

DISEÑO DE CONTROLADORES EN VARIOS PUNTOS DE FUNCIONAMIENTO PARA UNA CLASE DE MODELOS BORROSOS TAKAGI-SUGENO AFINES

Carlos Ariño * Antonio Sala ** Jose Luis Navarro **

** Dpto. de Ingeniería de Sistemas Industriales y Diseño
Universitat Jaume I; Av. de Vicent Sos Baynat, s/n;
12071 Castelló de la Plana, España.
Email: arino@esid.uji.es*

*** Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática
Universidad Politécnica de Valencia; Camino de Vera, 14;
46022 Valencia, España.
Email: asala@isa.upv.es, joseluis@isa.upv.es*

Resumen: En el diseño de controladores para sistemas borrosos Takagi-Sugeno (TS) se asume la verificación de ciertas condiciones de sector; sin embargo, los cambios en la referencia pueden alterar la validez de esas condiciones. El objetivo de este trabajo es controlar un sistema TS afín en varios puntos de funcionamiento, mediante un cambio de variable no constante que elimine el efecto del término afín. Los resultados son válidos para una clase canónica de modelos borrosos TS afines, para los que se obtiene un sistema TS sin términos afines al cual se le pueden aplicar las técnicas usuales de control borroso basadas en LMIs. Los modelos canónicos estudiados tienen como representación del estado un sistema de variables básicas y sus derivadas. *Copyright © 2007 CEA-IFAC*

Palabras Clave: Control Borroso, modelos Takagi-Sugeno afines, modelos locales, LMI, cambios en la referencia.

1. INTRODUCCIÓN

En la última década, el diseño de controladores borrosos para modelos Takagi-Sugeno (TS) (Takagi and Sugeno, 1985) ha experimentado significativos avances (Sala *et al.*, 2005). Los modelos TS expresan el comportamiento de un sistema a través de una interpolación convexa de modelos lineales locales, donde las funciones de interpolación son funciones de pertenencia borrosas. Los diseños basados en optimización de Inecuaciones Matriciales Lineales (denotados en la literatura inglesa con el acrónimo LMI –Linear Matrix Inequalities–, que se utilizará asimismo

en este trabajo) (Tanaka and Wang, 2001; Kim and Lee, 2000; Liu and Zhang, 2003; Guerra and Vermeiren, 2004) se han aplicado ampliamente a este tipo de sistemas. Las condiciones LMI reseñadas son independientes de la forma de las funciones de pertenencia de los modelos. Se han propuesto recientemente condiciones menos conservativas basadas en información sobre la forma de dichas funciones de pertenencia (Ariño and Sala, 2007; Sala and Ariño, 2007). Parte del éxito de tales técnicas se debe a la existencia de metodologías sistemáticas para la identificación de modelos TS a partir de datos o ecuaciones de un sistema no lineal (Takagi and Sugeno, 1985; Tana-

ka and Wang, 2001; Babuska, 1998; Nelles *et al.*, 2000; Andújar *et al.*, 2006).

En la mayor parte de las anteriores referencias, el diseño de controladores mediante LMIs (Tanaka and Wang, 2001; Guerra and Vermeiren, 2004) requiere que los modelos locales del modelo borroso TS sean lineales: esto implica que compartan como punto de equilibrio el origen. El diseño del controlador se realiza para dicho punto. No se demuestra, por tanto, la estabilidad para cualquier cambio en la referencia.

El método de diseño propuesto en este trabajo trata de evitar estas deficiencias, asegurando estabilidad y prestaciones para cualquier cambio en la referencia, y tolerando que los modelos locales no compartan ningún punto de equilibrio. Para llevar a cabo esta tarea, se generaliza el cambio de variable incremental, usual en la linealización de sistemas, a un cambio no constante; dicho cambio permite tratar el modelo borroso TS con término afín como si se tratara de un modelo borroso TS ordinario, formado por modelos locales lineales sin el término afín.

Una restricción del enfoque es que los modelos locales afines deben estar representados siguiendo una determinada forma canónica, que en el caso monovariable se corresponde a la elección de la salida y sus sucesivas derivadas como variables de estado. No obstante, este sistema canónico tiene un claro sentido físico y es utilizado habitualmente como forma canónica tanto en sistemas lineales (Antsaklis and Mitchel, 1997) como no lineales (forma normal) (Slotine and Li, 1991).

Existen desarrollos de estabilidad de sistemas TS afines (Kim and Kim, 2002; Johansson, 1999), donde se utilizan funciones cuadráticas de Lyapunov y el *s-procedure* (Boyd *et al.*, 1994) para probar estabilidad en el origen (que, en realidad, representa a un único punto de referencia arbitrario tras el cambio usual a variables incrementales). Sin embargo, los cambios en la referencia no están considerados.

El artículo tiene la siguiente estructura. La sección 2 presenta las definiciones de modelo TSA canónico. En la sección 3 se presenta el resultado principal, el cambio de variable que permite transformar estos modelos a modelos TS sin término afín y con la referencia como punto de equilibrio. En la sección 4 presentamos algunos ejemplos para ilustrar el resultado y finalmente una sección con las conclusiones más significativas.

2. MODELOS CANÓNICOS TSA

En esta sección, se presentan las definiciones básicas de modelos borrosos que generalizan el modelo

Takagi-Sugeno utilizado en la mayor parte de las técnicas de diseño (Tanaka and Wang, 2001; Guerra and Vermeiren, 2004; Sala *et al.*, 2005), esto es:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^n \mu_i(z)(A_i x + B_i u) \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \mu_i(z) = 1 \quad \mu_i \geq 0 \quad i = 1 \dots n \quad (2)$$

Se asume z como un vector de variables accesible (puede incluir algunos o todos los estados del sistema x y variables externas). Las funciones $\mu_i(z)$ son denominadas funciones de pertenencia.

Definición 1. Modelo canónico no-borroso con término afín

Considérese un sistema con p entradas, p salidas y n estados definido por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u + R \\ y &= C \cdot x \end{aligned} \quad (3)$$

donde el vector de estados está construido siguiendo la estructura:

$$x = [x_{11} \ x_{12} \dots x_{1r_1} \ x_{21} \ x_{22} \dots x_{2r_2} \ \dots \ x_{p1} \ x_{p2} \dots x_{pr_p}]^T \quad (4)$$

es decir, p bloques de tamaño r_1, \dots, r_p respectivamente, $r_1 + \dots + r_p = n$, compatibles con la estructura de las matrices A, B, C, R descritas a continuación.

Definimos la matriz auxiliar de dimensión $q \times (q-1)$ como:

$$T_q = [0_{(q-1) \times 1} \ I_{q-1}] \quad (5)$$

Donde I_{q-1} representa la matriz identidad de tamaño $(q-1) \times (q-1)$ y $0_{(q-1) \times 1}$ representa la matriz nula de tamaño $(q-1) \times 1$.

También, la notación $[]_{s \times t}$ representa una matriz arbitraria de dimensión $s \times t$. La matriz A en (3) tiene la estructura definida en (8)

y las matrices B, R, C :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{0_{(r_1-1) \times p}}{[]_{1 \times p}} \\ \frac{0_{(r_2-1) \times p}}{[]_{1 \times p}} \\ \vdots \\ \frac{0_{(r_p-1) \times p}}{[]_{1 \times p}} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \frac{0_{(r_1-1) \times p}}{[]_{1 \times p}} \\ \frac{0_{(r_2-1) \times p}}{[]_{1 \times p}} \\ \vdots \\ \frac{0_{(r_p-1) \times p}}{[]_{1 \times p}} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$C = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & & 0 & & & 0 & \\ 0 & & 1 & & & 0 & \\ 0 & X_1 & 0 & X_2 & \dots & \vdots & X_p \\ \vdots & & \vdots & & & 0 & \\ 0 & & 0 & & & 1 & \end{array} \right] \quad (7)$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} T_{r_1} & 0_{(r_1-1) \times r_2} & \cdots & 0_{(r_1-1) \times r_p} \\ \hline & \boxed{1 \times n} & & \\ \hline 0_{(r_2-1) \times r_1} & T_{r_2} & \cdots & 0_{(r_2-1) \times r_p} \\ \hline & \boxed{1 \times n} & & \\ \hline & & \cdots & \\ \hline 0_{(r_p-1) \times r_1} & \cdots & 0_{(r_p-1) \times r_{p-1}} & T_{r_1} \\ \hline & \boxed{1 \times n} & & \end{array} \right] \quad (8)$$

donde X_j son matrices arbitrarias, de dimensiones $p \times (r_j - 1)$.

Nota 1. La estructura del sistema anterior es similar a la forma canónica alcanzable (Antsaklis and Mitchel, 1997). Por ejemplo, un sistema que comple la anterior estructura es el sistema SISO canónico siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_q \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$B = [0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ b]^T \quad (10)$$

$$C = [1 \ c_2 \ c_3 \ \cdots \ c_q] \quad (11)$$

$$R = [0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ r]^T \quad (12)$$

Definición 2. Modelo canónico borroso Takagi-Sugeno afín (TSA).

Un modelo canónico borroso Takagi-Sugeno afín viene definido por la expresión:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^n \mu_i(z) (A_i \cdot x + B_i \cdot u + R_i) \\ y &= \sum_{i=1}^n \mu_i(z) C_i x \end{aligned} \quad (13)$$

donde cada uno de los modelos que lo componen tiene la estructura de la definición 1 y $\mu_i(z)$ son las funciones de pertenencia, que verifican (2).

Notación: Para acortar los sumatorios de la interpolación borrosa de matrices, se utilizará la notación siguiente:

$$\tilde{\Omega}(z) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z) \Omega_i \quad (14)$$

donde Ω_i será sustituido por A_i , B_i , C_i , R_i según convenga.

Con la notación arriba definida, el sistema borroso de la Definición 2 se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{A}(z) \cdot x + \tilde{B}(z) \cdot u + \tilde{R}(z) \\ y &= \tilde{C}(z)x \end{aligned} \quad (15)$$

Utilizando $\tilde{A}(z) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z) \cdot A_i$, $\tilde{B}(z) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z) \cdot B_i$, etc.

3. PROCEDIMIENTO DE ELIMINACIÓN DEL TERMINO AFÍN

Proposición 1. Dado un sistema que cumple con la estructura de la Definición 1 y unas acciones constantes $u = u^{eq}$, el estado de equilibrio verifica

$$x_{ij}^{eq} = 0 \quad i = 1, \dots, p \quad j = 2, \dots, r_i \quad (16)$$

Demostración: Con $u = u^{eq}$, la ecuación de equilibrio es:

$$0 = Ax^{eq} + Bu^{eq} + R \quad (17)$$

teniendo en cuenta la estructura de la matrices canónicas, los estados $x_{i2} \dots x_{ir_i} \forall i$ verifican:

$$\begin{aligned} 0_{(r_i-1) \times 1} &= I_{(r_i-1) \times (r_i-1)} \cdot \begin{bmatrix} x_{i2}^{eq} \\ \vdots \\ x_{ir_i}^{eq} \end{bmatrix} + \\ &+ 0_{(r_i-1) \times p} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{eq} \\ \vdots \\ u_p^{eq} \end{bmatrix} + 0_{(r_i-1) \times 1} \end{aligned} \quad (18)$$

Por lo tanto,

$$0 = I_{(r_i-1) \times (r_i-1)} \cdot \begin{bmatrix} x_{i2}^{eq} \\ \vdots \\ x_{ir_i}^{eq} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, p \quad (19)$$

Finalmente obtenemos (16).

Proposición 2. Dado un sistema que cumple con la estructura de la Definición (1) y unas acciones constantes $u = u^{eq}$, los valores para el vector de estados en el punto de equilibrio y los valores de la salida vienen dados en la forma:

$$\begin{aligned} x^{eq} &= [y_1^{eq} \ 0_{1 \times (r_1-1)} \ y_2^{eq} \ 0_{1 \times (r_2-1)} \ \cdots \ y_p^{eq} \ 0_{1 \times (r_p-1)}]^T \\ y^{eq} &= [y_1^{eq} \ \cdots \ y_p^{eq}]^T \end{aligned}$$

Demostración: Sustituyendo x^{eq} en la ecuación de salida,

$$y^{eq} = C \cdot x^{eq} \quad (20)$$

Teniendo en cuenta que, en virtud de la Proposición 1, los estados en equilibrio que multiplican a las X_j in (7) son cero, se tiene:

$$y^{eq} = \begin{bmatrix} x_{11}^{eq} \\ x_{21}^{eq} \\ \vdots \\ x_{p1}^{eq} \end{bmatrix} \quad (21)$$

con lo que, finalmente,

$$x^{eq} = [y_1^{eq} \ 0_{1 \times (r_1-1)} \ y_2^{eq} \ 0_{1 \times (r_2-1)} \ \dots \ y_p^{eq} \ 0_{1 \times (r_p-1)}]^T$$

Lemma 1. Considérese un sistema borroso canónico que cumple con la estructura de la Definición 2,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{A}(z) \cdot x + \tilde{B}(z) \cdot u + \tilde{R}(z) \\ y &= \tilde{C}(z)x \end{aligned} \quad (22)$$

y definase una entrada auxiliar

$$u_{est}(z, y_{ref}) = (\tilde{C}(z)\tilde{A}(z)^{-1}\tilde{B}(z))^{-1} \cdot (-y_{ref} - \tilde{C}(z)\tilde{A}(z)^{-1}\tilde{R}(z)) \quad (23)$$

Asumamos que la matriz $G = \tilde{C}(z)\tilde{A}(z)^{-1}\tilde{B}(z)$ es no-singular¹. Mediante el cambio de variable

$$\hat{x} = x - x_{ref} \quad (24)$$

$$\hat{u} = u - u_{est}(z, y_{ref}) \quad (25)$$

donde

$$x_{ref} = [y_{ref,1} \ 0_{1 \times (r_1-1)} \ y_{ref,2} \ 0_{1 \times (r_2-1)} \ \dots \ y_{ref,p} \ 0_{1 \times (r_p-1)}]^T \quad (26)$$

y

$$y_{ref} = [y_{ref,1} \ \dots \ y_{ref,p}] \quad (27)$$

es un vector definido por el usuario, entonces $\hat{x} = 0$, $\hat{u} = 0$ es el nuevo punto de equilibrio del sistema. En las variables \hat{x} , \hat{u} , el sistema transformado viene representado por las ecuaciones:

$$\dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^n \mu_i(z)(A_i \hat{x} + B_i \hat{u}) \quad (28)$$

que representan un sistema borroso Takagi-Sugeno sin término afín (1). Las variables \hat{x} , \hat{u} representan *incrementos*.

Demostración: Representamos como S_{z_0} los modelos locales afines formados por el resultado de evaluar \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} and \tilde{R} en un particular y arbitrario punto z_0 :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \tilde{A}(z_0) \cdot \xi + \tilde{B}(z_0) \cdot u + \tilde{R}(z_0) \\ y &= \tilde{C}(z_0)\xi \end{aligned} \quad (29)$$

Este modelo lineal tiene la estructura de la Definición 1.

Calculamos la entrada $u_{est} = u_{est}(z_0, y_{ref})$ de forma que la salida y_{ref} sea punto de equilibrio del sistema anterior S_{z_0} , utilizando la ecuación del punto de equilibrio:

$$0 = \tilde{A}(z_0) \cdot \xi_{ref} + \tilde{B}(z_0) \cdot u_{est} + \tilde{R}(z_0) \quad (30)$$

$$y_{ref} = \tilde{C}(z_0) \cdot \xi_{ref} \quad (31)$$

En adelante omitimos la dependencia en z_0 para simplificar la notación

$$\begin{aligned} \tilde{B} \cdot u_{est} &= -\tilde{A} \cdot \xi_{ref} - \tilde{R} \\ \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{B} \cdot u_{est} &= -\tilde{C}\xi_{ref} - \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{R} = -y_{ref} - \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{R} \\ u_{est} &= (\tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{B})^{-1}(-y_{ref} - \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{R}) \end{aligned} \quad (32)$$

Obtenemos el estado de equilibrio ξ_{ref} . Como $u_{est}(z_0, y_{ref})$ satisface que la salida y_{ref} es punto de equilibrio, y como S_{z_0} tiene la estructura de la Definición 1, entonces la Proposición 2 asegura que ξ_{ref} es:

$$\xi_{ref} = [y_{ref,1} \ 0_{1 \times r_1} \ y_{ref,2} \ 0_{1 \times r_2} \ \dots \ y_{ref,p} \ 0_{1 \times r_p}]^T$$

idéntica al estado x_{ref} definido en (26). Como z_0 en (30) es un punto arbitrario, tenemos

$$0 = \tilde{A}(z) \cdot x_{ref} + \tilde{B}(z) \cdot u_{est}(z, y_{ref}) + \tilde{R}(z) \quad \forall z \quad (33)$$

Haciendo el cambio de variable

$$\hat{x} = x - x_{ref}$$

$$\hat{u} = u - u_{est}(z, y_{ref})$$

y utilizando (33), las ecuaciones del sistema pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{A}x + \tilde{B}u + \tilde{R} = \tilde{A}x + \tilde{B}\hat{u} + \tilde{B}u_{est} + \tilde{R} \\ \dot{x} &= \tilde{A}x + \tilde{B}\hat{u} - \tilde{A}x_{ref} - \tilde{R} + \tilde{R} = \tilde{A}(x - x_{ref}) + \tilde{B}\hat{u} \\ \dot{x} &= \tilde{A}\hat{x} + \tilde{B}\hat{u} \end{aligned}$$

Si y_{ref} se considera como punto de referencia constante ($\dot{y}_{ref} = 0$), entonces $\dot{x}_{ref} = 0$ y $\dot{\hat{x}} = \dot{x}$. Así el modelo borroso en las nuevas variables es:

$$\dot{\hat{x}} = \tilde{A}\hat{x} + \tilde{B}\hat{u} = \sum_{i=1}^n \mu_i(z)(A_i \hat{x} + B_i \hat{u})$$

cuyo punto de equilibrio es $\hat{x} = 0$, que corresponde con x_{ref} (y salida y_{ref}) en el modelo original no incremental. \square

El sistema en las nuevas variables tiene el término afín eliminado y se puede diseñar un controlador borroso utilizando técnicas TS convencionales. En particular, en los ejemplos de la siguiente sección se usarán técnicas LMI. La acción de control del sistema original será calculada sumando a la acción del sistema en incrementos el término $u_{est}(z, y_{ref})$.

Se observa también que, con un sistema TS no afín ($\tilde{R}(z)=0$) y con referencia $y_{ref} = 0$, el resultado es $u_{est} = 0$: la metodología propuesta coincide en ese caso con la utilizada normalmente en la literatura. Pero los resultados de este trabajo se

¹ G es la matriz de ganancia del sistema lineal que se obtiene al fijar z en el sistema (13) y eliminar el término afín. Por tanto la condición de no-singularidad se dará cuando esta ganancia "local" G no sea cero.

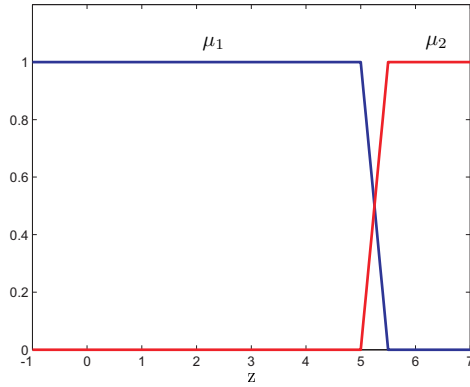


Figura 1. funciones de pertenencia

pueden aplicar incluso para cambios de referencia en modelos TS no afines (siempre que estén en forma canónica), generando $u_{est}(z, y_{ref} = -(\tilde{C}(z)\tilde{A}(z)^{-1}\tilde{B}(z))^{-1} \cdot y_{ref}$, como se muestra en el primer ejemplo de la siguiente sección.

4. EJEMPLOS

En esta sección, se exponen varios ejemplos para mostrar las posibilidades de la metodología propuesta. Un primer ejemplo muestra el control de un sistema borroso TS sin término afín en varios puntos de funcionamiento, comparando los resultados de la metodología propuesta con la habitual que utiliza un cambio constante de variable. El segundo ejemplo ilustra la metodología para el caso multivariable.

Ejemplo 1. Dado el siguiente sistema borroso TS:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^2 \mu_i(z)(A_i x + B_i u) \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (34)$$

donde los dos modelos lineales vienen dados por:

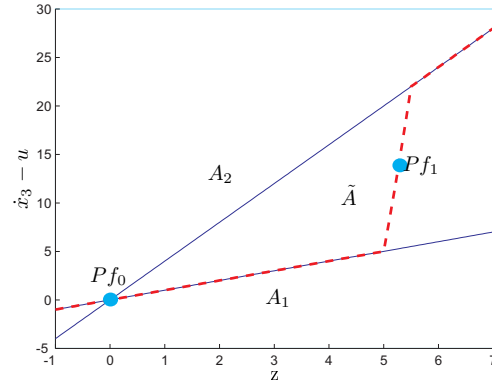
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$B_1 = B_2 = [0 \ 0 \ 1]^T \quad (37)$$

$$C = [1 \ 0 \ 0] \quad (38)$$

y las funciones de pertenencia $\mu_i(z)$ son las particiones trapezoidales mostradas en la Figura 1, donde la variable z viene definida por $z = x_1 + 2x_2 + x_3$. La Figura 2 muestra el cambio brusco entre modelos lineales del sistema como una función

Figura 2. No linealidad de la función $\dot{x}_3 - u$

de z . por simplicidad y para evitar representaciones n -dimensionales, se ha elegido como ordenada $\dot{x}_3 - u$.

Se observa que para este sistema TS con punto de funcionamiento en el origen (Pf_0 en la figura), se cumplen las condiciones de diseño de un controlador de compensación dinámica en paralelo (Tanaka and Wang, 2001), definido como:

$$u = \sum_{i=1}^n \mu_i(z) F_i x \quad (39)$$

Por tanto, se puede aplicar la metodología LMI para obtener un controlador que estabilice al sistema con una cierta tasa de decrecimiento α .

Las condiciones LMI propuestas en (Tanaka and Wang, 2001) son :

$$-XA_1^T - A_1X + M_1^T B_1^T + B_1 M_1 - 2\alpha X > 0 \quad (40)$$

$$-XA_2^T - A_2X + M_2^T B_2^T + B_2 M_2 - 2\alpha X > 0 \quad (41)$$

$$-XA_1^T - A_1X - XA_2^T - A_2X + M_1^T B_2^T + \quad (42)$$

$$+ B_2 M_1 + M_2^T B_1^T + B_1 M_2 - 4\alpha X > 0 \quad (43)$$

donde

$$X = P^{-1}, \quad M_1 = F_1 X, \quad M_2 = F_2 X \quad (44)$$

siendo P una matriz simétrica que define la función de Lyapunov $x^T P x$ y F_1, F_2 las ganancias del controlador de realimentación del estado implementado como:

$$\hat{u} = -\tilde{F}(z)\hat{x} = -(\mu_1(z)F_1 + \mu_2(z)F_2)\hat{x} \quad (45)$$

donde $\hat{u} = u - u_{ref}$, $\hat{x} = x - x_{ref}$ siendo en el caso en consideración $u_{ref} = 0$, $x_{ref} = 0$.

Para $\alpha = 1$ obtenemos el controlador:

$$F_1 = [27,5203 \ 28,7108 \ 8,4221] \quad (46)$$

$$F_2 = [30,5203 \ 34,7108 \ 11,4221] \quad (47)$$

$$\tilde{F}(z) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z) F_i \quad (48)$$

El cual como se esperaba funciona correctamente cuando alcanzamos el origen (Pf_0 de la Figura

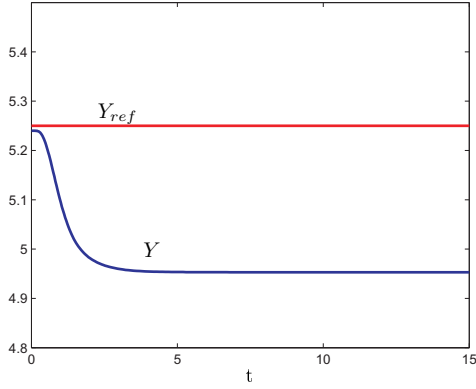


Figura 3. Salida del sistema Y con cambio de variable constante

2). Sin embargo cuando tratamos de estabilizar el sistema cerca de otro punto de funcionamiento, el punto Pf_1 de la figura 2 ($u_{ref} = -13,125$ $y_{ref} = 5,25$ $x_{ref} = [5,25 \ 0 \ 0]^T$), las condiciones de Lyapunov ya no son válidas. Esto se debe a que el modelo linealizado en esa zona no está contenido por los modelos locales. Para poder utilizar la metodología habitual es necesario redefinir los modelos locales. De hecho con el cambio constante de variable $\hat{u} = u + 13,125$, $\hat{x} = x - x_{ref}$ utilizado para conseguir $x = 0$ como punto de operación, el controlador resultante:

$$u = -13,125 + \tilde{F}(z)(x - [5,25 \ 0 \ 0]^T) \quad (49)$$

hace localmente inestable el punto de equilibrio: la Figura 3 muestra cómo para condiciones iniciales en la vecindad de la referencia, el sistema se aleja hacia otra región del espacio de estados.

Por el contrario, aplicando la metodología propuesta en este artículo se obtiene un controlador válido para todos los puntos de operación, sin necesitarse modificaciones en las condiciones LMI. La Figura 4 muestra la acción no constante u_{est} calculada mediante el Lema 1, el cual reemplaza el valor constante $-13,125$ en (49). De esta forma, el sistema en bucle cerrado resultante tiene la referencia deseada como punto de equilibrio, y dicho equilibrio es estable satisfaciendo la tasa de decrecimiento de diseño, tal y como se muestra en la Figura 5.

Ejemplo 2. Este ejemplo muestra el funcionamiento de la metodología aplicada a un sistema de 5º orden MIMO Takagi-Sugeno afín con dos modelos locales inestables dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^2 \mu_i(z)(A_i(x - x_{i0}) + B_i(u - u_{i0})) \\ y &= \sum_{i=1}^2 \mu_i(z)C_i x \end{aligned} \quad (50)$$

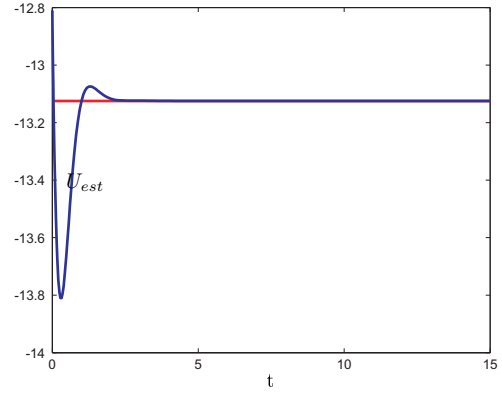


Figura 4. Acción no constante u_{est}

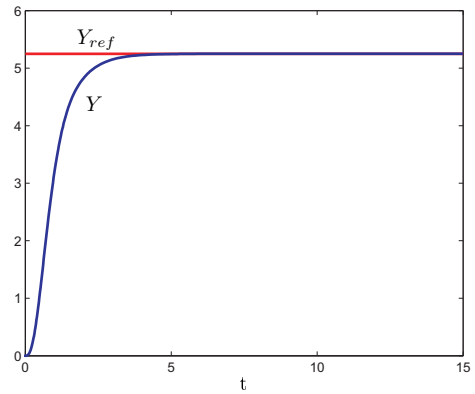


Figura 5. Salida del sistema Y con acción no constante u_{est}

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (52)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0,1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (54)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 & 0,05 & 0 & -0,1 \\ 0 & -0,2 & 0,5 & 1 & -0,1 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0,1 & 0 & -0,2 \\ 0 & -0,1 & -0,5 & 1 & 0,2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$x_{10} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (57)$$

$$u_{10} = [0 \ 0]^T \quad (58)$$

$$x_{20} = [2 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0]^T \quad (59)$$

$$u_{20} = [1 \ 3]^T \quad (60)$$

y las funciones de pertenencia $\mu_i(z)$, definidas sobre $z = x_1 + x_4$ como:

$$\mu_1(z) = \begin{cases} 1 & z < 0 \\ 1 - 0,25z & 0 \leq z \leq 4 \\ 0 & z > 4 \end{cases} \quad (61)$$

siendo $\mu_2(z) = 1 - \mu_1(z)$.

Agrupando los diferentes puntos de equilibrio para cada modelo local en el término afín:

$$R_i = -A_i x_{i0} - B_i u_{i0} \quad (62)$$

Por lo tanto, el sistema cumple la estructura de la Definición 2. Así la acción de control $u_{est}(z, y_{ref})$, calculada mediante (23), y el estado de equilibrio son

$$x_{ref} = [y_{ref1} \ 0 \ 0 \ y_{ref2} \ 0]^T \quad (63)$$

$$u_{est} = (\tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{B})^{-1}(-y_{ref} - \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{R}) \quad (64)$$

donde y_{ref1} y y_{ref2} son referencias arbitrarias definidas por el usuario, para cada una de las dos salidas del sistema. El cambio de variable elimina los términos afines, así el sistema puede expresarse en incrementos como $\dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z)(A_i \hat{x} + B_i \hat{u})$.

Mediante la LMI Control Toolbox de Matlab, se diseñará un controlador para el sistema no afín resultante, para la tasa de decrecimiento $\alpha = 0,5$. El resultado son las matrices F_1 y F_2 del controlador:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 2,3055 & -1,1045 & -0,7586 & 2,0488 & 1,1811 \\ 19,9488 & 48,1167 & 3,5752 & -22,2677 & -11,5650 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1,9855 & -1,7181 & -0,7979 & 2,3385 & 1,2567 \\ -0,7924 & 45,8957 & 12,8867 & -31,8246 & -15,5711 \end{bmatrix}$$

Esta acción de control se aplica al sistema después de invertir el cambio de variable:

$$u = u_{est}(z, y_{ref}) - (\mu_1(z)F_1 + \mu_2(z)F_2)(x - x_{ref}) \quad (65)$$

La Figura 6 muestra la respuesta del sistema en la referencia $y_{ref} = [1 \ 1]^T$, donde se observa que, en efecto, las variables x_1 y x_4 convergen al punto de equilibrio deseado. En las figuras 7, 8 y 9 se representan las evoluciones de: la acción de control responsable del cambio de variable, las variables de salida y la acción de control global, respectivamente.

El funcionamiento del controlador obtenido para cambios de referencia de (1,1) a (2,2) se muestra en la Figura 10.

5. CONCLUSIONES

Este artículo presenta un cambio de variable para la eliminación del término afín, en modelos borrosos Takagi-Sugeno afines cuyos modelos locales

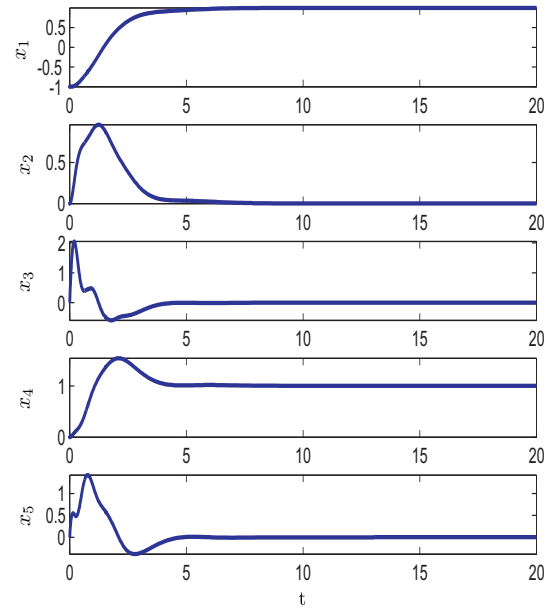


Figura 6. Respuesta temporal de las variables de estado

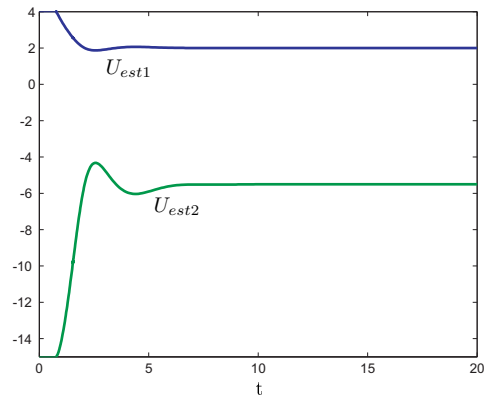


Figura 7. Acción U_{est}

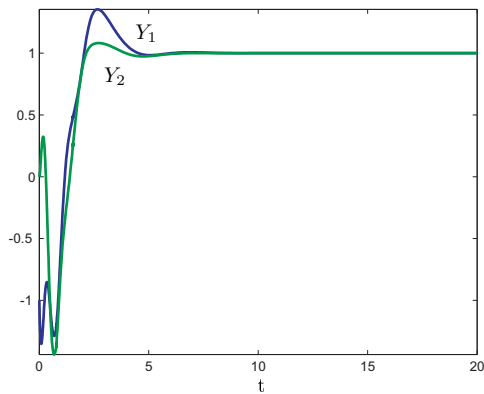


Figura 8. Salida del sistema Y

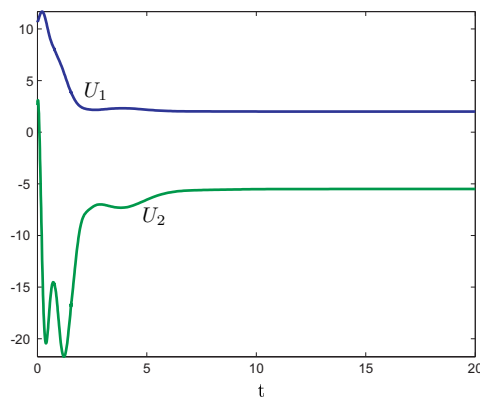


Figura 9. Acción de control global U

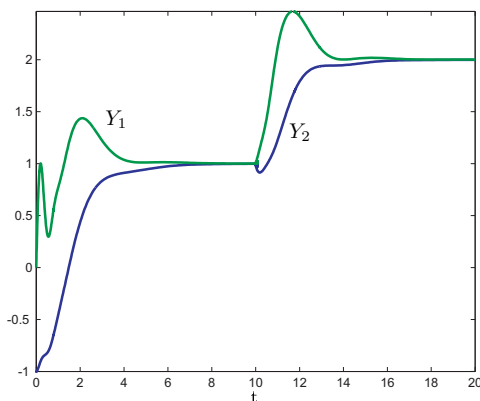


Figura 10. Salida del sistema Y con cambio en la referencia a $Y_{ref} = (2, 2)^T$

tienen una estructura canónica particular. Esta estructura puede obtenerse por ejemplo tomando como variables de estado las salidas y sus derivadas.

Como resultado obtenemos un sistema en incrementos con el punto de equilibrio en $\hat{x} = 0$. A diferencia de los cambios de variables comunes, el propuesto es un cambio de variable no constante en el tiempo que obtiene la eliminación del término afín; el sistema en incrementos resultante tiene la misma representación para cualquier referencia deseada. De esta forma se pueden aplicar directamente, independientemente de la referencia tomada, los métodos usuales de diseño de controladores para sistemas borrosos TS no afines. Es interesante, como caso particular, la aplicación de esta metodología al control de cambios en la referencia en sistemas borrosos TS.

REFERENCIAS

- Andújar, J.M., A.J. Barragán, J.M. Córdoba and I. F. de Viana (2006). Diseño de sistemas de control borroso: modelado de la planta. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* **3**, 75–81.
- Antsaklis, P.J. and A.N. Mithel (1997). *Linear Systems*. McGraw-Hill. NY.
- Ariño, C. and A. Sala (2007). Relaxed LMI conditions for closed-loop fuzzy systems with tensor product structure. *Eng. Appl. Artif. Intell.*
- Babuska, R. (1998). *Fuzzy Modeling for Control*. Kluwer Academic Publishers Norwell, MA, USA.
- Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Ed. SIAM. Philadelphia, USA.
- Guerra, T.M. and L. Vermeiren (2004). LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the takagi-sugeno's form. *Automatica* **10**, 823 – 829.
- Johansson, M (1999). Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **7**, 713–722.
- Kim, E. and H. Lee (2000). New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **2**, 1571–1582.
- Kim, E. and S. Kim (2002). Stability analysis and synthesis for an affine fuzzy control system via LMI and ILMI: a continuous case. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **10**(3), 391–400.
- Liu, Xiaodong and Qingling Zhang (2003). Approaches to quadratic stability conditions and H_∞ control designs for t-s fuzzy systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **11**(6), 830–839.
- Nelles, O., A. Fink and R. Isermann (2000). Local linear model trees (lolimot) toolbox for nonlinear system identification. In: *Proc. 12th IFAC Symposium on System Identification*. Elsevier.
- Sala, A. and C. Ariño (2007). Relaxed stability and performance conditions for takagi-sugeno fuzzy systems with knowledge on membership function overlap. *IEEE Trans. SMC(B)* **37**(3), In print.
- Sala, A., T. M. Guerra and R. Babuska (2005). Perspectives of fuzzy systems and control. *Fuzzy Sets Syst.* **156**, 432–444.
- Slotine, Jean-Jaques E. and Weiping Li (1991). *Applied Nonlinear Control*. Ed. Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey.
- Takagi, T. and M. Sugeno (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics* **15**(1), 116–132.
- Tanaka, K. and H. O. Wang (2001). *Fuzzy control systems design and analysis*. Ed. John Wiley & Sons. New York, USA.