

## Tutorial

# Control repetitivo digital de sistemas con frecuencia incierta o variante en el tiempo

Ramon Costa-Castelló<sup>a,\*</sup>, Germán Andrés Ramos<sup>b</sup>, Josep M. Olm<sup>c</sup>

<sup>a</sup>*Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials, Universitat Politècnica de Catalunya.*

<sup>b</sup>*Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Universidad Nacional de Colombia.*

<sup>c</sup>*Departament de Matemàtica Aplicada IV, Universitat Politècnica de Catalunya.*

### Resumen

El control repetitivo digital es una técnica basada en el principio del modelo interno que permite seguir y/o rechazar señales periódicas. Una hipótesis clave en los diseños tradicionales de control repetitivo es que la frecuencia de tales señales es constante y conocida, siendo su principal desventaja la elevada degradación de prestaciones que aparece cuando dicha frecuencia es incierta o varía con el tiempo. En este trabajo se presenta una revisión de las principales estrategias introducidas hasta la fecha para resolver este problema. Copyright © 2012 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

**Palabras Clave:** Control repetitivo, Sistemas de control lineal, Sistemas de tiempo discreto, Regulación de salida

### 1. Introducción

El Control Repetitivo (RC, por sus siglas en inglés) (Longman, 2000; Cuiyan et al., 2004; Tomizuka, 2008; Wang et al., 2009), es una técnica basada en el Principio del Modelo Interno (IMP, por sus siglas en inglés) (Francis and Wonham, 1976). Éste establece que para seguir/rechazar una señal es necesario que su generador esté incluido en lazo de control. El RC aplica el IMP para el seguimiento/rechazo de señales periódicas asumiendo que la frecuencia de las señales a seguir/rechazar es constante y conocida. El RC está relacionado también con el *Iterative Learning Control* (ILC) (Bristow et al., 2006). Ésta es una técnica de control pensada para ir mejorando las prestaciones del sistema de lazo cerrado a medida que se va repitiendo una cierta actividad. Mientras que en el ILC las diferentes repeticiones no son, necesariamente, seguidas en el tiempo, en el RC se asume que a una repetición le sigue inmediatamente la siguiente. Esta particularidad permite superar algunas de las dificultades técnicas existentes en el ILC.

El RC ha sido ampliamente usado en diferentes áreas. Destacan, entre otras, lectores de discos duros y discos compactos (Chew and Tomizuka, 1990), robótica (Sun et al., 2007; Kasac et al., 2008), electro-hidráulica (Kim and Tsao, 2000), supresión de vibraciones (Hattori et al., 2000; Daley et al., 2006),

intercambiadores de calor (Álvarez et al., 2007), compensación de fricción (Huang et al., 1998), máquinas de inyección de moldes (Nan et al., 2006), actuadores piezoeléctricos (Choi et al., 2002), control de motores lineales (Chen and Hsieh, 2007), rectificadores electrónicos (Zhou and Wang, 2003), inversores PWM (Li et al., 2006; Wang et al., 2007b) y filtros activos (Costa-Castelló et al., 2009). En todas ellas el RC ofrece elevadas prestaciones en estado estacionario.

Una de las principales debilidades del RC aparece cuando la frecuencia de las señales a trabajar es incierta o sufre variaciones con el tiempo. En estos casos, el RC tradicional presenta una significativa pérdida de prestaciones (Steinbuch, 2002). Con el fin de resolver esta problemática y poder aprovechar los beneficios del RC en entornos de frecuencia incierta o variante en el tiempo, se han propuesto diferentes modificaciones al planteamiento inicial que hacen al RC más robusto frente a este tipo de incertidumbres. Este trabajo presenta una revisión de los principales enfoques planteados hasta el momento para afrontar dicha situación.

El artículo está estructurado de la forma siguiente. La Sección 2 presenta dos aplicaciones, provenientes de ámbitos diferentes, en las que el RC se ha aplicado con éxito. Estas aplicaciones servirán para ilustrar la bondad del RC en el caso de conocerse la frecuencia de las señales, así como para estudiar las causas por las cuales la frecuencia varía y las consecuencias de este efecto. También se utilizarán para aplicar las estrategias de control descritas en este trabajo. La Sección 3 presenta la estructura del RC, sus componentes y métodos de diseño. A continuación se muestran algunos ejemplos experimentales

\* Autor en correspondencia

Correos electrónicos: [ramon.costa@upc.edu](mailto:ramon.costa@upc.edu) (Ramon Costa-Castelló), [garamosf@unal.edu.co](mailto:garamosf@unal.edu.co) (Germán Andrés Ramos), [josep.olm@upc.edu](mailto:josep.olm@upc.edu) (Josep M. Olm)

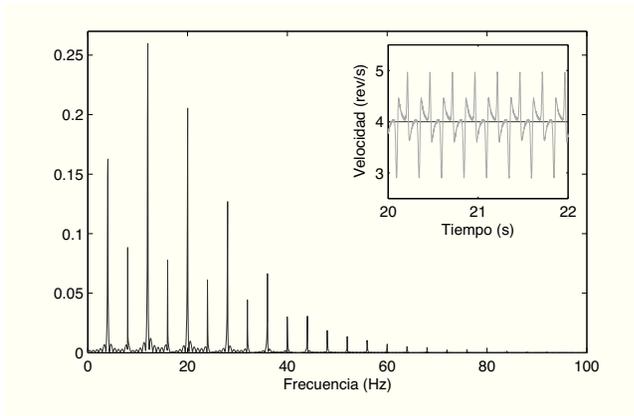


Figura 1: Sistema rotatorio sometido a perturbaciones periódicas, sin RC y a velocidad nominal  $\omega = 4\text{rev/s}$ : velocidad de giro,  $\omega$ , y transformada de Fourier de  $\omega$  (una vez eliminada la componente continua), en régimen permanente.

de aplicación del RC en las plantas descritas anteriormente y se concluye analizando la pérdida de prestaciones cuando la frecuencia es incierta o variante. La Sección 4 describe las principales propuestas existentes en la literatura que tienen en cuenta la naturaleza incierta o variante en el tiempo de las señales a tratar. Éstas se han agrupado en dos grandes apartados: por un lado, en la Sección 4.1 se encuentran las propuestas que utilizan un período de muestreo variable y, por otro, la Sección 4.2 incluye aquellas que dejan el período de muestreo fijo. Finalmente, la Sección 5 presenta algunas conclusiones y aporta criterios que permiten seleccionar entre las diferentes opciones presentadas ante una aplicación concreta.

## 2. Ejemplos de sistemas sometidos a perturbaciones periódicas

Con el objeto de ilustrar las diferentes técnicas de RC que se expondrán a lo largo del artículo, se introducen ahora dos ejemplos relevantes de sistemas sometidos a perturbaciones periódicas. El primero proviene del campo de la mecatrónica, mientras que el segundo lo hace del campo de la electrónica de potencia.

### 2.1. Sistema mecánico rotatorio

Muchos sistemas mecánicos, tales como discos duros, CDs y máquinas de control numérico, entre otros, están pensados para girar a velocidad angular,  $\omega$ , constante. En estas circunstancias cualquier desequilibrio en la inercia giratoria o cualquier fricción genera un par pulsante sobre el eje de giro. Dicho par hace que en lazo abierto, o en lazo cerrado con controladores tradicionales tipo PID, la velocidad angular en régimen permanente describa una señal de características periódicas en la que el período está directamente relacionado con la velocidad de giro. A modo de ejemplo, la Figura 1 muestra la evolución de la velocidad angular,  $\omega$ , y su transformada de Fourier, en régimen permanente, de un sistema giratorio cuya dinámica está perturbada por la interacción entre un conjunto de imanes fijos y

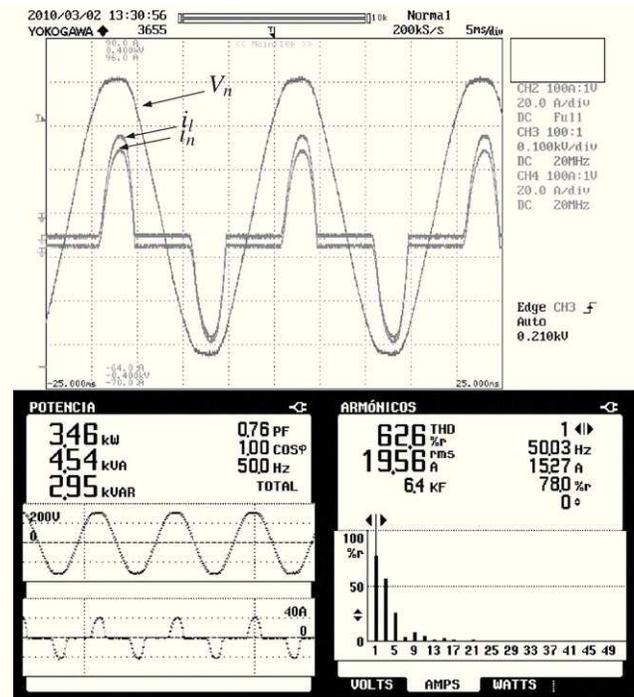


Figura 2: Corriente generada por un rectificador de diodos conectado a la red de distribución ( $V_n$ : tensión de la red;  $i_l$ : corriente de la carga;  $i_n$ : corriente de la red).

móviles (Costa-Castelló et al., 2005). Puede observarse que la velocidad describe una señal periódica, mientras que su transformada de Fourier está concentrada alrededor de la frecuencia de giro y sus componentes armónicas. Dadas las consideraciones anteriores este tipo de sistemas constituye, por tanto, campo natural de aplicación del RC.

### 2.2. Sistema electrónico

Los Convertidores Electrónicos de Potencia (CEP) son dispositivos diseñados para transformar y adaptar la energía eléctrica. La conversión de Corriente Alterna (CA) a Corriente Continua (CC) (rectificación) y de CC a CA (inversión) constituyen algunas de las importantes aplicaciones de los CEP. En ambos casos muchas de las señales que aparecen en el sistema, incluyendo voltajes y corrientes, presentan características periódicas en régimen permanente, lo cual hace del RC una técnica especialmente indicada para el control de estos dispositivos.

Otra aplicación de interés en electrónica de potencia es el filtrado activo (Akagi, 1996; Buso et al., 1998; Costa-Castelló et al., 2009). En esta ocasión el CEP se coloca en paralelo a una o varias cargas no lineales o reactivas y se pretende que la corriente vista por la fuente presente una forma senoidal en fase con la sinusoide de la fuente. Ello permite obtener un factor de potencia unitario. A modo de ejemplo la Figura 2 muestra las corrientes de carga y red, en régimen permanente, generadas por la conexión de un rectificador de diodos, esto es, de una carga no lineal, a la red de distribución.

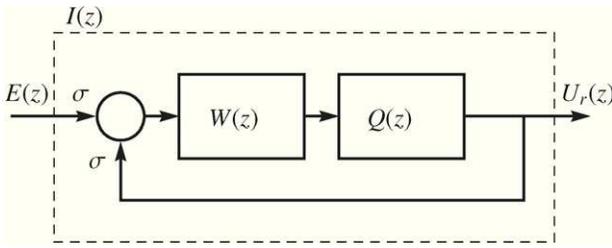


Figura 3: Modelo interno genérico .

Nótese que ambas presentan la forma de una señal periódica con un importante contenido armónico.

### 3. Controladores repetitivos: estructura y diseño

#### 3.1. Modelo interno

El IMP establece que para poder seguir una señal sin error estacionario es necesario que su generador esté contenido en el lazo de control. El generador de una señal de tiempo discreto de período  $N$ , obtenido a partir de la transformada  $Z$  de su representación en serie de Fourier, puede escribirse como:

$$I(z) = \frac{z^{-N}}{1 - z^{-N}} = \frac{1}{z^N - 1}. \quad (1)$$

Obsérvese que si en la entrada de este generador se introduce una señal de longitud  $N$  y posteriormente se deja a cero, el sistema repite en la salida de forma indefinida dicha señal, dando así lugar a una señal de período  $N$  tal que los valores que toma en cada período coinciden con los consignados en el sistema al inicio.

La introducción de  $I(z)$  dentro del lazo de control constituye el elemento distintivo del RC y, en caso de que el sistema de lazo cerrado sea estable, es el elemento que garantiza las prestaciones de seguimiento en régimen permanente. Desde un punto de vista frecuencial, la principal característica de (1) es que tiene  $N$  polos uniformemente distribuidos sobre el círculo unitario del plano complejo. De esta manera, el controlador proporciona ganancia infinita en las frecuencias  $\omega = 2k\pi/N$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

Aunque (1) es un generador de tiempo discreto, la mayoría de controladores repetitivos están diseñados para el control de sistemas de tiempo continuo sujetos a perturbaciones o referencias de periodo  $T_p$ . En este caso las señales  $T_p$ -periódicas se muestran con período  $T_s$  y se convierten en señales digitales  $N$ -periódicas, seleccionándose el periodo de muestreo de forma que se cumpla la relación  $N = \frac{T_p}{T_s}$ .

El modelo interno (1) introduce elevada ganancia en aquellas frecuencias en que existe incertidumbre en el comportamiento de la planta, cosa que compromete la estabilidad del sistema de lazo cerrado. Con el fin reducir la ganancia de (1) en las frecuencias con incertidumbre es habitual introducir un filtro,  $Q(z)$ , en el interior del modelo interno (véase la Figura 3). En la mayoría de aplicaciones  $Q(z)$  es un filtro pasabajos,

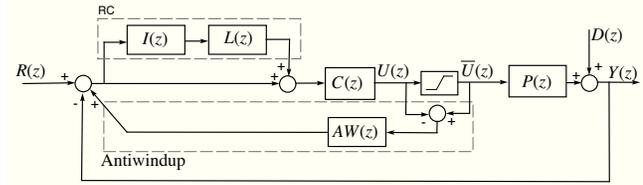


Figura 4: Estructura del RC.

preferentemente FIR y de fase nula. Además, dicho filtro debe tener ganancia unitaria dentro de la banda pasante deseada y atenuar fuera de la misma. Es por ello que el diseño de este filtro constituye un compromiso entre prestaciones y robustez (véase, por ejemplo, Hara et al. (1988))

Así, la Figura 3 presenta el esquema de un modelo interno genérico

$$I(z) = \frac{\sigma \cdot W(z)Q(z)}{1 - \sigma \cdot W(z)Q(z)}, \quad (2)$$

donde  $W(z)$  es un retardo o suma ponderada de retardos y  $\sigma \in \{-1, 1\}$ . La mayoría de modelos internos para señales periódicas específicas recogidos en la literatura (Grinó and Costa-Castelló, 2005; Escobar et al., 2007) pueden diseñarse seleccionando el valor apropiado de  $\sigma$ ,  $W(z)$  y  $Q(z)$  en (2), lo cual permite optimizar el RC para aplicaciones concretas. En particular, el modelo (1) se obtiene fijando  $\sigma = 1$ ,  $W(z) = z^{-N}$  y  $Q(z) = 1$  en (2).

#### 3.2. Estructura de control

La incorporación del modelo interno (2) no garantiza estabilidad de lazo cerrado. Además, y pese a su linealidad, el orden elevado y la presencia de un gran número de elementos resonantes asociados a este modelo interno dificultan el análisis convencional de estabilidad. Por esta razón el RC suele utilizar estructuras que facilitan dicho estudio.

Entre las estructuras de RC más populares se encuentra la conocida como *plug-in* (Inoue et al., 1981; Nakano and Hara, 1986; Hara et al., 1988). En ella, mostrada en la Figura 4, la planta  $P(z)$  se controla combinando el modelo interno, un filtro estabilizante,  $L(z)$ , y un controlador nominal,  $C(z)$ . En este caso, la función de sensibilidad del sistema de lazo cerrado resulta ser:

$$S(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + C(z)P(z)} \frac{1}{1 + I(z)T_o(z)} = S_o(z)S_M(z), \quad (3)$$

donde

$$S_o(z) = \frac{1}{1 + C(z)P(z)} \quad \text{y} \quad T_o(z) = C(z)P(z)S_o(z)$$

son, respectivamente, las funciones de sensibilidad y de sensibilidad complementaria del sistema sin RC, mientras que

$$S_M(z) = \frac{1}{1 + I(z)T_o(z)} = \frac{1 - \sigma \cdot W(z)Q(z)}{1 - \sigma \cdot W(z)Q(z)(1 - L(z)T_o(z))} \quad (4)$$

es la función de sensibilidad modificante, la cual muestra el efecto del RC en la función de sensibilidad del sistema.

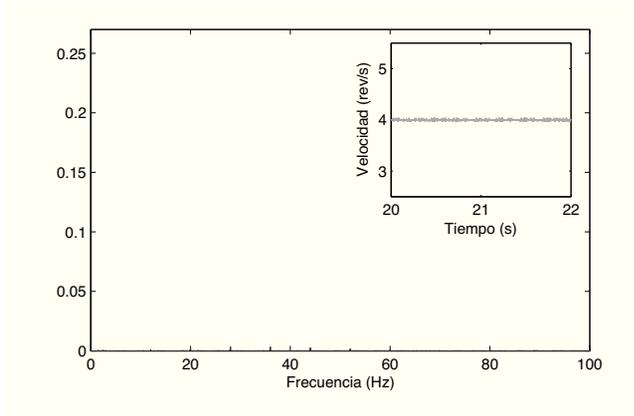


Figura 5: Sistema rotatorio sometido a perturbaciones periódicas, con RC diseñado para una velocidad nominal  $\omega = 4\text{rev/s}$ : velocidad de giro,  $\omega$ , y transformada de Fourier de  $\omega$  (una vez eliminada la componente continua), en régimen permanente.

Con esto, el sistema de la Figura 4 es estable si (Inoue et al., 1981):

- i.  $S_o(z)$  es estable,
- ii.  $|W(z)Q(z)(1 - T_o(z)L(z))| < 1$ .

El diseño de  $L(z)$  se suele basar en la cancelación de la fase de  $T_o(z)$  (Tomizuka, 1987; Inoue, 1990). En los sistemas de fase mínima resulta  $L(z) = k_r T_o^{-1}(z)$ , con  $0 < k_r < 2$  para los modelos internos con  $W(z) = z^{-N}$ , siendo  $k_r$  seleccionada mediante un compromiso entre robustez y desempeño (Hillerström and Lee, 1997).

### 3.3. Antiwindup

Los RC presentan numerosos polos sobre el círculo unitario, por lo cual no son *Bounded Input-Bounded Output* (BIBO) estables. Como es sabido, en sistemas con saturación en el actuador un controlador de estas características es propenso al efecto *windup* (Galeani et al., 2009; Tarbouriech and Turner, 2009). Es decir, una vez alcanzada la saturación los estados del controlador pueden crecer sin límite, cosa que dificulta y retarda la recuperación del comportamiento lineal. En el contexto del RC el problema del *windup* se analiza por primera vez en Ryu and Longman (1994), mientras que en Sbarbaro et al. (2009) se estudian algunas de sus características.

El efecto de la saturación puede minimizarse incorporando una realimentación *antiwindup* (Galeani et al., 2009; Tarbouriech and Turner, 2009). En este sentido existen dos grandes familias de esquemas *antiwindup* (Galeani et al., 2009), recogidas bajo los nombres de *Direct Linear Anti-Windup* (DLAW) y *Model Recovery Anti-Windup* (MRAW), respectivamente. En la primera se plantea una realimentación de estado en el controlador que garantice estabilidad y prestaciones durante la saturación de la acción de control. Alternativamente, los enfoques MRAW plantean una realimentación con un filtro  $AW(z)$ , que contiene el modelo de la planta,  $P(z)$ , y que pese a la saturación deja invariante el lazo cerrado desde el punto de vista del controlador, garantizando por tanto la estabilidad.

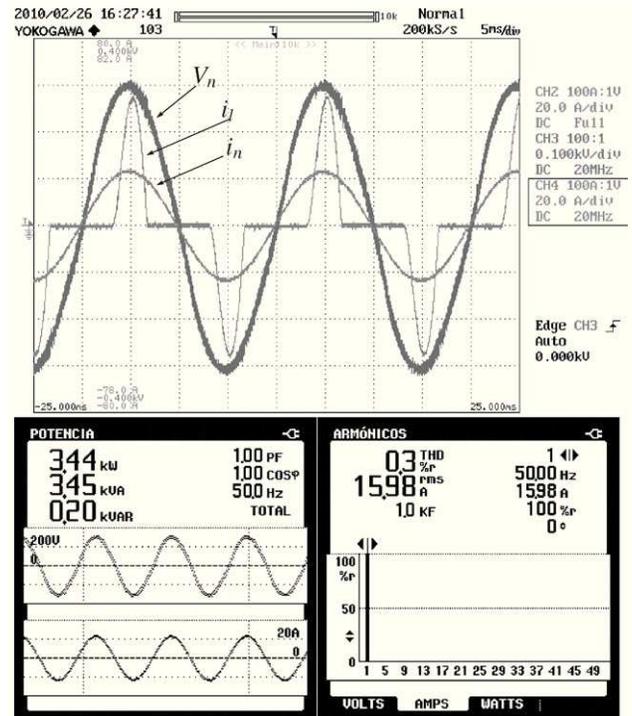


Figura 6: Corriente generada por un rectificador de diodos conectado a la red de distribución cuando se incorpora un filtro activo y se usa RC tradicional ( $V_n$ : tensión de la red;  $i_j$ : corriente de la carga;  $i_n$ : corriente de la red). La frecuencia nominal es de 50Hz.

Dado que el modelo interno de RC presenta un orden elevado, las leyes de control obtenidas mediante métodos DLAW implican un aumento substancial de los cálculos a realizar, contraviniendo así una de las ventajas del uso del RC. Este elevado orden dificulta, a su vez, la aplicación de los métodos de ajuste genéricos propuestos recientemente, pues estos se basan en la resolución de Desigualdades Matriciales Lineales (LMI, por sus siglas en inglés), y los algoritmos numéricos disponibles actualmente no permiten trabajar con sistemas de orden elevado. A pesar de estos inconvenientes la literatura recoge diferentes trabajos de RC en esta dirección (Flores et al., 2010), puesto que permiten gran flexibilidad en la especificación del comportamiento dinámico deseado. En Sbarbaro et al. (2009) se presenta un esquema específico para RC que, pese no seguir el enfoque estándar DLAW, propone el uso de una realimentación que cancela la dinámica del modelo interno durante la saturación e impone una alternativa de menor orden, compartiendo el aumento de cómputo y también algunas de las ventajas del DLAW.

La idea fundamental que subyace detrás de los enfoques MRAW consiste en incorporar una realimentación con un filtro que en su versión más simple es  $AW(z) = P(z)$  (véase la Figura 4). Ello hace que, desde el punto de vista del controlador, el sistema de lazo cerrado se mantenga invariante pese a la aparición de la saturación. Este esquema se ha validado experimentalmente (Costa-Castelló et al., 2010) y ofrece una

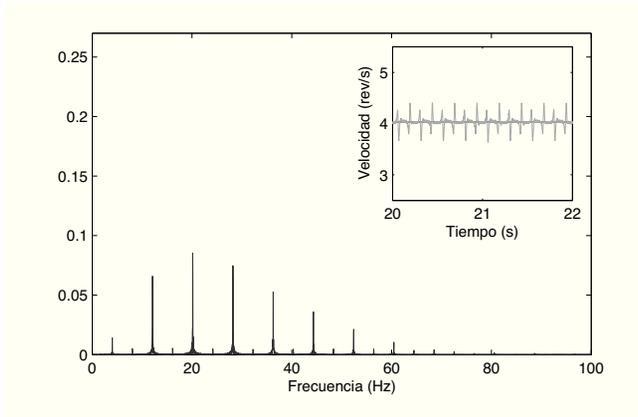


Figura 7: Sistema rotatorio sometido a perturbaciones periódicas, con RC diseñado para una velocidad nominal  $\omega = 4\text{rev/s}$  y trabajando a una velocidad de referencia de  $4,03\text{rev/s}$ : velocidad de giro,  $\omega$ , y transformada de Fourier de  $\omega$  (una vez eliminada la componente continua), en régimen permanente.

aproximación simple que no aumenta en exceso la complejidad del RC. A diferencia de que acontece en los enfoques DLAW basados en la resolución de LMI, los esquemas MRAW son directamente aplicables, pues las LMI a resolver son únicamente del orden de la planta. Estas propuestas permiten ajustar la forma en que el sistema retorna al régimen lineal una vez superada la saturación, manteniendo así la simplicidad y la poca carga computacional propia del RC.

### 3.4. Resultados experimentales

La Figura 5 muestra la velocidad del sistema giratorio introducido en la Sección 2.1 trabajando en lazo cerrado con un RC como el anteriormente descrito. Puede observarse que el controlador es capaz de rechazar de forma casi perfecta las perturbaciones y, por ello, la velocidad de giro se mantiene constante en todo momento. De forma similar, la Figura 6 muestra las corrientes de carga y red generadas por un rectificador de diodos conectado a la red cuando se incorpora un filtro activo (véase la Sección 2.2) controlado mediante un RC (Costa-Castelló et al., 2009). Nótese que, en este caso, la corriente de red es una señal sinusoidal casi perfecta, a pesar de que la corriente de carga presenta un gran número de armónicos.

Se ejemplifican así las prestaciones ofrecidas por el RC cuando la frecuencia de las señales a seguir/rechazar es conocida.

### 3.5. Degradación de prestaciones por variaciones de frecuencia

En la mayoría de aplicaciones prácticas la frecuencia no es exactamente conocida o varía con el tiempo. A modo de ejemplo, en los sistemas rotatorios introducidos en la Sección 2.1 las perturbaciones dependen de la velocidad de giro, y ésta puede cambiar en algunos casos, o bien no coincidir exactamente con la velocidad nominal consignada, para la cual se ha diseñado el correspondiente RC. La Figura 7 muestra el comportamiento del sistema cuando ambas velocidades no coinciden. Obsérvese el elevado número de armónicos de la señal de velocidad, asociadas a la degradación del comportamiento del sistema.

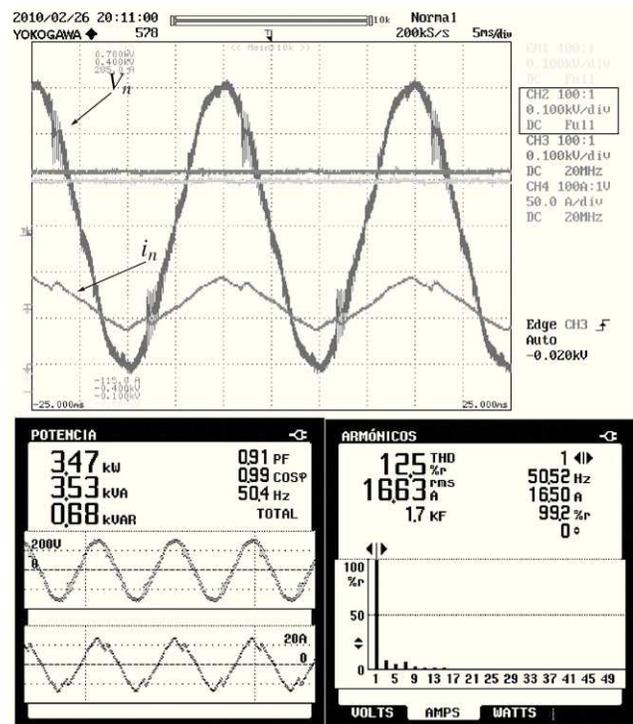


Figura 8: Corriente generada por un rectificador de diodos conectado a la red de distribución cuando se incorpora un filtro activo y se usa RC tradicional ( $V_n$ : tensión de la red;  $i_l$ : corriente de la carga;  $i_n$ : corriente de la red). Frecuencia nominal: 50Hz; frecuencia de red: 50,5Hz.

Equivalentemente, en el filtro activo (véase Sección 2.2) la frecuencia nominal de la red de distribución, para la cual se ha diseñado el RC, puede sufrir ligeras variaciones en función de su estado o del punto del conexión. Así, la Figura 8 muestra el comportamiento en régimen permanente del filtro cuando la frecuencia de la red de distribución varía de 50Hz a 50,5Hz. Puede comprobarse que la corriente de red deja de ser una señal sinusoidal perfecta para convertirse en una señal periódica con diferentes armónicos, degradando así las prestaciones del sistema y, en particular, la calidad de la corriente de red.

Esta degradación puede explicarse de diferentes maneras. La más sencilla es desde un punto de vista frecuencial. La capacidad de seguimiento/rechazo de señales está directamente ligada a la elevada ganancia del modelo interno a la frecuencia de trabajo y sus armónicos. La Figura 9 muestra dicha ganancia en función del período de la señal para los armónicos  $k = 1, 2, \text{ y } 3$ . Como puede verse, la ganancia decae drásticamente al alejarnos del período nominal, y eso es aún peor para armónicos superiores. Esta reducción en la ganancia es la causa principal de la pérdida de prestaciones del RC cuando la frecuencia de trabajo es incierta o varía ligeramente con el tiempo.

## 4. Control repetitivo para frecuencia variable

En los últimos años se han efectuado diferentes propuestas, la mayoría adaptativas, encaminadas a mantener las prestacio-

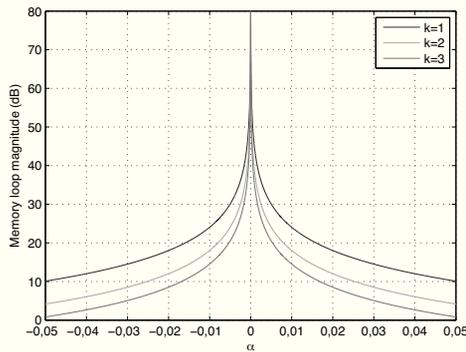


Figura 9: Ganancia de  $I(z) = \frac{z^{-N(1+\alpha)}}{1-z^{-N(1+\alpha)}}$  en las frecuencias armónicas  $\frac{2\pi k}{N}$  para  $k = 1, 2, 3$ .

nes del RC cuando la frecuencia es incierta o variante en el tiempo. Éstas pueden agruparse en dos grandes ámbitos: las que utilizan período de muestreo variable y las que lo mantienen constante. El cambio en el período de muestreo es un proceso que puede ser complejo en algunas plataformas de implementación, además de implicar un aumento en la complejidad de los análisis de estabilidad, mientras que los métodos que adaptan el período de muestreo suelen presentar una estructura e implementación más simple. En contrapartida, éstos últimos permiten, por lo general, mantener prestaciones en un rango de incertidumbre/variación frecuencial menor que en el caso de adaptación del período de muestreo.

A continuación se revisan los principales trabajos sobre el tema recogidos en la literatura. Sin embargo, antes de entrar en materia es importante comentar que la mayoría de enfoques requieren el uso de un estimador de frecuencia. Brevemente, puesto que este aspecto se sitúa fuera del ámbito del artículo, cabe resaltar que existen un gran número de métodos y propuestas al respecto, siendo las más apropiadas aquellas diseñadas *ad-hoc*. Así, en electrónica de potencia suelen usarse esquemas basados en Phase-Locked Loop (Hsieh and Hung, 1996), mientras que en los sistemas rotatorios no es necesario el estimado pues la frecuencia es función de la velocidad de giro.

#### 4.1. Frecuencia de muestreo variable

En este apartado se discuten las técnicas que proponen una adaptación del período de muestreo,  $T_s$ , con el fin de mantener constante la relación  $N = \frac{T_p}{T_s}$  (Hillerström, 1994). Esta estrategia permite preservar las prestaciones en régimen estacionario, esto es, cuando  $T_p$  se estabiliza en un valor constante, manteniendo una baja carga computacional. La Figura 10 muestra un ensayo sobre el sistemas rotatorio de la Sección 2.1 en el que la velocidad varía con el tiempo: obsérvese que las prestaciones se mantienen incluso durante el transitorio. De forma similar, la Figura 11 muestra el comportamiento del filtro activo de la Sección 2.2 trabajando a 52Hz con un esquema de adaptación del período de muestreo. Nótese que las prestaciones son similares

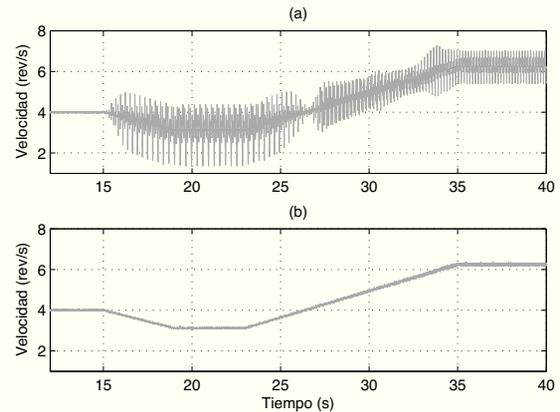


Figura 10: Velocidad de giro de un sistema rotatorio sometido a perturbaciones periódicas, con RC diseñado para: (a) período de muestreo constante y velocidad nominal de  $\omega = 4 \text{ rev/s}$ ; (b) adaptación del período de muestreo.

a las obtenidas en el caso de trabajar a la frecuencia nominal. Puede concluirse, por tanto, que este procedimiento de adaptación permite mantener las prestaciones en diferentes tipos de aplicaciones. En contrapartida, aumentan notablemente las dificultades de análisis de estabilidad y diseño de controladores, puesto que la estructura del sistema pasa de Lineal e Invariante en el Tiempo a Lineal y Variable en el Tiempo (LTI, LTV, respectivamente, por sus siglas en inglés).

En el apartado 4.1.1 se presentan mecanismos de análisis de estabilidad para sistemas LTV utilizados en RC. El apartado 4.1.2 propone una técnica para compensar el efecto del muestreo aperiódico y dejar invariante el sistema de lazo cerrado. Aunque todos estos métodos han sido aplicados a RC, cabe resaltar que son aplicables, en general, a cualquier sistema de control digital que trabaje con período de muestreo variable.

##### 4.1.1. Análisis de estabilidad en sistemas LTV

Puede demostrarse que las ecuaciones de estado del sistema de lazo cerrado que incorpora un RC con período de muestreo variable pueden escribirse como un sistema LTV de tiempo discreto de la forma (Olm et al., 2011):

$$x_{k+1} = \Phi(T_k)x_k + \Pi(T_k)r_k, \quad y_k = \Upsilon x_k, \quad (5)$$

donde  $y_k$ ,  $x_k$  y  $r_k$  corresponden a la salida, vector de estado y referencia en el instante de muestreo  $t_k$ , respectivamente, y siendo  $T_k = t_{k+1} - t_k$ .

Supongamos, además, que el período de muestreo  $T_k$  toma valores en  $\mathcal{T} = [T_0, T_f]$ . Entonces, la estabilidad exponencial uniforme de

$$x_{k+1} = \Phi(T_k)x_k \quad (6)$$

implica la estabilidad BIBO de (5). Así, es condición suficiente para la estabilidad exponencial uniforme de (6) que exista una matriz  $P$  tal que (Rugh, 1995)

$$L_{T_k}(P) = \Phi(T_k)^T P \Phi(T_k) - P < 0, \quad \text{s.a. } P = P^T > 0. \quad (7)$$

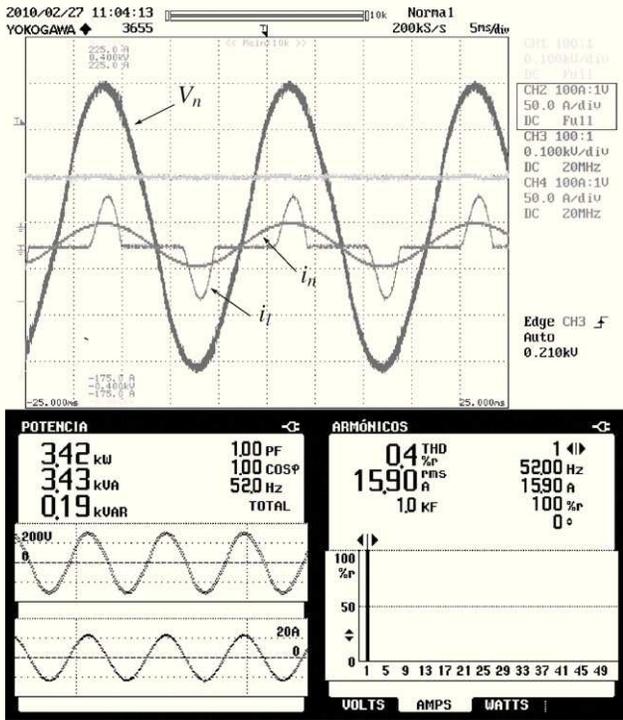


Figura 11: Corriente generada por un rectificador de diodos conectado a la red de distribución cuando se incorpora un filtro activo y se usa RC con período de muestreo adaptativo ( $V_n$ : tensión de la red;  $i_L$ : corriente de la carga;  $i_I$ : corriente de la red). Frecuencia nominal: 50Hz; frecuencia de red: 52Hz.

Esto equivale a buscar una función de Lyapunov cuadrática y constante para (6) en  $\mathcal{T}$ , i.e., de la forma  $V_k = 1/2 \cdot x_k^T P x_k$ . Una manera de atacar el problema consiste en utilizar métodos basados en mallado LMI (Apkarian and Adams, 1998; Sala, 2005). Este esquema, inicialmente propuesto para el análisis, puede ser extendido al diseño de controladores, dejando algunos de los elementos del RC (esto es,  $L(z)$  o  $C(z)$ ) como parámetros libres y solucionando las correspondientes LMI. Esto puede hacerse suponiendo el controlador constante o bien variante, siguiendo en este último caso un enfoque de sistemas Lineales de Parámetros Variantes (LPV) (Robert et al., 2006, 2010). Sin embargo, la aplicabilidad del mallado LMI está limitada por el elevado orden del modelo interno utilizado en el RC, y solamente se ha podido aplicar con éxito en sistemas con  $N$  pequeño, esto es, del orden de 20 (Ramos et al., 2011). Desafortunadamente, los sistemas introducidos anteriormente no son analizables mediante estos métodos.

Una alternativa al enfoque de Lyapunov se basa en modelar la dinámica de la planta con una parte invariante, dependiente del período de muestro nominal,  $\bar{T}$ , más otra parte que contiene la variación asociada al muestreo no uniforme. Así, considerando este último término como una incertidumbre pueden aplicarse técnicas de control robusto, bien sea para el análisis de estabilidad (Fujioka, 2008; Suh, 2008) o para el diseño. Concretamente, el procedimiento consiste en escribir la matriz  $\Phi(T_k)$

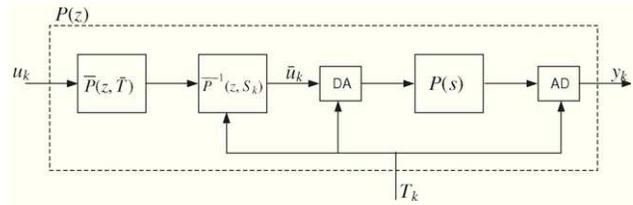


Figura 12: Esquema del método de adaptación-compensación del muestreo variable.

de (6) como

$$\Phi(T_k) = \Phi(\bar{T}) + \Delta(T_k - \bar{T}),$$

donde  $\Phi(\bar{T})$  es constante pues sólo depende del período de muestreo nominal, mientras que  $\Delta(T_k - \bar{T})$  concentra la variación debida a la desviación respecto del muestreo nominal. Finalmente, es necesario obtener cotas para  $\Delta(T_k - \bar{T})$  (Fujioka, 2008; Suh, 2008). En Olm et al. (2011) se particulariza el análisis para RC, mejorándose substancialmente estas cotas. Mediante esta técnica puede probarse la estabilidad del controlador RC adaptativo diseñado para el sistema rotatorio con velocidad nominal de 4rev/s ( $\bar{T} = 1\text{ms}$ ,  $N = 250$ ) en el rango [2,24, 18,27] rev/s. Análogamente, el sistema de control del filtro activo diseñado para 50Hz ( $\bar{T} = \frac{1}{2000}$ ,  $N = 400$ ) asegura estabilidad si la frecuencia de red se mantiene en el intervalo [45, 66] Hz. Ambos intervalos son suficientes para las aplicaciones previstas, pero en caso contrario debería rediseñarse el controlador para que fuese capaz de gestionar la incertidumbre asociada al rango de trabajo deseado.

La aproximación basada en la asimilación de la variación de la planta a una incertidumbre presenta una aproximación más compacta y sencilla de manejar. Sin embargo puede resultar más conservadora y, por tanto, no garantizar estabilidad aunque ésta exista. En cambio, la aproximación basada en LMI resulta menos conservadora, pero su aplicabilidad está limitada a sistemas de muy bajo orden.

#### 4.1.2. Adaptación-compensación del muestreo variable

En este apartado se describe una técnica que permite cancelar el efecto del muestreo variable y conseguir que la planta presente el comportamiento correspondiente al período de muestreo nominal (Olm et al., 2010). La Figura 12 muestra el esquema propuesto: entre la planta y el RC previamente diseñado para el período nominal se incorporan dos nuevos elementos,  $\bar{P}(z, \bar{T})$  y  $\bar{P}^{-1}(z, S_k)$ , donde  $S_k = \{T_k, \dots, T_{k-p}\}$ , siendo  $p$  el orden de  $P(s)$ . El primero corresponde al modelo nominal de tiempo discreto obtenido para el período de muestreo nominal,  $\bar{T}$ , mientras que el segundo corresponde a un filtro variante en el tiempo que cancela el comportamiento de la planta en los instantes de muestreo. Así, la dinámica conjunta de todos los elementos se corresponde con la definida por  $P(z)$ , que es causal e invariante en el tiempo. Esta invarianza, unida al hecho de que el diseño del RC para el muestreo nominal es estable, garantiza la estabilidad del sistema de control completo.

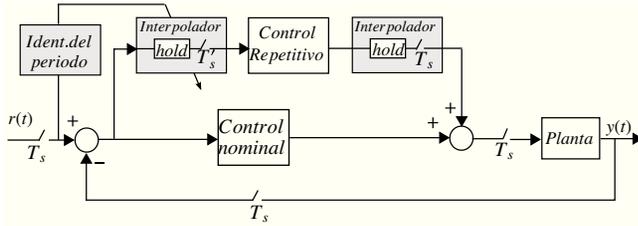


Figura 13: Esquema de interpolación-diezclado para RC con señales de frecuencia variable.

A diferencia del enfoque puramente adaptativo, el método ahora descrito deja invariante la función de transferencia del sistema de lazo cerrado, cosa que permite aplicar la teoría LTI para el estudio del sistema. Ello incluye la caracterización de respuestas transitorias, que resultaba de difícil análisis a partir del enfoque anterior. Por otra parte, la técnica requiere la estabilidad interna de sistema mostrado en la Figura 12. Esto puede verificarse por diferentes métodos, entre ellos los introducidos en la subsección anterior. Finalmente, la estabilidad interna implica que el modelo de la planta muestreada debe ser de fase mínima, cosa que limita la aplicabilidad del método.

#### 4.2. Frecuencia de muestro fija

##### 4.2.1. Interpolación y diezmado

Como ya se ha observado, para mantener las prestaciones del RC es necesario que la frecuencia del modelo interno y la de la señal muestreada coincidan, esto es, que  $N = \frac{T_p}{T'_s}$ . Con el fin de mantener el período de muestreo constante y cumplir a la vez la relación anterior, en Cao and Ledwich (2002) se propuso el uso de mecanismos de interpolación y diezmado. Para ello se introduce un período de muestreo auxiliar  $T'_s$ , de tal manera que  $N = \frac{T_p}{T'_s} \frac{T'_s}{T_s} = \frac{T_p}{T_s}$ . Posteriormente, mediante un procedimiento inverso se retorna la señal a la frecuencia inicial. El diagrama del proceso puede verse en la Figura 13. En Álvarez et al. (2007) se ha empleado este mismo esquema para el control de un intercambiador de calor.

Este enfoque mantiene tanto la estructura del sistema como el período de muestreo original. Sin embargo presenta problemas importantes en el análisis de estabilidad, pues no encaja en la formulaciones tradicionales. Adicionalmente, es importante recalcar que los procesos de interpolación y diezmado incorporan filtros pasabajos, los cuales deben diseñarse teniendo en cuenta los períodos de entrada y salida ( $T'_s$  y  $T_s$ , respectivamente). Por tanto, en el caso de aplicación de la técnica de interpolación y diezmado con  $T'_s$  variable dichos filtros deberían ser también variantes en el tiempo.

##### 4.2.2. Control repetitivo de alto orden

El RC de Alto Orden (HORC, por sus siglas en inglés) utiliza un modelo interno con

$$W(z) = \sum_{i=1}^m w_i z^{-iN},$$

en el que usualmente  $\sum_{i=1}^m w_i = 1$  (véase la Figura 3), es decir, en lugar de utilizar información de un período se utiliza

Bloques de retardo	$w_1$	$w_2$	$w_3$
Inoue (1990)	1/3	1/3	1/3
Chang (1996)	1/2	1/3	1/6
Steinbuch (2002)	3	-3	1
Pipeleers (2008)	-1.65	1.52	-0.65

Tabla 1: Ejemplos de los valores de los pesos siguiendo los diferentes métodos de ajuste descritos para  $m = 3$ .

información de  $m$  períodos de la señal. La principal diferencia entre los diversos enfoques HORC existentes se encuentra en la selección del orden,  $m$ , y en el valor de los pesos,  $w_i$ .

Como es conocido, el efecto cama de agua (Doyle et al., 1992) limita las prestaciones que puede obtenerse mediante control lineal. El RC no es inmune a esta problemática (Songchon and Longman, 2001), puesto que su implementación comporta una amplificación de las frecuencias interarmónicas (véase la Figura 14), con la consiguiente degradación del comportamiento del sistema de lazo cerrado. Aunque esto es así tanto para el RC tradicional como para el HORC, este problema es especialmente relevante para este último.

Así, dada la relación excluyente entre robustez a la variación de frecuencia y sensibilidad a las frecuencias no armónicas, la selección de los pesos  $w_i$  se plantea como un problema de optimización.

En Inoue (1990), el HORC se usa para mejorar el comportamiento entre frecuencias armónicas. La función de coste a minimizar es el valor medio del cuadrado de  $S_M(z)$ , esto es,

$$J = \int_0^\pi |S_{MW}(e^{j\omega})|^2 d\omega,$$

cosa que implica que todos los pesos deben ser iguales y de valor  $w_i = 1/m$ . En Chang et al. (1995), el objetivo es reducir el espectro del error considerando los componentes armónicos y no armónicos, es decir, debe obtenerse  $\min_{w_i} \|S_M(z)\|_\infty$ .

En Steinbuch (2002), se pretende reducir la sensibilidad frente a variaciones en el período de la señal. Para ello se anulan las  $m$  primeras derivadas respecto del período de la señal de  $S_M(z)$  en la frecuencia de trabajo y sus armónicos. Ello permite mantener la ganancia de  $S_M(z)$  elevada en un intervalo alrededor de las frecuencias armónicas. Este problema presenta solución analítica.

En Steinbuch et al. (2007), se generalizan los resultados de Chang et al. (1995) mediante la resolución del problema

$$\min_{w_i} \|G(\bar{\omega})S_M(\bar{\omega})\|_\infty,$$

donde  $G(\bar{\omega})$  es una función de peso que determina el intervalo en el cual la norma de  $S_M(\omega)$  será minimizada. Los resultados de Steinbuch (2002) y Chang et al. (1995) corresponderían a casos particulares de esta propuesta.

En Pipeleers et al. (2008), a diferencia de las anteriores, se elimina la restricción  $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ . Ello reduce la ganancia en las frecuencias armónicas, lo cual permite obtener mejores resultados en las frecuencias no armónicas. Los resultados de Chang et al. (1995), Steinbuch (2002) y Steinbuch et al. (2007) corresponderían a casos particulares de esta propuesta.

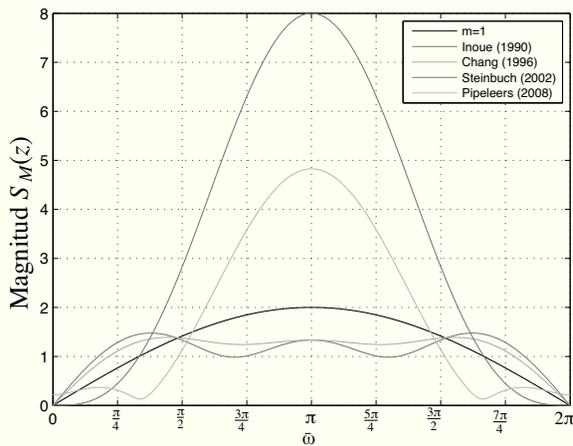


Figura 14: Respuesta en magnitud de  $S_M(z)$  en frecuencias normalizadas  $\tilde{\omega} = \omega N$ . Comparación entre el modelo interno tradicional ( $m = 1$ ), Inoue (1990), Chang et al. (1995), Steinbuch (2002), y Pipeleers et al. (2008) para  $m = 3$ .

La Figura 14 muestra la respuesta en magnitud de la función de sensibilidad,  $S_M(z)$ , para el modelo interno tradicional, (1), obtenido haciendo  $m = 1$  y con  $m = 3$ , para los diferentes métodos de ajuste descritos anteriormente. A su vez, la Tabla 1 contiene el valor de los pesos para cada uno de los casos. Como puede observarse en el ajuste propuesto en Steinbuch (2002), en las frecuencias armónicas la función de sensibilidad toma valor 0 y mantiene valores muy pequeños en una vecindad de las mismas, cosa que lo hace robusto frente a variaciones en la frecuencia de la señal; en contrapartida, esta opción eleva mucho el valor de la función de sensibilidad para frecuencias interarmónicas. En el diseño propuesto en Pipeleers et al. (2008), pese a que la función de sensibilidad no toma valores nulos en las frecuencias armónicas, mantiene valores bajos en un rango amplio de frecuencias. Además, reduce la amplificación interarmónica, es decir, sacrifica parte de las prestaciones en las frecuencias armónicas para mejorar el comportamiento interarmónico. También se puede observar que, a pesar de mejorar el comportamiento interarmónico, las propuestas de Inoue (1990) y Chang et al. (1995) no representan un diseño robusto ante cambios en el periodo de las señales de trabajo.

En Pipeleers et al. (2009), la función  $W(z)$  toma la forma  $W(z) = \sum_{i=p}^k w_i z^{-i}$ , donde  $p \in \mathbb{N}$  se corresponde con el grado relativo de  $T_o(z)$  y  $k$  es un parámetro a determinar. Nótese que la suma ponderada de retardos del periodo de las señales se substituye por una suma ponderada de retardos. Este modelo interno se propone como una generalización a partir de la cual se pueden obtener los diseños estándar. Al igual que en Pipeleers et al. (2008), Pipeleers et al. (2009) basa el diseño de los pesos en un balance entre desempeño armónico e interarmónico. Adicionalmente, se muestra que se puede lograr una disminución en el orden del modelo interno a la vez que se mantienen las prestaciones.

En la Figura 15 se presentan los resultados de aplicar RC de segundo orden con ajuste de pesos según Steinbuch (2002) al sistema rotativo. Puede observarse que, pese a no trabajar

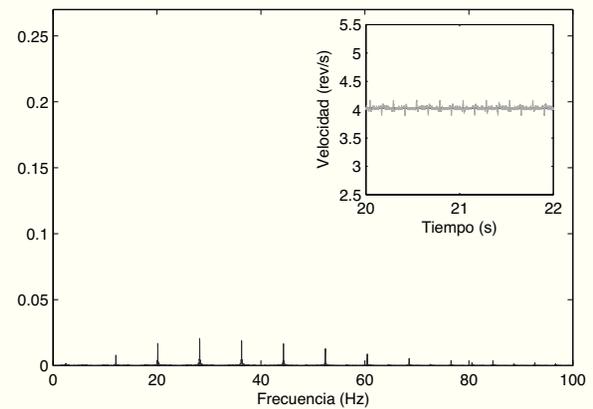


Figura 15: Sistema rotatorio sometido a perturbaciones periódicas, con RC de segundo orden diseñado para una velocidad nominal  $\omega = 4 \text{ rev/s}$  y trabajando a una velocidad de referencia de  $4,03 \text{ rev/s}$ : velocidad de giro,  $\omega$ , y transformada de Fourier de  $\omega$  (una vez eliminada la componente continua), en régimen permanente.

con la frecuencia nominal, la degradación es poca. Algo similar pasa al aplicar la misma estrategia al sistema de control del filtro activo, cuyos resultados se presentan en la Figura 16. En ambos casos el HARC es capaz de mantener las prestaciones cuando la frecuencia de trabajo presenta ligeras variaciones respecto la nominal sin variar ni el período de muestreo ni el carácter LTI del sistema original. El hecho de mantenerse dentro de un contexto LTI permite realizar análisis de transitorios y estudios de estabilidad marginal de forma sencilla.

Cabe destacar que el modelo interno presente en el HARC es, en muchos casos, inestable (Costa-Castelló and et al., 2010). Ello implica que el uso de estrategias *antiwindup* es aquí de vital importancia. Además, desde el punto de vista práctico el diseño del filtro pasabajos contenidos en el modelo interno,  $Q(z)$ , resulta más complejo y crítico que para el RC tradicional.

#### 4.2.3. Retardo fraccionario

En muchas ocasiones es complicado mantener la relación  $N = \frac{T_p}{T_s}$  pues  $T_s$  no puede fijarse con precisión. Una alternativa a la variación de  $T_s$  consiste en utilizar un retardo fraccionario,  $z^{-\eta}$ ,  $\eta \in \mathbb{R}$ . La implementación de este tipo de elementos puede hacerse, por ejemplo, implementando la parte entera del retardo con los mecanismos tradicionales y aproximando la parte fraccionaria mediante un filtro FIR (Laakso et al., 1996). La Figura 17 muestra una comparación de los resultados obtenidos con tres técnicas diferentes de cálculo de los parámetros de este filtro.

El uso de estas aproximaciones se ha probado como una técnica útil en la mejora de las prestaciones del RC (Yu and Hu, 2001; Wang et al., 2007a). Su uso en entornos de frecuencia variable implica disponer de métodos de cálculo en línea o analíticos del filtro aproximador. Esto convierte el sistema de lazo cerrado en LTV, lo cual dificulta el correspondiente estudio de estabilidad.

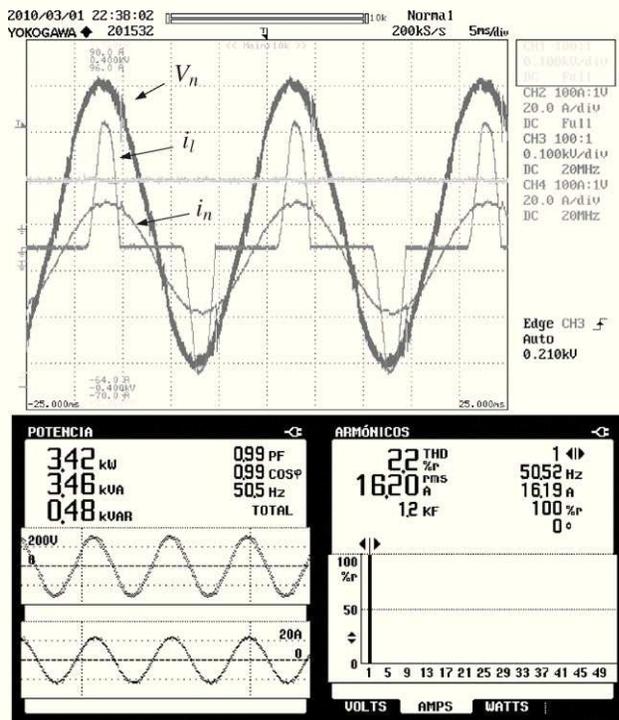


Figura 16: Corriente generada por un rectificador de diodos conectado a la red de distribución cuando se incorpora un filtro activo y se usa RC de segundo orden ( $V_n$ : tensión de la red;  $i_l$ : corriente de la carga;  $i_n$ : corriente de la red). Frecuencia nominal: 50Hz; frecuencia de red: 50,5Hz.

Este enfoque puede usarse de forma combinada con otras técnicas. Por ejemplo, con las de frecuencia de muestreo variable descritas en la Subsección 4.1, o con la que propone usar  $N$  variable presentada en la Subsección siguiente.

#### 4.2.4. $N$ variable

Como ya se ha reiterado a lo largo del artículo, el período de la señal de tiempo discreto,  $N$ , debe cumplir la relación  $N = \frac{T_p}{T_s}$ . En la Subsección 4.1 se ha analizado la adaptación de  $T_s$  con el objeto de mantener  $N$  fija frente a variaciones de  $T_p$ . En esta Subsección se analiza la adaptación de  $N$ .

Esta aproximación permite trabajar con un período de muestreo constante, pero en contrapartida se modifica el orden del sistema de lazo cerrado. Además, la calidad de la reconstrucción de la señal de tiempo continuo, entendida como el número de muestras por periodo de oscilación, no se mantiene constante y pasa a depender del valor concreto de  $N$ . Por otra parte, dado que  $N$  es un número entero sus variaciones difícilmente ajustan de forma exacta y, por lo tanto, la estrategia de adaptación consiste en aproximar  $\frac{T_p}{T_s}$  al entero más cercano (Dotsch et al., 1995; Manayathara et al., 1996); para la parte fraccionaria pueden utilizarse los retardos fraccionarios introducidos en la Subsección 4.2.3.

Des del punto de vista de análisis de estabilidad y diseño de controlares, esta técnica presenta dificultades importantes, esencialmente debidos a los cambios en el orden del sistema

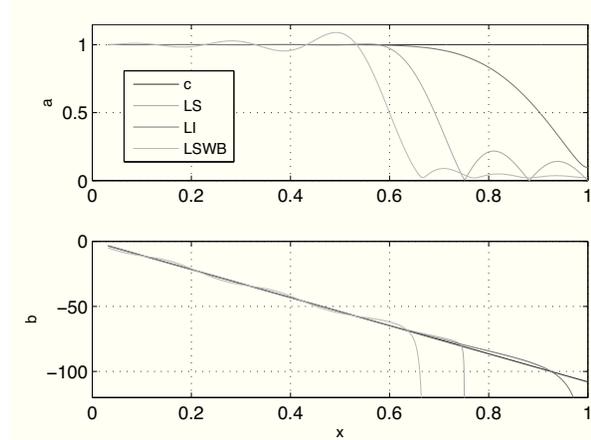


Figura 17: Respuesta en frecuencia de los filtros de retardo fraccionario. (I) Ideal ( $z^{-\alpha}$ ), (LS) Mínimos cuadrados, (LI) Interpolación de Lagrange y (LSWB) Mínimos cuadrados con banda ponderada.

que conllevan las variaciones de  $N$ . En Hu (1992) se realiza un estudio basado en caracterizar la estabilidad de un sistema de un orden que corresponde al obtenido para el valor máximo de  $N$ ; así, para modelar el efecto del cambio de  $N$  se opta por una matriz de transición de estados variable. Cuando el valor de  $N$  varía algunas de la filas de esta matriz se igualan a 0, emulando una congelación de los estados. Finalmente, se plantea un estudio del correspondiente sistema LTV con todas las posibles matrices, obtenidas a partir del rango de  $N$ , usando el método directo de Lyapunov.

Otro enfoque consiste en realizar el estudio de estabilidad desde un punto de vista entrada-salida. La idea es descomponer el período,  $N$ , en dos partes: una fija,  $N_{min}$ , y una variable,  $N_{\Delta}$ . La parte fija corresponde al valor mínimo de  $N$ , de acuerdo con el rango de frecuencia que se asume, mientras que la parte variable está asociada a la variación de frecuencia. Esta última se modela como una incertidumbre. En Merry et al. (2011) se utiliza el hecho que

$$|z^{N_{\Delta}}|_{\infty} = \sqrt{N^{max} - N^{min} + 1},$$

donde  $N^{max}$  es el valor máximo de  $N$  y, posteriormente, se realiza el diseño de un controlador substituyendo la condición de estabilidad (ii) establecida en la Sección 3.2 por:

$$|Q(z)(1 - T_o(z)L(z))|_{\infty} < \frac{1}{\sqrt{N^{max} - N^{min} + 1}}.$$

Alternativamente, en Yamada and Funahashi (2010) se tiene en cuenta que  $|z^{N_{\Delta}}|_1 = 1$  para diseñar un controlador que cumpla unas condiciones similares pero ahora en norma  $L_1$ . Esto último presenta mayor complejidad matemática, pero permite fijar relaciones entre los valores máximos de la perturbaciones y la salida, i.e., entre sus normas  $L_{\infty}$ .

Este enfoque puede relacionarse también con RC para sistemas en los que la periodicidad no es con el tiempo sino con alguna de las variables de estado, lo que se ha dado en llamar *spatial repetitive control* (Chen and Yang, 2007; Yang and Chen, 2008).

## 5. Conclusiones

En este trabajo se ha introducido la problemática que introduce el RC para sistemas en los que la frecuencia de las señales es incierta o variante en el tiempo. Se han analizado las causas de la pérdida de prestaciones en estas condiciones y las principales propuestas existentes en la literatura para afrontar la situación. Éstas han sido agrupadas en dos grandes bloques: las que proponen usar períodos de muestreo variable y las que utilizan períodos de muestreo fijo. Cabe recalcar también que estas propuestas pueden combinarse entre sí para mejorar prestaciones. En este sentido, en Tsao et al. (2000) se adaptan simultáneamente  $N$  y  $T_s$  con el fin de reducir el error de la relación  $T_p = N \cdot T_s$ . Sin embargo, esta opción dificulta el diseño de filtros estabilizantes y el propio análisis de estabilidad.

Desde un punto de vista práctico debe mencionarse que el HORC permite trabajar con variaciones de frecuencia pequeñas en un marco simple. Sin embargo, cuando las variaciones son amplias es conveniente recurrir a métodos adaptativos, siendo la adaptación del período de muestreo uno de los más simples a la hora de implementar.

Una clasificación alternativa a la seguida en este trabajo es la que tiene en cuenta la necesidad o no de un estimador de frecuencia. Los métodos que no necesitan estimador de frecuencia, que en los casos aquí estudiados se reducen al HORC, presentan una notable simplificación en implementación, aunque no permiten gestionar variaciones de frecuencia tan amplias como cuando se dispone de estimador. A su vez, las prestaciones de los métodos que requieren de estimadores de frecuencia dependen en gran medida de la bondad de dichos estimadores. Estos métodos también presentan dificultades en el estudio de estabilidad. Finalmente, es importante añadir que las técnicas descritas no asumen limitaciones en la velocidad de variación de la frecuencia de las señales o de su estimación. Aunque aportaría complicaciones analíticas, introducir limitaciones en dicha variación debería permitir obtener intervalos de estabilidad más amplios.

Es también importante enfatizar el papel de las técnicas *antiwindup* en el RC, y especialmente para HORC. Los métodos *antiwindup* discutidos aquí son fácilmente aplicables a los esquemas adaptativos o de orden alto.

## English Summary

### Digital repetitive control of systems with uncertain or time-varying frequency

#### Abstract

Digital repetitive control is an internal model principle-based control technique that aims at tracking/rejecting periodic signals. A key assumption in traditional repetitive control designs is that the frequency of such signals is constant and known, its main drawback being the dramatic loss of performance that occurs when this frequency is uncertain or time-varying. This article reviews the most relevant proposals introduced so far to overcome this problem.

**Keywords:** Learning control, Linear control systems, Discrete-time systems, Output regulation

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el MEC mediante el proyecto DPI2010-15110.

## Referencias

- Akagi, H., 1996. New trends in active filters for power conditioning. IEEE Trans. on Industry Applications 32 (6), 1312–1322.
- Álvarez, J., Yebra, L., Berenguel, M., 2007. Repetitive control of tubular heat exchangers. Journal of Process Control 17 (9), 689–701.
- Apkarian, P., Adams, R., 1998. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. IEEE Trans. Control Systems Technology 6 (1), 21–32.
- Bristow, D. A., Tharayil, M., Alleyne, A. G., 2006. A survey of iterative learning control. IEEE Control Systems Magazine 26 (3), 94–114.
- Buso, S., Malesani, L., Mattavelli, P., 1998. Comparison of current control techniques for active filters applications. IEEE Trans. Industrial Electronics 45 (5), 722–729.
- Cao, Z., Ledwich, G. F., 2002. Adaptive repetitive control to track variable periodic signals with fixed sampling rate. IEEE/ASME Trans. Mechatronics 7 (3), 374–384.
- Chang, W. S., Suh, I. H., Kim, T. W., 1995. Analysis and design of two types of digital repetitive control systems. Automatica 31 (5), 741–746.
- Chen, C.-L., Yang, Y.-H., 2007. Adaptive repetitive control for uncertain variable-speed rotational motion systems subject to spatially periodic disturbances. pp. 564–569.
- Chen, S.-L., Hsieh, T.-H., 2007. Repetitive control design and implementation for linear motor machinet tool. Int. J. of Machine Tools and Manufacture 47 (12-13), 1807 – 1816.
- Chew, K., Tomizuka, M., 1990. Digital control of repetitive errors in disk drive systems. IEEE Control Systems Magazine 10 (1), 16–20.
- Choi, G. S., Lim, Y. A., Choi, G. H., 2002. Tracking position control of piezoelectric actuators for periodic reference inputs. Mechatronics 12 (5), 669–684.
- Costa-Castelló, R., Griñó, R., Cardoner, R., Fossas, E., 2009. High-performance control of a single-phase shunt active filter. IEEE Trans. Control Systems Technology 17 (6), 1318–1329.
- Costa-Castelló, R., Nebot, J., Griñó, R., 2005. Demonstration of the internal model principle by digital repetitive control of an educational laboratory plant. IEEE Trans. Education 48 (1), 73–80.
- Costa-Castelló, R., Olm, J. M., Ramos, G. A., Cardoner-Parpal, R., 2010. Odd-harmonic repetitive control of an active filter under varying network frequency: Practical considerations. In: Proc. IEEE Int. Conf. on Control Applications. pp. 398–403.
- Costa-Castelló, R., Ramos, G., Olm, J., Steinbuch, M., 2010. Second-order odd-harmonic repetitive control and its application to active filter control. In: Proc. 49th IEEE Conf. on Decision and Control. pp. 6967–6972.
- Cuiyan, L., Dongchun, Z., Xianyi, Z., 2004. A survey of repetitive control. Vol. 2. pp. 1160 – 1166.
- Daley, S., Hätönen, J., Owens, D., 2006. Active vibration isolation in a mount using a repetitive control approach. Control Engineering Practice 14 (9), 991–997.
- Dotsch, H., Smakman, H., Van den Hof, P., Steinbuch, M., 1995. Adaptive repetitive control of a compact disc mechanism. In: Proc. 34th IEEE Conf. on Decision and Control. Vol. 2. pp. 1720–1725.
- Doyle, J. C., Francis, B. A., Tannenbaum, A. R., 1992. Feedback Control Theory. Macmillan Publishing Co.
- Escobar, G., Hernandez-Briones, P., Torres-Olguin, R., Valdez, A., 2007. A repetitive-based controller for the compensation of  $6l \pm 1$  harmonic components. In: Proc. IEEE Int. Symp. on Industrial Electronics. pp. 3397–3402.
- Flores, J., Gomes da Silva, J., Pereira, L., Sbarbaro, D., 2010. Robust repetitive control with saturating actuators: a lmi approach. In: Proc. American Control Conference. pp. 4259–4264.
- Francis, B., Wonham, W., 1976. The internal model principle of control theory. Automatica 12 (5), 457–465.

- Fujioka, H., 2008. Stability analysis for a class of networked/embedded control systems: A discrete-time approach. pp. 4997–5002.
- Galeani, S., Tarbouriech, S., Turner, M., Zaccarian, L., 2009. A tutorial on modern anti-windup design. *European Journal of Control* 15 (3-4), 418–440.
- Griñó, R., Costa-Castelló, R., 2005. Digital repetitive plug-in controller for odd-harmonic periodic references and disturbances. *Automatica* 41 (1), 153–157.
- Hara, S., Yamamoto, Y., Omata, T., Nakano, M., 1988. Repetitive control system: a new type servo system for periodic exogenous signals. *IEEE Trans. Automatic Control* 33 (7), 659–668.
- Hattori, S., Ishida, M., Hori, T., 2000. Suppression control method for torque vibration of brushless dc motor utilizing repetitive control with fourier transform. In: Proc. 6th Int. Workshop on Advanced Motion Control. pp. 427–432.
- Hillerström, G., 1994. On repetitive control. Ph.D. thesis, Lulea University of Technology.
- Hillerström, G., Lee, R. C., 1997. Trade-offs in repetitive control. Tech. Rep. CUED/F-INFENG/TR 294, University of Cambridge.
- Hsieh, G.-C., Hung, J. C., 1996. Phase-locked loop techniques. a survey. *IEEE Trans. Industrial Electronics* 43 (6), 609–615.
- Hu, J.-S., 1992. Variable structure digital repetitive controller. In: Proc. American Control Conference. pp. 2686–2690.
- Huang, W., Cai, L., Tang, X., 1998. Adaptive repetitive output feedback control for friction and backlash compensation of a positioning table. In: Proc. 37th IEEE Conf. on Decision and Control. Vol. 2. pp. 1250–1251.
- Inoue, T., 1990. Practical repetitive control system design. In: Proc. 29th IEEE Conf. on Decision and Control. pp. 1673–1678.
- Inoue, T., Nakano, M., Kubo, T., Matsumoto, S., Baba, H., 1981. High accuracy control of a proton synchrotron magnet power supply. In: Proc. 8th IFAC World Congress. pp. 216–220.
- Kasac, J., Novakovic, B., Majetic, D., Brezak, D., 2008. Passive finite-dimensional repetitive control of robot manipulators. *IEEE Trans. Control Systems Technology* 16 (3), 570–576.
- Kim, D. H., Tsao, T.-C., March 2000. Robust performance control of electrohydraulic actuators for electronic motion generation. *IEEE Trans. Control Systems Technology* 8 (2), 220–227.
- Laakso, T., Valimäki, V., Karjalainen, M., Laine, U., 1996. Splitting the unit delay (FIR/all pass filters design). *IEEE Signal Processing Magazine* 13 (1), 30–60.
- Li, M., He, Z., Xing, Y., 2006. Analysis and design of repetitive controlled inverter system with high dynamic performance. In: Proc. Power Electronics and Motion Control Conference. Vol. 3. pp. 1–5.
- Longman, R. W., 2000. Iterative learning control and repetitive control for engineering practice. *International Journal of Control* 73 (10), 930–954.
- Manayathara, T., Tsao, T.-C., Bentsman, J., 1996. Rejection of unknown periodic load disturbances in continuous steelcasting process using learning repetitive control approach. *IEEE Trans. Control Systems Technology* 4 (3), 259–265.
- Merry, R., Kessels, D., Heemels, W., van de Molengraft, M., Steinbuch, M., 2011. Delay-varying repetitive control with application to a walking piezo actuator. *Automatica* 47 (8), 1737–1743.
- Nakano, M., Hara, S., 1986. Microprocessor-based repetitive control. In: *Microprocessor-Based Control Systems*. pp. 279–296.
- Nan, Y., Yu, L., Chen, Z., Wu, A., 2006. Study on repetitive controller for the position servo system of electrical injection molding machine. Vol. 2. pp. 8246–8250.
- Olm, J., Ramos, G., Costa-Castelló, R., 2011. Stability analysis of digital repetitive control systems under time-varying sampling period. *IET Control Theory Applications* 5 (1), 29–37.
- Olm, J. M., Ramos, G. A., Costa-Castelló, R., 2010. Adaptive compensation strategy for the tracking/rejection of signals with time-varying frequency in digital repetitive control systems. *Journal of Process Control* 20 (4), 551–558.
- Pipeleers, G., Demeulenaere, B., Schutter, J. D., Swevers, J., 2009. Generalised repetitive control: relaxing the period-delay-based structure. *IET Control Theory Applications* 3 (11), 1528–1536.
- Pipeleers, G., Demeulenaere, B., Sewers, S., 2008. Robust high order repetitive control: Optimal performance trade offs. *Automatica* 44 (10), 2628–2634.
- Ramos, G. A., Olm, J. M., Costa-Castelló, R., 2011. Digital repetitive control under non-uniform sampling: an LMI stability analysis. *Mathematical Problems in Engineering* 2011.
- Robert, D., Sename, O., Zsimeon, D., 2006. Synthesis of a sampling period dependent controller using LPV approach. In: Proc. 5th IFAC Symposium on Robust Control Design.
- Robert, D., Sename, O., Zsimeon, D., May 2010. An  $H_\infty$  LPV design for sampling varying controllers: experimentation with a T inverted pendulum. *IEEE Trans. Control Systems Technology* 18 (3), 741–749.
- Rugh, W. J., 1995. *Linear System Theory*, 2nd Edition. Prentice Hall.
- Ryu, Y. S., Longman, R., 1994. Use of anti-reset windup in integral control based learning and repetitive control. In: Proc. IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics: 'Humans, Information and Technology'. Vol. 3. pp. 2617–2622.
- Sala, A., 2005. Computer control under time-varying sampling period: an LMI gridding approach. *Automatica* 41 (12), 2077–2082.
- Sbarbaro, D., Tomizuka, M., de la Barra, B. L., 2009. Repetitive control system under actuator saturation and windup prevention. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 131 (4), 044505–044512.
- Songchon, T., Longman, R. W., 2001. On the waterbed effect in repetitive control using zero-phase filtering. In: Proc. of the AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. pp. 1321–1340.
- Steinbuch, M., 2002. Repetitive control for systems with uncertain period-time. *Automatica* 38 (12), 2103–2109.
- Steinbuch, M., Weiland, S., Singh, T., 2007. Design of noise and period-time robust high order repetitive control, with application to optical storage. *Automatica* 43 (12), 2086–2095.
- Suh, Y. S., 2008. Stability and stabilization of nonuniform sampling systems. *Automatica* 44 (12), 3222–3226.
- Sun, M.-X., He, X.-X., Chen, B.-Y., 2007. Repetitive learning control for time-varying robotic systems: A hybrid learning scheme. *Acta Automatica Sinica* 33 (11), 1189–1195.
- Tarbouriech, S., Turner, M., 2009. Anti-windup design: an overview of some recent advances and open problems. *IET Control Theory Applications* 3 (1), 1–19.
- Tomizuka, M., 1987. Zero phase error tracking algorithm for digital control. *Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control* 109 (1), 65–68.
- Tomizuka, M., 2008. Dealing with periodic disturbances in controls of mechanical systems. *Annual Reviews in Control* 32 (2), 193–199.
- Tsao, T.-C., Qian, Y.-X., Nemani, M., 2000. Repetitive control for asymptotic tracking of periodic signals with an unknown period. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 122 (2), 364–369.
- Wang, Y., Gao, F., III, F. J. D., 2009. Survey on iterative learning control, repetitive control, and run-to-run control. *Journal of Process Control* 19 (10), 1589–1600.
- Wang, Y., Wang, D., Zhang, B., Zhou, K., 2007a. Fractional delay based repetitive control with application to pwm dc/ac converters. In: Proc. IEEE Int. Conf. on Control Applications. pp. 928–933.
- Wang, Y., Wang, D., Zhou, K., Zhang, B., Ye, Y., 2007b. Modelling and robust repetitive control of pwm dc/ac converters. In: Proc. IEEE Int. Symp. on Intelligent Control. pp. 214–219.
- Yamada, M., Funahashi, Y., 2010. Sensitivity reduction of adaptive repetitive control system with asymptotical rejection against uncertain periodic disturbance. In: Proc. IEEE Int. Conf. on Control Applications. pp. 1672–1677.
- Yang, Y.-H., Chen, C.-L., 2008. Spatially periodic disturbance rejection using spatial-based output feedback adaptive backstepping repetitive control. In: Proc. American Control Conference. pp. 4117–4122.
- Yu, S.-H., Hu, J.-S., 2001. Asymptotic rejection of periodic disturbances with fixed or varying period. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 123 (3), 324–329.
- Zhou, K., Wang, D., January 2003. Digital repetitive controlled three-phase PWM rectifier. *IEEE Trans. Power Electronics* 18 (1), 309–316.