earthq Eng* 11 (2007) 46–88.
- [7] A. Saritas, F.C. Filippou, Inelastic axial-flexure-shear coupling in a mixed formulation beam finite element, *Int J Non Linear Mech* 44 (2009) 913–922.
- [8] S. Mohr, J.M. Bairán, A.R. Marí, A frame element model for the analysis of reinforced concrete structures under shear and bending, *Eng Struct* 32 (2010) 3936–3954.
- [9] J. Navarro-Gregori, P. Miguel-Sosa, M.A. Fernández-Prada, Filippou FC, A 3D numerical model for reinforced and prestressed concrete elements subjected to combined axial, bending, shear and torsion loading, *Eng Struct* 29 (2007) 3404–3419.
- [10] D. Ferreira, J. Bairán, A. Marí, Numerical simulation of shear-strengthened RC beams, *Eng Struct* 46 (2013) 359–374.
- [11] European Committee for Standardization (CEN), Eurocode 2: Design of Concrete Structures: Part 1: General Rules and Rules for Buildings: European Committee for Standardization, 2002.
- [12] ACI Committee 318. Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-08) and Commentary, Farmington Hills, MI, USA: American Concrete Institute, 2008.
- [13] J. Sagaseta, R.L. Vollum, Influence of beam cross-section, loading arrangement and aggregate type on shear strength, *Mag Concr Res* 63 (2011) 139–155.
- [14] Comisión Permanente del Hormigón. EHE-2008. Instrucción de Hormigón Estructural, Madrid: Ministerio de Fomento, 2008.
- [15] K. Reineck, Ultimate shear force of structural concrete members without transverse reinforcement derived from a mechanical model, *ACI Struct J* 88 (1991) 592–602.
- [16] Bentz E. MC2010. Shear strength of beams and implications of the new approaches. Workshop Recent Developments on Shear and Punching Shear in RC and FRC Elements 2010;fib Bulletin 57:15–30.
- [17] A. Muttoni, M.F. Ruiz, Shear strength of members without transverse reinforcement as function of critical shear crack width, *ACI Struct J* 105 (2008) 163–172.
- [18] P.D. Zararis, G.C. Papadakis, Diagonal shear failure and size effect in RC beams without web reinforcement, *J Struct Eng* 127 (2001) 733–742.
- [19] M. Khuntia, B. Stojadinovic, Shear strength of reinforced concrete beams without transverse reinforcement, *ACI Struct J* 98 (2001) 648–656.
- [20] A.K. Tureyen, R.J. Frosch, Concrete Shear Strength: Another Perspective, *ACI Struct J* 100 (2003) 609–615.
- [21] H.G. Park, K.K. Choi, J.K. Wight, Strain-based shear strength model for slender beams without web reinforcement, *ACI Struct J* 103 (2006) 783–793.
- [22] N. Spinella, P. Colajanni, A. Recupero, Simple plastic model for shear critical SFRC beams, *J Struct Eng* 136 (2010) 390–400.
- [23] Zanuy C, Albajar L, Gallego JM. Toward modelling the shear fatigue behaviour of reinforced concrete beams without shear reinforcement. 7th International Conference on Analytical Models and New Concepts in Concrete and Masonry Structures AMCM 2011.
- [24] A. Marí, A. Cladera, E. Oller, J. Bairán, Shear design of FRP reinforced concrete beams without transverse reinforcement, *Compos Part B: Eng* 57 (2014) 228–241.
- [25] A. Muttoni, J. Schwartz, Behaviour of beams and punching in slabs without shear, *reinforcement* 62 (1991) 703–708.
- [26] J.R. Carmona, G. Ruiz, Bond and size effects on the shear capacity of RC beams without stirrups, *Eng Struct* 66 (2014) 45–56.
- [27] H.B. Kupfer, K.H. Gerstle, Behavior of concrete under biaxial stresses, *Journal of the Engineering Mechanics Division* 99 (1973) 853–866.
- [28] F. Vecchio, Disturbed stress field model for reinforced concrete: formulation, *J Struct Eng* 126 (2000) 1070–1077.
- [29] F. Vecchio, Disturbed stress field model for reinforced concrete: implementation, *J Struct Eng* 127 (2001) 12–20.
- [30] Celada Blesa U, Bairán García JM, Marí Bernat AR, Pujol Sánchez M, Oller Ibars E. Sobre el cortante en secciones en T y sus mecanismos resistentes. VI Congreso Internacional de Estructuras (ACHE) 2014; Resúmenes:205-6.
- [31] Pujol Sánchez M, Oller Ibars E, Marí Bernat AR. Contribución del refuerzo externo transversal con laminados de polímeros reforzados con fibras a la resistencia a cortante. VI Congreso Internacional de Estructuras (ACHE) 2014; Resúmenes:57-8.
- [32] Ferreira D, Oller E, Bairán J, Carrascón S, Marí AR. Influencia del contenido de finos del hormigón en la respuesta estructural a flexión y cortante de vigas de hormigón armado, Informes de la construcción. Informes de la Construcción 2014; Aceptado para su publicación.
- [33] Fédération International du Beton. Model Code 2010, Final Draft: Fédération International du Beton, 2012.
- [34] F. Wittmann, Crack formation and fracture energy of normal and high strength concrete, *Sadhana* 27 (2002) 413–423.
- [35] fib Task Group 8.2. Constitutive modelling of high strength/high performance concrete. State of the Art Report 2008; fib Bulletin 42:130.
- [36] A. Cladera, A.R. Marí, Shear design procedure for reinforced normal and high-strength concrete beams using artificial neural networks, Part II: Beams with stirrups, *Eng Struct* 26 (2004) 927–936.
- [37] A. Cladera, A.R. Marí, Shear design of prestressed and reinforced concrete beams, *Mag Concr Res* 58 (2006) 713–722.
- [38] Q. Yu, Z.P. Bažant, Can stirrups suppress size effect on shear strength of RC beams? *J Struct Eng* 137 (2011) 607–617.
- [39] A. Cladera, A.R. Marí, Shear strength in the new Eurocode 2, A step forward? *Struct Concr* 8 (2007) 57–66.
- [40] A. Cladera, A.R. Marí, Shear design procedure for reinforced normal and high-strength concrete beams using artificial neural networks, Part I: Beams without stirrups, *Eng Struct* 26 (2004) 917–926.
- [41] Leonhardt F, Walther R. Schubversuche an Einfeldrigen Stahlbeton-Balken mit und ohne Schubbewehrung zur Ermittlung der Schubtragfähigkeit und der Oberen Schubspannungsgrenze. Heft 151, Deutscher Ausschuss Fr Stahlbeton 1962:66.
- [42] A. Placas, P.E. Regan, Shear failure of reinforced concrete beams, *J Amer Concrete Inst* 68 (1971) 763–773.
- [43] C. Ribas, A. Cladera, Experimental study on shear strength of beam-and-block floors, *Eng Struct* 57 (2013) 428–442.
- [44] Cladera A, Oller, E., Ribas, C. Pilot experiences in application of shape memory alloys in structural concrete. *J Mater Civ Eng* 2013; In press; [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)MT.1943-5533.0000974](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0000974).
- [45] A. Cladera, B. Weber, C. Leinenbach, C. Czaderski, M. Shahverdi, M. Motavalli, Iron-based shape memory alloys for civil engineering structures: An overview, *Constr Build Mater* 63 (2014) 281–293.